

# 種数 3 非超楕円的な族に対する Meyer 函数の構成

## A construction of the Meyer function for non-hyperelliptic families of genus 3

久野 雄介 (Yusuke Kuno)  
東京大学数理科学研究科 (The University of Tokyo)

### 1 はじめに

近年、有向閉曲面を一般ファイバーとするファイバー空間の構造を持った 4 次元多様体の研究、特に、4 次元ファイバー空間の全空間の符号数が、いくつかの特異ファイバー芽に局所化する現象は符号数の局所化として知られ、トポロジー、代数幾何、複素幾何などの分野から活発な寄与がある研究対象になっている。Meyer 函数は、モノドロミーのデータから局所符号数を定義するために用いられてきた。Meyer 函数とは、Meyer コサイクルと呼ばれる曲面の写像類群  $\Gamma_g$  上の 2-コサイクルを、ある適当な群  $G$  からある準同型

$$\rho: G \rightarrow \Gamma_g$$

により引き戻したときに、それをコバウンドするような  $G$  上の有理 1-コチェインのことである。W.Meyer[10] により、 $\Gamma_1, \Gamma_2$  に Meyer 函数が存在することが証明された。超楕円の写像類群の上にも Meyer 函数が存在し、Endo[5], Morifuji[11] により研究されている。しかし、種数が 3 以上の時は Meyer コサイクルが  $\Gamma_g$  の有理係数の 2 次元コホモロジーの生成元となることから、 $\Gamma_g$  には Meyer 函数は存在しない。

Mumford[12] により、Grothendieck-Riemann-Roch 公式を用いて、種数 3 の非超楕円的な Riemann 面の族に対して、第一 MMM 類が有理係数で消えることが指摘されている。Looijenga[7] により、非特異平面 4 次曲線のモジュライ空間の第 2 ベッチ数が 0 であることが証明されている。この稿では、これらの結果と標語

種数 3 の非超楕円的な Riemann 面 = 非特異平面 4 次曲線

をふまえて、平面 4 次曲線の写像類群  $\Gamma^Q$  と、準同型

$$\rho: \Gamma^Q \rightarrow \Gamma_3$$

を構成し、 $\Gamma^Q$  上の Meyer 函数の存在と一意性を証明する。 $\Gamma^Q$  は種数 3 非超楕円的な Riemann 面の普遍族の底空間の基本群として定義される。我々の方法は GRR 公式を用いず、 $E_6, E_7$  型 Artin 群と平面 4 次曲線の関係を用い、最後は Meyer コサイクルの具体的な計算に帰着させる。得られた Meyer 函数を用いて一般ファイバーが種数 3 非超楕円的な Riemann 面であるようなファイバー空間の局所符号数を定義し、符号数の局所化公式を導く。この局所符号数の定義の仕方は [9] に既に見られるが、今回の種数 3 非超楕円的な場合では、位相的なモノドロミーを  $\Gamma^Q$  にリフトする必要があるところが今まで異なる。

## 2 Meyer コサイクル

まず Meyer コサイクル [10] について説明する。 $\Sigma_g$  で種数  $g \geq 1$  の  $C^\infty$  級有向閉曲面、 $\Gamma_g$  でその写像類群、つまり  $\Sigma_g$  の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類全体のなす群を表す。

$P := S^2 \setminus \cup_{k=1}^3 \overset{\circ}{D}_k$  とおき、パンツと呼ぶ。ここに  $D_k$  たちは互いに交わらない  $S^2$  内の 2 次元閉円板。 $P$  の境界  $-\partial D_1, -\partial D_2$  を一周する、基点からのループをそれぞれ  $l_1, l_2$  とする。 $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_g$  に対して、 $P$  上の  $\Sigma_g$  束  $E \rightarrow P$  であって  $l_k$  に関するモノドロミーが  $\alpha_k (k=1, 2)$  となるものが存在する。 $E$  は自然な向きを持ったコンパクトで境界を持つ 4 次元多様体であるのでその符号数  $\text{Sign}(E)$  が定義される。

$$\tau_g(\alpha_1, \alpha_2) := -\text{Sign}(E)$$

とおくと、 $\tau_g: \Gamma_g \times \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Z}$  は  $\Gamma_g$  上の 2-コサイクルとなり、Meyer コサイクルと呼ばれている。

次に (小) Artin 群について述べる。 $G$  を  $\{a_i\}_{i \in I}$  を頂点集合とする連結グラフで、ループを含まないものとする。異なる 2 頂点を結ぶ辺の個数は 0 または 1 と仮定する。 $G$  に関する Artin 群  $\text{Artin}(G)$  とは、 $\{a_i\}_{i \in I}$  を生成元集合とし、定義関係式として

$$a_i a_j = a_j a_i \quad (a_i \text{ と } a_j \text{ が結ばれないとき})$$

$$a_i a_j a_i = a_j a_i a_j \quad (a_i \text{ と } a_j \text{ が結ばれるとき})$$

を持つ群のことである。次に、 $\{r_j\}_{j \in J}$  を自由群  $F = F(\{a_i\}_{i \in I})$  の部分集合とし、 $\text{Artin}(G)$  に、更に関係式  $r_j = 1, j \in J$  を付け加えて定義される群を Artin 群の商群と呼び、 $\text{Art}(G, \{r_j\}_{j \in J})$  と表す。

$G$  を群、 $\tau \in Z^2(G; \mathbb{Z})$  をある準同型  $\rho: G \rightarrow \Gamma_g$  による Meyer コサイクルの引き戻しとする。1-コチェイン  $\phi: G \rightarrow \mathbb{Q}$  で  $\delta\phi = \tau$  を満たすものを  $\tau$  に関する Meyer 函数と呼ぶ。 $G$  が表示を持つ時に、 $G$  上の Meyer 函数の存在を判定する Meyer の判定法 [10, p.249] がある。 $G$  が Artin 群の商群の時にこれを簡明にし、なおかつ Meyer 函数の構成法を与えたのが次の補題である。 $G = \text{Art}(G, \{r_j\}_{j \in J})$  の時、 $\varpi: F \rightarrow G$  を自然な射影、 $c: F \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\begin{aligned} c(f) &:= \sum_{i \in I} \tau_g \left( \varpi \left( \frac{\partial f}{\partial a_i} \right), \varpi(a_i) \right), \quad f \in F \\ &= \sum_{k=1}^n \tau_g(\varpi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}), \varpi(a_{i_k}^{\varepsilon_k})), \quad (f = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\varepsilon_n}, i_1, \dots, i_n \in I, \varepsilon_j \in \{\pm 1\}) \end{aligned}$$

により定める。 $\frac{\partial f}{\partial a_i} \in \mathbb{Z}F$  は Fox 自由微分を表し、 $\tau_g(\cdot, \cdot)$  は双線型に拡張している。また、 $\alpha: F \rightarrow \mathbb{Z}$  は  $\alpha(a_i) = 1$  で定まる準同型とする。

**Lemma 2.1 (Meyer 函数の存在判定と構成法)**  $G = \text{Art}(G, \{r_j\}_{j \in J})$  の時、

1.  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$n[\tau] = 0 \in H^2(G; \mathbb{Z}) \iff \text{ある } m \in \mathbb{Z} \text{ が存在して、任意の } j \in J \text{ に対して } n \cdot c(r_j) = m \cdot \alpha(r_j)$$

2. 1. の状況で、 $\phi: G \rightarrow \frac{1}{n}\mathbb{Z}$  を

$$\phi(\varpi(x)) := -c(x) + \frac{m}{n}\alpha(x), \quad x \in F$$

により定めると、 $\phi$  は well-defined で、 $\delta\phi = \tau$  となる。すなわち  $\phi$  は  $\tau$  に関する Meyer 函数となる。

3. 1. の状況で、Meyer 函数が一意に存在する必要十分条件はある  $j \in J$  について  $\alpha(r_j) \neq 0$  となること。

1. の右側の条件を簡単に言うと、 $c: \alpha$  が関係子上一定であるということになる。

### 3 種数 3 非超楕円的な族と非特異 4 次曲線

種数 3 の非超楕円的な Riemann 面の普遍族を、非特異 4 次曲線を用いて構成したい。P で変数  $x, y, z$  に関する複素係数斉次 4 次式のなすベクトル空間の射影化を表す。

**Definition 3.1**

$$\mathcal{Q} := \{F(x, y, z) \in \mathbb{P}; C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2; F(x, y, z) = 0\} \text{ は非特異}\}$$

$$\mathcal{C} := \{(F, p) \in \mathcal{Q} \times \mathbb{P}^2; p \in C_F\}$$

$$\bar{\mathcal{Q}} := \{(F, p) \in \mathcal{C}; p \text{ は } C_F \text{ 上のフレックス}\}$$

$$\mathcal{Q}'' := \{(F, p) \in \bar{\mathcal{Q}}; p \text{ は } C_F \text{ 上のハイパーフレックス}\}$$

$$\mathcal{Q}' := \bar{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{Q}''$$

**Remark 3.2**  $(F, p) \in \mathcal{C}$  のとき、 $p$  が  $C_F$  上のフレックスであるとは、 $p$  における  $C_F$  の接線が  $C_F$  と 3 次以上の接触をすることである。 $p$  が  $C_F$  上のハイパーフレックスであるとは、 $p$  における  $C_F$  の接線が  $C_F$  と 4 次の接触をすることである。 $\bar{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}''$  および  $\mathcal{Q}'$  は以下の議論で補助的な役割を果たす。

$PGL(3)$  は射影変換群として  $\mathbb{P}^2$  に、変数変換として  $\mathcal{Q}$  に作用している。この作用は  $PGL(3)$  の  $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q}'', \mathcal{Q}'$  への作用を誘導する。

さて  $\mathcal{C}$  を種数 3 非超楕円的な Riemann 面とすると、標準埋め込みにより  $\mathcal{C}$  は  $\mathbb{P}^2$  に埋め込まれ、その像は非特異平面 4 次曲線である。逆に  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  を非特異平面 4 次曲線とすると、添加公式から包含写像  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  が標準埋め込みと同一視されることが分かり  $\mathcal{C}$  は非超楕円的で種数は 3 となる。 $M_g$  で種数  $g$  のコンパクト Riemann 面のモジュライ空間、 $\mathbb{H}_g$  で超楕円曲線全体のなす  $M_g$  の部分空間を表すことにすれば、次の集合論的全単射が存在する。

$$M_3 \setminus \mathbb{H}_3 \cong PGL(3) \setminus \mathcal{Q}$$

しかし  $PGL(3)$  の  $\mathcal{Q}$  への作用は自由ではないため、素朴な商空間は特異点を持つ。これによる困難を避けるため、ここでは普遍族を得るために、ホモトピー商 (Borel 構成)

$$\mathcal{Q}_{PGL(3)} := EPGL(3) \times_{PGL(3)} \mathcal{Q} = EPGL(3) \times \mathcal{Q} / (eg, F) \sim (e, gF)$$

( $e \in EPGL(3), g \in PGL(3), F \in \mathcal{Q}$ ) を取ることにする。ここで  $p: EPGL(3) \rightarrow BPGL(3)$  は普遍主  $PGL(3)$  束。

$$p_1: \mathcal{Q}_{PGL(3)} \rightarrow BPGL(3), [e, g] \mapsto p(e)$$

は  $\mathcal{Q}$  をファイバーとするファイバー束になる。同様に  $\mathcal{C}_{PGL(3)}$  および種数 3 非超楕円的なコンパクト Riemann 面の連続族

$$\mathcal{C}_{PGL(3)} \rightarrow \mathcal{Q}_{PGL(3)} \tag{1}$$

を得る。

**Definition 3.3** (平面 4 次曲線の写像類群)  $\Gamma^{\mathcal{Q}} := \pi_1(\mathcal{Q}_{PGL(3)})$  とおき、平面 4 次曲線の写像類群と呼ぶ。

(1) を向き付けられた  $\Sigma_3$  バンドルと見たときのモノドロミー準同型を  $\rho: \Gamma^{\mathcal{Q}} \rightarrow \Gamma_3$  と書く。

族 (1) は次の意味で普遍族と呼ぶに相応しい。以下では種数 3 非超楕円的なコンパクト Riemann 面の連続族を種数 3 非超楕円的な族と呼んでいる。空間  $B$  上の種数 3 非超楕円的な族  $\pi_i: E_i \rightarrow B$  ( $i = 0, 1$ ) があるとき、 $\pi_0$  と  $\pi_1$  がアイソトピックであるとは、 $B \times [0, 1]$  上の種数 3 非超楕円的な族  $\pi: E \rightarrow B \times [0, 1]$  が存在して、 $\pi$  の  $B \times \{i\}$  への制限が Riemann 面の連続族として  $\pi_i: E_i \rightarrow B$  に同型 ( $i = 0, 1$ ) であることとする。記号  $NH_3(B)$  で、 $B$  上の種数 3 非超楕円的な族のアイソトピー類全体のなす集合を表す。アイソトピーの定義から、 $B$  から  $\mathcal{Q}_{PGL(3)}$  への連続写像により普遍族を引き戻す写像

$$K: [B, \mathcal{Q}_{PGL(3)}] \rightarrow NH_3(B), \quad [f] \rightarrow [f^* \mathcal{C}_{PGL(3)}]$$

は well-defined である。

**Proposition 3.4** ( $\mathcal{Q}_{PGL(3)}$  の普遍性) 任意の空間  $B$  に対して  $K: [B, \mathcal{Q}_{PGL(3)}] \rightarrow NH_3(B)$  は全単射。

**証明:** 種数 3 の非超楕円的な族  $\pi: E \rightarrow B$  に対して、各ファイバーの正則 1 型式の基底の空間を集めて

$$P(E) = \{(t, (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \bmod \mathbb{C}^*); t \in B, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ は } H^0(\pi^{-1}(t); K_t) \text{ の基底}\}$$

とおくと、これは  $B$  上の主  $PGL(3)$  束となる。 $\Phi: P(E) \rightarrow \mathcal{Q}$  を、

$$\Phi(t, (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \bmod \mathbb{C}^*) := (\pi^{-1}(t) \text{ を } (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \text{ により } \mathbb{P}^2 \text{ に埋め込んだ像の定義方程式})$$

により定めるとこれは  $PGL(3)$  同変であるから  $\Phi_{PGL(3)}: P(E)_{PGL(3)} \rightarrow \mathcal{Q}_{PGL(3)}$  が定まる。一方、自然な写像  $T: P(E)_{PGL(3)} = EPGL(3) \times_{PGL(3)} P(E) \rightarrow PGL(3) \backslash P(E) \cong B$  は可縮な空間  $EPGL(3)$  をファイバーとするファイバー束であるからホモトピー同値である。 $T$  のホモトピー逆を  $\xi: B \rightarrow P(E)_{PGL(3)}$  とし、 $f := \Phi_{PGL(3)} \circ \xi$  とおく。 $\pi: E \rightarrow B$  に対して  $f$  のホモトピー類を対応させる写像が  $K$  の逆を与える。

■

また、次も分かる。

**Lemma 3.5** ( $\bar{Q}$  と  $Q'$  の非特異性)

1.  $\bar{Q}$  は  $C$  中の余次元 1 の非特異連結部分多様体。
2.  $Q''$  は  $\bar{Q}$  中の余次元 1 の非特異連結部分多様体。

## 4 主結果

今回の主結果を述べる。

**Theorem 4.1**

1.  $\rho^*[\tau_3] = 0 \in H^2(\Gamma^{\mathcal{Q}}; \mathbb{Q})$
2.  $H^1(\Gamma^{\mathcal{Q}}; \mathbb{Q}) = 0$
3.  $\rho^* \tau_3$  に関する Meyer 函数  $\phi^{\mathcal{Q}}: \Gamma^{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$  が一意に存在する。

**Remark 4.2** 最近、2. についてはより強く、 $H_1(\Gamma^{\mathcal{Q}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  であることが分かった。2. についての証明は以下省略する。

以下では Theorem 4.1 の最初の主張の証明について述べる。

**Lemma 4.3** 写像  $g: \bar{Q} \rightarrow \mathcal{Q}_{PGL(3)}$ ,  $(F, p) \mapsto [e_0, F]$  の誘導する群コホモロジーの間の写像  $g^*: H^2(\Gamma^{\mathcal{Q}}; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(\pi_1(\bar{Q}); \mathbb{Q})$  は単射である。

この補題により、最初の主張の証明のためには  $\rho \circ g_*$  による  $\tau_3$  の引き戻しを  $\bar{\tau} \in H^2(\pi_1(\bar{Q}); \mathbb{Z})$  と書くとき、 $[\bar{\tau}] = 0 \in H^2(\pi_1(\bar{Q}); \mathbb{Q})$  を示せばよい。

### 5 $E_6, E_7$ 型 Artin 群と平面 4 次曲線

ここでは  $\pi_1(\mathcal{Q})$  が Artin 群の商群として表示されることを説明し、 $[\tau] = 0 \in H^2(\pi_1(\mathcal{Q}); \mathbb{Q})$  の証明の概略を示す。まず天下りであるが、次の定義をする。

**Definition 5.1**

$$V_6 := \{F \in \mathcal{Q} ; F(x, y, z) = x^4 + y^3z + a_1x^2yz + a_2xyz^2 + a_3x^2z^2 + a_4yz^3 + a_5xz^3 + a_6z^4\}$$

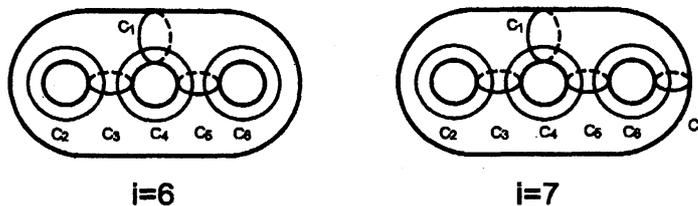
$$V_7 := \{F \in \mathcal{Q} ; F(x, y, z) = x^3y + y^3z + a_1x^4 + a_2x^3z + a_3xyz^2 + a_4x^2z^2 + a_5yz^3 + a_6xz^3 + a_7z^4\}$$

空間  $V_6, V_7$  はそれぞれ  $E_6, E_7$  特異点の半普遍変形空間の smooth locus に一致する。([6] や [8] を参照)。特に、[3][4] より  $\pi_1(V_6) \cong \text{Artin}(E_6), \pi_1(V_7) \cong \text{Artin}(E_7)$  である。ここで  $\text{Artin}(E_i)$  は  $E_i$  型の Dynkin 図形をグラフと思って定義される Artin 群である。その頂点に対応する生成元を  $\alpha_j$  と表すことにする。 $V_6, V_7$  の上には自然に 4 次曲線族がある。これの  $\Sigma_3$  束としてのモノドロミー準同型について、次が知られている。

**Theorem 5.2 (A'Campo [1])**

1. 各  $j$  に対して  $\alpha_j$  は、 $\Sigma_3$  上の非分離的なる単純閉曲線  $c_j$  に沿う左 Dehn ツイスト  $t_{c_j}^{-1}$  にうつる。
2. 相異なる  $j, k$  に対して  $c_j$  と  $c_k$  の  $\Sigma_3$  上での幾何学的交点数は  $\alpha_j$  と  $\alpha_k$  が隣合うとき 1 で、隣合わないとき 0 である。

「左」Dehn ツイストとなるのは我々のモノドロミー準同型の決め方による。多くの文献では右 Dehn ツイストで書いてある。図に見るように、曲面に Dynkin 図形の形をした単純閉曲線のチェーンが埋め込まれた格好になっている。



$c(E_6) = (\alpha_1 \cdots \alpha_6)^{12}, c(E_7) = (\alpha_1 \cdots \alpha_7)^9$  とおく。これはそれぞれ  $\text{Artin}(E_i)$  の中心の生成元を与えている。上の図と Meyer コサイクルの定義に基づいて、次を計算した。 $c$  は、モノドロミー準同型  $\text{Artin}(E_i) \rightarrow \Gamma_3$  による Meyer コサイクルの引き戻しから Lemma 2.1 に出てくる  $c$  の様に構成した自由群  $F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$  上の 1-コチェインである。

**Proposition 5.3**

$$c(c(E_6)^3) = -120, \alpha(c(E_6)^3) = 216$$

$$c(c(E_7)^3) = -105, \alpha(c(E_7)^3) = 189$$

また、包含写像  $V_6 \rightarrow \mathcal{Q}'', F \mapsto (F, [0:1:0])$  および  $V_7 \rightarrow \mathcal{Q}', F \mapsto (F, [0:1:0])$  をあるファイバー束のファイバーから全空間への包含と見做すことにより、そのホモトピー完全列から次が分かる。

**Theorem 5.4** 包含準同型  $\pi_1(V_6) \rightarrow \pi_1(\mathcal{Q}'')$  および  $\pi_1(V_7) \rightarrow \pi_1(\mathcal{Q}')$  は全射で、核は  $c(E_i)^3$  が生成する。  
 ( $i = 6, 7$ ) 特に、 $\pi_1(\mathcal{Q}'') \cong \text{Art}(E_6, \{c(E_6)^3\}), \pi_1(\mathcal{Q}') \cong \text{Art}(E_7, \{c(E_7)^3\})$  となる。

さて、Lemma 3.5 から  $\bar{Q}$  は連結複素多様体で、 $Q''$  は  $\bar{Q}$  の非特異因子である。よって、群の完全列

$$1 \rightarrow \langle \sigma \rangle \rightarrow \pi_1(Q') \rightarrow \pi_1(\bar{Q}) \rightarrow 1$$

が存在する。ここで  $\sigma$  は  $\bar{Q}$  の周りを一周するあるループ (なげなわ) である。局所方程式を調べることにより、なげなわ  $\sigma$  を具体的なループとして求めることができる。

**Lemma 5.5**  $\varepsilon$  を十分小さい正数とすると、 $V_7$  のループ

$$\ell(t) = x^3y + y^3z + s^{-2}x^4 + s^{-6}z^4, \quad s = e^{2\pi\sqrt{-1}t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

は  $Q'$  のループと見ると、なげなわ  $\sigma$  を表す。

特に、Theorem 5.4 とあわせて  $\pi_1(\bar{Q}) \cong \text{Art}(E_7, \{c(E_7)^3, \sigma\})$  となる。 $\sigma$  の語表示については現在得られていないが、 $c$  や  $\alpha$  の幾何的意味を用いることで、次を証明することができる。

**Proposition 5.6**  $c(\sigma) = 30$ ,  $\alpha(\sigma) = -54$

ここで、Lemma 2.1 を適用すると  $c : \alpha = -5 : 9$  であるので、 $[\bar{\tau}] = 0 \in H^2(\pi_1(\bar{Q}); \mathbb{Q})$  が分かる。

	$c$	$\alpha$
$r_1 = c(E_7)^3$	-105	189
$r_2 = \sigma$	30	-54

## 6 局所符号数

Theorem 4.1 の  $\phi^Q$  を用いて種数 3 非超楕円的な族のファイバー芽に対して局所符号数を定義する。 $\Delta$  を 2 次元の向き付けられた閉円板、 $p$  をその中心とする。4 次元多様体  $E$  と、 $C^\infty$  写像  $\pi : E \rightarrow \Delta$  があり、 $\pi$  の  $\Delta \setminus \{p\}$  への制限が種数 3 のコンパクト Riemann 面の可微分族になっていて、各ファイバーに定まる複素構造が非超楕円的なものであるとき、4 つ組  $(E, \pi, \Delta, p)$  を種数 3 非超楕円的な族のファイバー芽と呼ぶことにする。中心ファイバー  $\pi^{-1}(p)$  は必ずしも位相的に退化していてもよい。この様な組  $(E, \pi, \Delta, p)$  と  $(E', \pi', \Delta', p')$  が同値であるとは、 $\Delta, \Delta'$  をともに小さく取り直すと  $(\Delta, p)$  から  $(\Delta', p')$  への向きを保つ微分同相写像  $\varphi$  と  $\pi^{-1}(\Delta)$  から  $\pi'^{-1}(\Delta')$  への向きを保つ微分同相写像  $\bar{\varphi}$  が存在して  $\varphi \circ \pi = \pi' \circ \bar{\varphi}$  が成り立ち、更に  $\bar{\varphi}|_{\pi^{-1}(\Delta \setminus \{p\})} : \pi^{-1}(\Delta \setminus \{p\}) \rightarrow \pi'^{-1}(\Delta' \setminus \{p'\})$  が各ファイバーごとに双正則となっているときを言う。

記号  $\mathcal{NH}_3$  で、組  $\mathcal{F} = (E, \pi, \Delta, p)$  の同値類全体のなす集合を表す。 $\mathcal{F} = (E, \pi, \Delta, p) \in \mathcal{NH}_3$  に対して、 $\gamma$  で、 $\Delta$  の境界を反時計周りに一周するループを表す。 $\pi|_{\Delta \setminus \{p\}}$  は種数 3 非超楕円的な族であるから、Theorem 3.4 により写像  $g : \Delta \setminus \{p\} \rightarrow \mathcal{Q}_{PGL(3)}$  が存在して  $\pi|_{\Delta \setminus \{p\}}$  と  $g^* \mathcal{C}_{PGL(3)}$  はアイソトピックとなる。 $\gamma$  を  $\pi_1(\Delta \setminus \{p\})$  の元と見ることにより、 $g_*([\gamma]) \in \Gamma^Q$  が定まる。

**Definition 6.1** (種数 3 非超楕円的なファイバー芽に対する局所符号数)  $\text{loc.sig}^Q : \mathcal{NH}_3 \rightarrow \mathbb{Q}$  を

$$\text{loc.sig}^Q(\mathcal{F}) = \phi^Q(g_*([\gamma])) + \text{Sign}(E)$$

により定める。

次に一般ファイバーが種数 3 非超楕円的な Riemann 面になっているようなファイバー空間を定義する。

**Definition 6.2**  $E$  および  $B$  をそれぞれ次元が 4 と 2 の  $C^\infty$  級有向閉多様体、 $\pi: E \rightarrow B$  を  $C^\infty$  級写像とする。有限個の点  $b_1, \dots, b_n \in B$  が存在して、 $\pi$  の  $B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$  への制限が種数 3 コンパクト Riemann 面の可微分族になっていて、各ファイバーに定まる複素構造が非超楕円的なものであるとき、 $\pi: E \rightarrow B$  を一般ファイバーが種数 3 非超楕円的なファイバー空間と呼ぶ。

Meyer の符号数公式 [10] を用いて次が示される。

**Theorem 6.3 (符号数の局所化公式)**  $\pi: E \rightarrow B$  を一般ファイバーが種数 3 非超楕円的なファイバー空間、 $\mathcal{F}_j \in \mathcal{NH}_3$  を  $b_j \in B$  に対応するファイバー芽とすると、

$$\text{Sign}(E) = \sum_{j=1}^n \text{loc. sig}^Q(\mathcal{F}_j)$$

**証明:**  $\mathcal{F}_j = (\pi^{-1}(D_j), \pi, D_j, b_j)$  と書いて、 $B_0 = B \setminus \sqcup_{j=1}^n \overset{\circ}{D}_j$  とおく。W.Meyer の符号数公式 ([10], p.244, Satz1) より

$$\text{Sign}(\pi^{-1}(B_0)) = \sum_{j=1}^n \phi^Q(g_{j*}([\gamma_j]))$$

となるので、符号数の Novikov 加法性より、

$$\begin{aligned} \text{Sign}(E) &= \text{Sign}(\pi^{-1}(B_0)) + \sum_{j=1}^n \text{Sign}(\pi^{-1}(D_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \phi^Q(g_{j*}([\gamma_j])) + \sum_{j=1}^n \text{Sign}(\pi^{-1}(D_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \text{loc. sig}^Q(\mathcal{F}_j) \end{aligned}$$

となる。■

**Corollary 6.4**  $B$  を有向閉曲面、 $\pi: E \rightarrow B$  を種数 3 コンパクト Riemann 面の可微分族で、各ファイバーは非超楕円的であるとする。このとき、

$$\text{Sign}(E) = 0$$

## 7 計算例

以下  $\Delta$  は複素平面の原点を中心とする十分小さい閉円板としその座標を  $s$  とする。

1. 特異 4 次曲線全体のなす集合  $D^Q = \mathbb{P} \setminus Q$  はディスクリiminant と呼ばれ、 $\mathbb{P}$  の既約な因子であることが知られている。 $D^Q$  の非特異点のまわりを一周するループ (なげなわ) を  $\sigma^Q$  とする。対応して、 $D^Q$  と一般の位置で横断的に交わる  $\Delta$  からの写像で 4 次曲線族を引き戻して作ったファイバー芽を  $\mathcal{F}_I$  とする。中心ファイバーの位相形は、 $\Sigma_3$  上の非分離単純閉曲線を一点につぶして得られる、Lefschetz の I 型である。 $\pi_1(\overset{\circ}{Q})$  上  $c: \alpha = -5:9$  であることと、 $\sigma \in \pi_1(\overset{\circ}{Q})$  が  $\sigma^Q$  にうつるということから、次が分かる。

**Proposition 7.1**

$$\text{loc.sig}^Q(\mathcal{F}_I) = \phi^Q(\sigma^Q) = -\frac{5}{9}$$

2. 非特異なコニック  $C: yz-x^2=0$  に 8 点で交わるような斉次 4 次式  $F$  をとり、 $(yz-x^2)^2+s^2F(x,y,z)=0$  で定まる  $\Delta \times \mathbb{P}^2$  の曲面を  $S_F$  とする。 $S_F$  は  $C$  上特異点を持つ。 $\Delta \times \mathbb{P}^2$  を  $C$  に沿ってプロウアップして、 $S_F$  の狭義引き戻しを  $\widetilde{S}_F$  とすると、例外因子は、 $C$  に二重被覆を持つ非特異な種数 3 の超楕円曲線となる。 $p_1$  を第一成分への射影とするとファイバー芽  $\mathcal{F}_h = (\widetilde{S}_F, p_1, \Delta, 0)$  ができる。対応して  $Q$  のループ  $l_h$  を  $l_h(t) = (yz-x^2)^2 + (\epsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t})^2 F(x,y,z)$  とおく。

**Proposition 7.2 (超楕円的なファイバー芽の局所符号数)**

$$\text{loc.sig}^Q(\mathcal{F}_h) = \phi^Q([l_h]) = \frac{4}{9}$$

3.  $z^3x+y^2x^2+y^4+s^6x^4=0$  で定まる  $\Delta \times \mathbb{P}^2$  の曲面を  $S$  とする。 $p_1: S \rightarrow \Delta$  について、 $C_2 = p_1^{-1}(0)$  はカusp特異点を 1 つだけもつ。 $S$  の最小特異点解消  $\omega: \widetilde{S} \rightarrow S$  を取ると、例外曲線は自己交叉数  $-1$  の楕円曲線  $C_1$  となる。ファイバー芽  $\mathcal{F}_{II} = (\widetilde{S}, p_1 \circ \omega, \Delta, 0)$  の中心ファイバーの位相形は  $C_1$  の一点と  $C_2$  のカusp特異点を同一視したものになり、Lefschetz の II 型である。対応して  $Q$  のループ  $l_{II}$  を  $l_{II}(t) = z^3x+y^2x^2+y^4 + (\epsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t})^6 x^4$  とおく。

**Proposition 7.3 (II 型ファイバー芽の局所符号数)**

$$\text{loc.sig}^Q(\mathcal{F}_{II}) = \frac{1}{3}, \quad \phi^Q([l_{II}]) = \frac{4}{3}$$

以上の計算結果は、[2][13] にあるものと一致する。

4.  $f(x,y,z), g(x,y,z)$  を 0 でない斉次 4 次式で、その定める 4 次曲線  $C_f, C_g$  が横断的に交わっているものとする。 $f(x,y,z) + sg(x,y,z) = 0$  で定まる  $\Delta \times \mathbb{P}^2$  の曲面を  $S$  とし  $p_1: S \rightarrow \Delta$  とする。ファイバー芽  $\mathcal{F}_f = (S, p_1, \Delta, 0)$  に対応して  $Q$  のループ  $l_f$  を  $l_f(t) = f(x,y,z) + \epsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t} g(x,y,z)$  とおく。

**Proposition 7.4** 上の設定で、 $\pi^{-1}(0)$  の Euler 数を  $\chi$ 、 $\sigma = \text{Sign}(S)$  とおく。このとき、

$$\text{loc.sig}^Q(\mathcal{F}_f) = -\frac{5\chi+20}{9}, \quad \phi^Q([l_f]) = -\frac{5\chi+20}{9} - \sigma$$

**参考文献**

- [1] N.A'Campo, Le groupe de monodromie du dépliement des singularités isolées de courbes planes I, *Math. Ann.* **213** (1975), 1-32.
- [2] T.Ashikaga and K.Konno, Global and local properties of pencils of algebraic curves, *Algebraic Geometry 2000, Azumino, Advanced Studies in Pure Mathematics* **36** (2000), 1-49.
- [3] E.Brieskorn, Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe, *Invent. Math.* **12** (1971), 57-61.
- [4] P.Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisées, *Invent. Math.* **17** (1972), 273-302.

- [5] H.Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, *Math. Ann.***316** (2000),237-257.
- [6] A.Kas and M.Schlessinger, On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity, *Math. Ann.***196** (1972),23-29.
- [7] E.Looijenga, Cohomology of  $\mathcal{M}_3$  and  $\mathcal{M}_3^1$ , *Contemp. Math*, Vol **150**,1993,205-228.
- [8] 松澤淳一, 特異点とルート系, 朝倉書店
- [9] Y.Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two -a topological approach-, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces", World Scientific, Singapore, 1996, 123-148.
- [10] W.Meyer, Die Signatur von Flächenbündeln, *Math. Ann.***201** (1973),239-264.
- [11] T.Morifuji, On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups, *J.Math.Soc.Japan* **55** (2003),117-129.
- [12] D.Mumford, Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves, *Arithmetic and Geometry*, Progress in Math. vol.**36**, Birkhäuser, Boston, 1983, 271-328.
- [13] K.Yoshikawa, A local signature for generic 1-parameter deformation germs of a complex curve, in: *Algebraic Geometry and Topology of Degenerations, Coverings and Singularities* (2000), 188-200 (in Japanese)

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA  
MEGURO-KU TOKYO 153-0041, JAPAN

E-mail address: kunotti@ms.u-tokyo.ac.jp