

## 曲面の貼り合わせに伴う写像類群上の類関数

東京大学大学院数理科学研究科 佐藤 正寿 (Masatoshi Sato)  
Graduate school of Mathematical Sciences,  
the university of Tokyo

### 1 はじめに

曲面を底空間とし、境界の連結成分が 2 つであるコンパクトな曲面をファイバーにもつ 2 つの束について、各ファイバーの境界に沿って貼りあわせた場合の符号数の変化を考える。閉曲面の写像類群上には Meyer コサイクルと呼ばれる 2-コサイクルが知られており、これは曲面上の閉曲面束の符号数を用いて定義される。特に 1 つの曲面束に関して、自明な  $\coprod_{i=1}^2 D^2$  束、自明な  $S^1 \times [0, 1]$  束の貼り付けに伴う符号数の変化を表すコサイクルは、Meyer コサイクルを用いて表すことができるが、これが写像類群上のある類関数により記述されることがわかった。本稿ではこの類関数について述べる。

種数が  $g$  であり、境界の連結成分を  $r$  個もつ向き付けられたコンパクト曲面を  $\Sigma_{g,r}$  と表す。  $\Sigma_g := \Sigma_{g,0}$  と略記する。曲面  $\Sigma_{g,r}$  の写像類群  $\mathcal{M}_{g,r}$  とは、境界上の各点を固定する、向きを保つ微分同相写像全体  $\text{Diff}_+(\Sigma_{g,r}, \partial\Sigma_{g,r})$  のイソトピー類  $\pi_0(\text{Diff}_+(\Sigma_{g,r}, \partial\Sigma_{g,r}))$  のなす群として定義される。

Meyer [5] において、任意の種数  $g \geq 1$  について、Meyer コサイクルとよばれる 2-コサイクル  $\tau_g$  が定義された。第 1.1 節において定義するが、これは曲面上の閉曲面束における符号数を用いて定義される。特に種数 1, 2 においては Meyer コサイクルはコバウンダリに入ることが知られており、そのコバウンドする関数が知られている (Meyer[5], Atiyah[1], Kasagawa[4], Iida[3])。種数が 3 以上においては写像類群上ではこのコサイクルはコバウンドされないが、写像類群への準同型をもつ群  $G$  において、Meyer コサイクルの準同型による引きもどしはコバウンドされることがある。このとき、群  $G$  において Meyer コサイクルの引き戻しをコバウンドする関数を計算することは、符号数との関わりから低次元トポロジーを調べる上で重要である。特にこれは、四次元ファイバー空間における符号数の局所化と呼ばれる現象との関係から広く研究されている。その一例として、群  $G$  として、超楕円的写像類群を考えた場合の Meyer コサイクルの引き戻しをコバウンドする関数が計算されている (Endo[2], Morifuji[6])。

以下では、単位区間を  $I = [0, 1]$  と表す。曲面  $\Sigma_{g,2}$  に 2 つの円板  $D^2$  をはりつける写像  $\Sigma_{g,2} \rightarrow \Sigma_g$ 、曲面  $\Sigma_{g,2}$  にアニュラス  $S^1 \times I$  をはりつける写像  $\Sigma_{g,2} \rightarrow \Sigma_{g+1}$  を考える。これらの写像は写像類群上にそれぞれ準同型

$$\theta : \mathcal{M}_{g,2} \rightarrow \mathcal{M}_g, \quad \eta : \mathcal{M}_{g,2} \rightarrow \mathcal{M}_{g+1}$$

を誘導する。これらの準同型は第 1.2 節で詳しく説明する。これらによる Meyer コサイ

クル  $\tau_g, \tau_{g+1}$  の引きもどしの差は, 写像類群  $\mathcal{M}_{g,2}$  のコバウンダリに入ることが知られている. これをコバウンドする関数を求めることは上記と同様の意味において重要である. この関数は  $\mathbf{Q}P^1$  上のある類関数の符号と呼ぶべきものと一致することがわかるが, 本稿ではこの類関数を写像トーラスの一次ホモロジー群の情報を用いて記述する.

第2節においては類関数  $m$  を構成し, いくつかの性質を述べる. 第3節においては, この関数の符号が Meyer コサイクルの引き戻しの差  $\eta^*\tau_{g+1} - \theta^*\tau_g$  をコバウンドすることを述べる. 我々の構成する類関数  $m$  を用いてこの符号数の差を表すことを考える.

## 1.1 Meyer コサイクル

まず, Meyer コサイクルを定義する.  $i = 1, 2, 3$  について,  $D_i \subset S^2$  を disjoint な円板とする. Pants を  $P = S^2 - \coprod_{i=1}^3 \text{Int } D_i$  として定義し,  $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(P)$  を以下の図 1 で表されるホモトピー類とする. Pants  $P$  上の  $\Sigma_{g,r}$  束  $E_{g,r}^{\varphi,\psi}$  を次のように定義する. 向き付

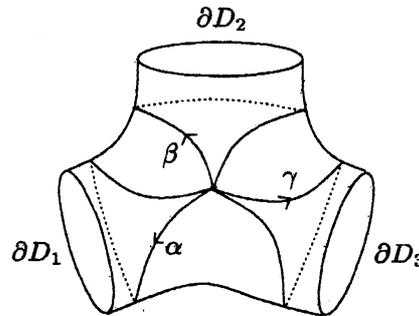


図 1:

けられたコンパクト四次元多様体  $E_{g,r}^{\varphi,\psi}$  を, Pants  $P$  上の  $\Sigma_{g,r}$  束であり,  $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(P)$  に沿うモノドロミーとして,  $\varphi, \psi, (\psi\varphi)^{-1} \in \mathcal{M}_{g,r}$  をもつものとして定義する. このとき, Meyer コサイクルは

$$\begin{aligned} \tau_g: \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g &\rightarrow \mathbf{Z}, \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \text{Sign } E_g^{\varphi,\psi} \end{aligned}$$

として定義される. ただしここで,  $\text{Sign } E_g^{\varphi,\psi}$  は向き付けられたコンパクト四次元多様体  $E_g^{\varphi,\psi}$  の符号数を表す. 特に Powell[7] により  $H_1(\mathcal{M}_{g,r}; \mathbf{Z})$  は  $g \geq 3, r \geq 0$  において自明であることが知られており, 普遍係数定理によって  $\eta^*\tau_{g+1} - \theta^*\tau_g$  をコバウンドする関数は一意であることがわかる.

## 1.2 準同型 $\theta, \eta$

次に準同型  $\theta, \eta$  について述べる. 曲面  $\Sigma_{g,2}$  の境界に沿って, 2 枚の円板を貼り付けることにより, 曲面  $\Sigma_g$  を得る. 微分同相  $h \in \text{Diff}_+(\Sigma_{g,2}, \partial\Sigma_{g,2})$  に対して, 円板上に identity と

して  $h$  を拡張することにより, 曲面  $\Sigma_g$  上の微分同相写像を得る. この写像を  $h \cup id_{\Pi_{i=1}^2 D^2}$  と表す. 同様にアニュラス  $S^1 \times I$  を曲面  $\Sigma_{g,2}$  の境界の二つの連結成分それぞれに沿って貼り合わせることににより, 曲面  $\Sigma_{g+1}$  を得る. 微分同相  $h \in \text{Diff}_+(\Sigma_{g,2}, \partial\Sigma_{g,2})$  に対して, アニュラス上に identity として  $h$  を拡張することによって, 曲面  $\Sigma_{g+1}$  上の微分同相写像を得る. これにより, それぞれ対応する 2 つの写像類群間の準同型

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{M}_{g,2} &\rightarrow \mathcal{M}_g & \eta: \mathcal{M}_{g,2} &\rightarrow \mathcal{M}_{g+1}. \\ [h] &\mapsto [h \cup id_{\Pi_{i=1}^2 D^2}], & [h] &\mapsto [h \cup id_{S^1 \times I}] \end{aligned}$$

を得る. Meyer コサイクル  $\tau_g$  の定義により,  $\eta^* \tau_{g+1}(\varphi, \psi)$ ,  $\theta^* \tau_g(\varphi, \psi)$  は, それぞれコンパクト四次元多様体  $E_{g+1}^{\eta(\varphi), \eta(\psi)}$ ,  $E_g^{\theta(\varphi), \theta(\psi)}$  の符号数に一致することに注意する.

## 2 類関数 $m: \mathcal{M}_{g,2} \rightarrow \mathbf{QP}^1$

この節では, Introduction で述べた写像類群  $\mathcal{M}_{g,2}$  上の  $\mathbf{QP}^1$  に値をもつ類関数を定義する. 特に (コ) ホモロジー群は指定のない限り有理係数とする.

$[p:q], [r:s] \in \mathbf{QP}^1$  に対して,  $\mathbf{QP}^1$  上の加法を

$$[p:q] + [r:s] = \begin{cases} [pr:ps+qr], & \text{if } [p:q] \neq [0:1] \text{ or } [r:s] \neq [0:1] \\ [0:1], & \text{if } [p:q] = [r:s] = [0:1] \end{cases}$$

により定義する. 射影直線  $\mathbf{QP}^1$  はこの加法により零元  $[1:0]$  をもつモノイドをなす.

$\varphi = [h] \in \mathcal{M}_{g,r}$  に対して, 写像トーラスを

$$X_{g,r}^\varphi := \Sigma_{g,r} \times I / \sim, \quad (x, 1) \sim (h(x), 0),$$

により定める. なお, ここで微分同相を除いて  $X_{g,r}^\varphi$  は  $\mathcal{M}_{g,r}$  の代表元  $h$  の取り方によらない. 写像トーラス  $X_{g,r}^\varphi$  について, 直積  $\Sigma_{g,r} \times I$  から自然に定まる向きを定める.  $i_\varphi: \partial X_{g,r}^\varphi \hookrightarrow X_{g,r}^\varphi$  を包含写像とする. 曲面  $\Sigma_{g,2}$  の 2 つの境界の連結成分を  $S_1, S_2$  とする. 向きを保つ微分同相写像  $\iota_1: S^1 \rightarrow S_1$  and  $\iota_2: S^1 \rightarrow S_2$  をとり, 特異コチェイン  $f_k: I \rightarrow (S_1 \amalg S_2) \times S^1 = \partial X_{g,2}^\varphi$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) をそれぞれ

$$f_1(t) = (\iota_1(t), p), \quad f_2(t) = (\iota_2(t), p), \quad f_3(t) = (p_1, t), \quad f_4(t) = (p_2, t),$$

により定める. ここで,  $p_1 \in S_1, p_2 \in S_2, p \in S^1$  とする. このとき,  $f_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) のホモロジー類を  $e_k \in H_1(\partial X_{g,2}^\varphi)$  と表すと,  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  は  $H_1(\partial X_{g,2}^\varphi)$  の基底をなす.

このとき, 準同型  $i_{\varphi*}: H_1(\partial X_{g,2}^\varphi) \rightarrow H_1(X_{g,2}^\varphi)$  の核は  $p, q \in \mathbf{Q}$  を用いて

$$\text{Ker } i_{\varphi*} = \mathbf{Q}(e_1 + e_2) \oplus \mathbf{Q}(p(e_3 - e_4) + qe_1)$$

と記述できることがわかる. 類関数を次のように定義する.

**定義 2.1.**  $\varphi \in \mathcal{M}_{g,2}$  に対し,  $p, q \in \mathbb{Q}$  として,  $\text{Ker } i_{\varphi*} = \mathbb{Q}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{Q}(p(e_3 - e_4) + qe_1)$  を満たすものをとる. このとき類関数  $m$  を

$$\begin{aligned} m: \mathcal{M}_{g,2} &\rightarrow \mathbb{Q}\mathbb{P}^1 \\ \varphi &= [p:q] \end{aligned}$$

により定める.

関数  $m$  は次の性質をもつ. 特に  $m$  は類関数である.

**命題 2.2.**  $g > 0$  とする.  $m$  は全射であり,  $k > 0$ ,  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{g,2}$  に対し,

$$\begin{aligned} m(\psi\varphi\psi^{-1}) &= m(\varphi), \\ m(\varphi^k) &= km(\varphi). \end{aligned}$$

### 3 二つの Meyer コサイクルの引き戻し $\eta^*\tau_{g+1}$ , $\theta^*\tau_g$

#### 3.1 主定理

$g$  を正の整数とする. 第 1.2 節において, 準同型  $\eta: \mathcal{M}_{g,2} \rightarrow \mathcal{M}_{g+1,0}$ ,  $\theta: \mathcal{M}_{g,2} \rightarrow \mathcal{M}_{g,0}$  を, 曲面  $\Sigma_{g,2}$  に対し, アニュラス, 2 枚の円板をそれぞれ貼り合わせるにより誘導される写像として定義した. 主定理を述べるために,  $[p:q] \in \mathbb{Q}\mathbb{P}^1$  の符号を

$$\text{sign}([p:q]) := \begin{cases} 1 & \text{if } pq > 0, \\ 0 & \text{if } pq = 0, \\ -1 & \text{if } pq < 0. \end{cases}$$

により定義する. 主定理は以下のものである.

**定理 3.1.**  $g \geq 1$  とする.

$$\tilde{\phi}_g := \text{sign } m: \mathcal{M}_{g,2} \rightarrow \{\pm 1, 0\}$$

と定めると, 関数  $\tilde{\phi}_g$  は 2 つの Meyer コサイクル  $\eta^*\tau_{g+1}$ ,  $\theta^*\tau_g$  の差をコバウンドする. つまり,  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{g,2}$  に対し,

$$\begin{aligned} (\eta^*\tau_{g+1} - \theta^*\tau_g)(\varphi, \psi) &= \delta\tilde{\phi}_g(\varphi, \psi) \\ &= \text{sign}(m(\varphi)) + \text{sign}(m(\psi)) + \text{sign}(m((\varphi\psi)^{-1})). \end{aligned}$$

上の定理は, Pants 上の  $\Sigma_{g+1}$  束  $E_{g+1}^{\eta(\varphi), \eta(\psi)}$  に対して, その各ファイバー  $\Sigma_{g+1}$  を曲面を分割しない 1 つの単純閉曲線の開管状近傍で切断し, 円板で各ファイバーの境界にふたをし,  $\Sigma_g$  束  $E_g^{\theta(\varphi), \theta(\psi)}$  をつくる際の符号数の変化を, 類関数  $m$  の符号を用いて表すことができるということを意味している. 定理と同様にして, 特に曲面を分割する 1 つの単純閉曲線で各ファイバーを切断すると次が得られる.

**注意 3.2.** Pants 上の  $\Sigma_{g+1}$  束  $E_{g+1}^{\eta(\varphi), \eta(\psi)}$  について, 各ファイバーにおいて曲面を分割する 1 つの単純閉曲線の開管状近傍を取り除き, 二枚の円板を貼り付けることを考える.  $E_{g+1}^{\eta(\varphi), \eta(\psi)}$  の符号数と, この操作でできる二つのコンパクト四次元多様体の符号数の和は一致する.

さらに類関数  $m$  を用いて, 他の曲面束の符号数の差についても次の命題が成り立つ.

**命題 3.3.**  $g \geq 1$  に対して,

$$\begin{aligned} \text{Sign}(E_g^{\theta(\varphi), \theta(\psi)}) - \text{Sign}(E_{g,2}^{\varphi, \psi}) &= -\text{Sign}(m(\varphi) + m(\psi) + m((\varphi\psi)^{-1})) \\ \text{Sign}(E_{g+1}^{\eta(\varphi), \eta(\psi)}) - \text{Sign}(E_{g,2}^{\varphi, \psi}) &= \text{Sign}(m(\varphi)) + \text{Sign}(m(\psi)) + \text{Sign}(m((\varphi\psi)^{-1})) \\ &\quad - \text{Sign}(m(\varphi) + m(\psi) + m((\varphi\psi)^{-1})). \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] M. Atiyah, *The logarithm of the dedekind  $\eta$ -function*, *Mathematische Annalen* **278** (1987), no. 1, 335–380.
- [2] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, *Mathematische Annalen* **316** (2000), no. 2, 237–257.
- [3] S. Iida, *Adiabatic limit of  $\eta$ -invariants and the Meyer function of genus two*, Master's thesis, University of Tokyo, (2005).
- [4] R. Kasagawa, *On a function on the mapping class group of a surface of genus 2*, *Topology and its Applications* **102** (2000), no. 3, 219–237.
- [5] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, *Mathematische Annalen* **201** (1973), no. 3, 239–264.
- [6] T. Morifuji, *On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups*, *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), no. 1, 117–129.
- [7] J. Powell, *Two Theorems on the Mapping Class Group of a Surface*, *Proceedings of the American Mathematical Society* **68** (1978), no. 3, 347–350.