数理解析研究所講究録
第 1575 巻 2008 年 73-87

等変 BORSUK-ULAM 定理とその周辺

京都府立医科大学大学院医学研究科・長崎　生光（Ikumitsu Nagasaki）
Department of Mathematics, Graduate School of Medical Science
Kyoto Prefectural University of Medicine

1. BORSUK-ULAM の定理

本稿では，古典的な Borsuk-Ulam の定理の等変版への一般化とそれに関連するいくつかの結果および未解決問題を述べたい.

古典的な Borsuk-Ulam の定理は次のように述べられる.

定理 1.1 (Borsuk-Ulam の定理 [2]). **(BU1):** 任意の連続写像 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ に対して, $f(-x) = f(x)$ となる点 $x \in S^n$ が存在する.

よく知られているように，Borsuk-Ulam の定理は様々な言い換えができる．変換群論の観点からは次のようないいかえ (BU2)，(BU3) が知られている.

定理 1.2. 位数 2 の巡回群 C_2 は球面およびユークリッド空間上に対心的に作用しているとする．このとき,

(BU2): C_2 写像 $f : S^m \to S^n$ が存在すれば $m \leq n$ である.

(BU3): C_2 写像 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ が存在すれば $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ である.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 55M35, 55M20.
This work was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research, Japan Society for the Promotion of Science.

(BU1)–(BU3) は同値な命題であることは容易に確かめられる．したがって，これらの命題はすべて Borsuk-Ulam の定理と呼ばれている．証明には様々な方法が知られているが，代数トポロジーの手法を用いる証明は，コホモロジー論の一つの応用として (BU2) を示すことが多い．ここでは，May [16] にある証明を紹介する．

はじめに次の補題を準備する．

補題 1.3. C_2 写像 $f : S^m \to S^n$ から誘導される軌道空間（実射影空間）の間の連続写像を $\bar{f} : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ とする．このとき，$m > n$ ならば

$$\bar{f}_* = 0 : \pi_1(\mathbb{R}P^m) \to \pi_1(\mathbb{R}P^n)$$

である．

証明. $n = 1$ のときは，$\bar{f}_* : \pi_1(\mathbb{R}P^m) \cong \mathbb{Z}_2 \to \pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ であるから，$\bar{f}_* = 0$ となる．

次に $n \geq 2$ とする．$u_k \in H^1(\mathbb{R}P^k; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ で生成元を表す．$\bar{f}$ から誘導される 1 次コホモロジーの準同型

$$\bar{f}^* : H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$$

について，$\bar{f}^* = 0$ を示す．もし $\bar{f}^* \neq 0$ とすると $\bar{f}^*(u_n) = u_m$ とならざるを得ない．したがって，$\bar{f}^*(u_n^m) = u_m^m \in H^m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ となるが，$m > n$ より $u_n^m = 0$ となるので $\bar{f}^*(u_n^m) = 0$ である．一方 $u_m^m \neq 0$ であるから，矛盾が生じる．ゆえに，$\bar{f}^* = 0$ である．普遍係数定理と Hurewicz の定理より，$\bar{f}_* = 0$ がいえる． □

(BU2) の証明. $m > n$ とすると，補題 1.3 から，$\bar{f}$ のリフト $g : \mathbb{R}^m \to S^n$ が存在し，$p_n \circ g = \bar{f}$ となる．ここで $p_k : S^k \to \mathbb{R}P^k$ は自然な射影を表す．f と $-f$ および $g \circ p_m$ はともに $\bar{f} \circ p_m$ のリフトであり，$p_n \circ g \circ p_m = p_n \circ f$ となるから，$g \circ p_m(x) = \pm f(x)$ である．リフトの一意性より，$g \circ p_m = f$ または $g \circ p_m = -f$ が成り立つ．しかし，

右辺の f あるいは $-f$ は C_2 同変であるが，$g \circ p_m$ は $g \circ p_m(x) = g \circ p_m(-x)$ であるので C_2 同変でない．これは矛盾である．ゆえに $m \leq n$ である． □

Borsuk-Ulam の定理は数多くの一般化が知られている．そのうちの一つとして次の結果を述べておく．

定理 1.4 (mod p Borsuk-Ulam 定理). C_p は mod p ホモロジー球面 M, N に自由に作用しているとする．C_p 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ である．

証明は，[6], [11] などにある．

注意. この結果は昔からよく知られているが，誰が最初に証明したのかは筆者はよく知らない．

この定理の応用として次の２つの結果を示そう．

系 1.5. G は非自明な有限群とし，M, N はある素数 $p \mid |G|$ について mod p ホモロジー球面とする．G は M, N に自由に作用とする．このとき，G 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ である．

証明. $C_p \leq G$ が存在するので作用を C_p に制限して mod p Borsuk-Ulam 定理を用いればよい． □

系 1.6. M, N は有理ホモロジー球面とする．S^1 は M, N になめらかで不動点自由に作用するとする（$M^{S^1} = N^{S^1} = \emptyset$)．このとき，$S^1$ 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ である．

証明. M, N は有限個の軌道型しかもたないので，ある素数位数の巡回群 $C_p \leq S^1$ が存在して，M, N は $\bmod p$ ホモロジー球面で $M^{C_p} = N^{C_p} = \emptyset$ となる．したがって C_p 作用は自由作用である．作用を C_p に制限して $\bmod p$ Borsuk-Ulam 定理を用いればよい． □

その他の一般化については [1], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14] などを見られたい．[13] には Burnside 環を応用した Borsuk-Ulam の定理の証明がある．また，サーベイとして [22], [23] がある．組み合わせ論の観点からの Borsuk-Ulam の定理と応用に関する教科書に [15] がある．

2. 等変 Borsuk-Ulam 定理

G 空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ が G 等変 *(isovariant)* とは，f が G 同変であり，イソトロピー群を保つとき：$G_{f(x)} = G_x$ $(\forall x \in X)$ をいう．別の述べ方をすると，等変写像とは X の各軌道上では単射となる同変写像のことである．等変写像は G 空間や G 多様体の分類に関して，非常に重要な概念である (cf. [24], [3], [5])．

我々は，Borsuk-Ulam 型定理の観点から，等変写像を考察したい．Borsuk-Ulam の定理の等変版は A. G. Wasserman により研究された. 特に次の結果が $\bmod p$ Borsuk-Ulam 定理の応用として得られる．

定理 2.1 (等変 Borsuk-Ulam 定理). G はコンパクト可解リー群とする． 表現空間 V, W の間に G 等変写像 $f : V \to W$ が存在するならば

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ．

この定理は，表現空間の間の等変写像を扱っているが，表現球面であっても成り立つ．それには次の補題に注意すればよい．

補題 2.2. V, W を表現空間とする．次の (1)–(4) に関して，(1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) が成り立つ．さらに，$\mathrm{Iso}\, SV \subset \mathrm{Iso}\, SW$ をみたすならば，(1) $\Leftrightarrow$ (2) も成り立つ．

(1) 等変写像 $f : SV \to SW$ が存在する．

(2) 等変写像 $f : V \to W$ が存在する．

(3) 等変写像 $f : (V^G)^\perp \to (W^G)^\perp$ が存在する．

(4) 等変写像 $f : S(V^G)^\perp \to S(W^G)^\perp$ が存在する．

ここで，$(V^G)^\perp$ は V^G の直交補空間を表す．

注意. [19] では (1)–(4) は同値であると主張しているが，そのためには条件 $\mathrm{Iso}\, SV \subset \mathrm{Iso}\, SW$ が必要である．実際 $W^G = 0$ なる表現に対し，$V = W \oplus \mathbb{R}$ とおくと，等変写像 $id \oplus 0 : V \to W$ が存在するが，等変写像 $f : SV \to SW$ は存在しない．なぜならば，SV には G 不動点が存在するが SW には存在しない．したがって同変写像すら存在しないからである．なお，[19] の主結果の証明にはこの注意の影響はないことを付言しておく．

さて，Wasserman [25] は非可解群で等変 Borsuk-Ulam 定理が成り立つ群をいくつか見つけているが，反例は未だに見つかっていない．そこで，次のような問題を考えるのは自然である．

問題. 任意のコンパクト・リー群について，等変 Borsuk-Ulam 定理が成り立つか？

この問いは未解決であるが，先にも述べたように Wasserman は有限群がある種の条件をみたせば等変 Borsuk-Ulam 定理が成り立つことを示している．たとえば，交代群 $A_5, \ldots, A_{11}$ がその例である．しかし，A_n $(n \geq 12)$ では不明である．

上の問題の特別な場合として

問題. A_n $(n \geq 12)$ について，等変 Borsuk-Ulam 定理が成り立つか？

また，有限群でないコンパクト・リー群でもほとんどわかっていない．$SO(3)$, $SU(2)$ ですら未解決である．これらの群は表現自体は非常によくわかっているが，表現空間自体の軌道構造が複雑であることから，その間の等変写像となるとよくわからないというのが現状である．

問題. $SO(3)$, $SU(2)$ について，等変 Borsuk-Ulam 定理が成り立つか？

Wasseman は等変 Boruk-Ulam 定理が成り立つ群を **Borsuk-Ulam** 群（BUG）と名付けた．BUG に関しては，次の性質が容易に示される．

補題 2.3. G はコンパクト・リー群とし，部分群とは閉部分群を意味する．

(1) G が BUG で H が正規部分群ならば商群 G/H も BUG である．

(2) G/H, H が BUG ならば G も BUG である．

この補題により有限群については，単純群について調べればよいことになる．

問題. G が BUG なら任意の部分群 H も BUG か？

なお，$SO(3)$, $SU(2)$ の任意の真部分群は BUG であることを付け加えておく．

Wasserman の結果以外には [17] の弱等変 Borsuk-Ulam 定理が知られている．

定理 2.4 ([17]). 任意のコンパクト・リー群 G に対して，無限大に発散する広義単調増加関数 $\varphi_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，次が成り立つ：

等変写像 $f : V \to W$ が存在すれば，

$$\varphi(\dim V - \dim V^G) \leq \dim W - \dim W^G$$

である．

注意. $G = SO(3)$ のときは, $\varphi(x) = x/2$ ととれることがわかるが, 他の群で φ の具体的な形はほとんど調べられていない. もちろん, $\varphi(x) = x$ ととれると等変 Borusk-Ulam 定理が成り立つことになる.

問題. φ を評価せよ.

3. 等変 Borsuk-Ulam 型定理とその逆

この節では, G は有限群とする. G 空間 X の特異集合 $X^{>1}$ は

$$X^{>1} = \bigcup_{1 \neq H \leq G} X^H$$

で定義される.

mod p Boruk-Ulam 定理の応用として次の結果が示される.

定理 3.1 ([20]). W は G 表現とする. M を G が自由に作用する mod $|G|$ ホモロジー球面とする. 等変写像 $f : M \to SW$ が存在するならば Borsuk-Ulam 型不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ. ここで, $SW^{>1} = \emptyset$ の場合は $\dim SW^{>1} = -1$ と定める.

さらにこの定理の逆も成り立つ.

定理 3.2 ([20]). 上と同じ条件の下で Borsuk-Ulam 型不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つとき, 等変写像 $f : M \to SW$ が存在する.

この結果は同変障害理論から示されるがその際にキーとなる事実は以下のことである.

$$SW_{\mathrm{free}} = SW \setminus SW^{>1}$$

とおき,

$$d = \dim SW - \dim SW^{>1}$$

とおく.

- 等変写像 $f : M \to SW$ の存在性は同変写像 $f : M \to SW_{\mathrm{free}}$ の存在性と同値である.
- SW_{free} は $(d-2)$ 連結である.

以上の結果からわかるように, 等変 Borsuk-Ulam 型定理は等変写像の非存在性に関する定理, その逆は存在性に関する定理と解釈出来る.

4. 等変ホモトピー類の分類

等変写像の存在がいえるとき, どのくらいたくさん存在するという問題は自然な問いであろう. ここでは, 等変ホモトピー類の分類問題を考えたい. 同変ホモトピーが等変であるとき, 等変ホモトピーという. $[X,Y]_G^{\mathrm{isov}}$ を等変写像 $f : X \to Y$ の等変ホモトピー類全体の集合（等変ホモトピー集合）とする.

問題. $[X,Y]_G^{\mathrm{isov}}$ を決定せよ.

一般には, この問題は同変写像の場合と同様に非常に難しい問題である. そこで我々は次の設定で分類問題を考察したい.

- G は有限群.
- $X = M$ は有向連結閉 G-C^∞ 多様体
- M 上の G 作用は自由であり, かつ向きを保つ.
- $Y = SW$ とする. ただし, W はユニタリー G 表.
- さらに Borsuk-Ulam 型不等式

$$\dim M + 1 \le \dim SW - \dim SW^{>1}$$

を仮定する.

注意. 先に見たように, M が mod $|G|$ ホモロジー球面ならば等変写像の存在生から Boruk-Ulam 型不等式が成り立つが, 一般の M では成り立たない. 実際, M を 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ とし, $SW = S^1$ とする. 両空間には S^1 が自然に自由に作用し, 第一成分への射影 $p_1 : T^2 \to S^1$ は等変写像である. この場合は Borsuk-Ulam 型不等式は成り立っていない.

4.1. Case 1: $\dim M + 1 < d := \dim SW - \dim SW^{>1}$ **のとき.** この場合の結果は次である.

定理 4.1. $[M, SW]_G^{\mathrm{isov}} = \{*\}$ (一点集合). つまり, 全ての等変写像は互いに等変ホモトピックである.

証明. 任意の 2 つの G 写像 $f, g : M \to SW_{\mathrm{free}}$ が G ホモトピックであることを示せばよい.

$\dim M + 1 \le d - 1$ and SW_{free} は $(d-2)$ 連結であるので, G 写像 $F_0 := f \coprod g : M \times \{0, 1\} \to SW_{\mathrm{free}}$ は $F : M \times I \to SW_{\mathrm{free}}$ に拡張できる. □

4.2. Case 2: $\dim M + 1 = d$ **のとき.** $[M, SW]_G^{\mathrm{isov}}$ を記述するために, 多重写像度を導入する.

$$\mathcal{A} = \{H \in \mathrm{Iso}\, W \mid \dim SW^H = \dim SW^{>1}\}$$

とおく. ここで $\mathrm{Iso}\, W$ は W のイソトロピー群全体の集合である.

$\mathcal{A}/G$ は $\mathcal{A}$ に属する部分群の共役類全体の集合, i.e.,

$$\mathcal{A}/G = \{(H) \mid H \in \mathcal{A}\}$$

とおく.

始めに, 次のことに注意する.

補題 4.2. G 同型

$$\Psi : H^{d-1}(SW_{\mathrm{free}};\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]$$

が存在する．ここで NH は H の G における正規化群である．

$\mathbb{Z}[G/NH]^G = \mathbb{Z}\cdot N_H$，$N_H \sum_{a\in G/NH} a$, に注意すると同型

$$c : \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]^G \to \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$$

が存在する．したがって同型

$$\Phi = c\circ\Psi^G : H^{d-1}(SW_{\mathrm{free}};\mathbb{Z})^G \to \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$$

を得る．次に，以下のことも注意しておく．

補題 4.3. 自然な写像 $i : [M, SW]_G^{\mathrm{isov}} \to [M, SW_{\mathrm{free}}]_G$ は全単射である．

このことにより，$[M, SW]_G^{\mathrm{isov}}$ は同変ホモトピー集合 $[M, SW_{\mathrm{free}}]_G$ と同一視できる．

さて，$f : M \to SW$ は等変写像とすると，f は G 準同型

$$f_* : H_{d-1}(M;\mathbb{Z}) \to H_{d-1}(SW_{\mathrm{free}};\mathbb{Z})$$

を誘導する．M 上の G 作用は向きを保つから，誘導される $H_{d-1}(M;\mathbb{Z})$ 上の作用は自明である．したがって $f_*([M]) \in H_{d-1}(SW_{\mathrm{free}};\mathbb{Z})^G$ である．ここで $[M]$ は M の基本類である．

定義 (多重写像度)**.** f の多重写像度 $\mathrm{mDeg}\, f$ を

$$\mathrm{mDeg}\, f = \Phi(f_*([M])) \in \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$$

で定義する．

定義から容易に次がわかる．

命題 4.4. 多重写像度は等変ホモトピー不変量である.

前述の設定のもとで以下が成り立つ.

定理 4.5 (等変 Hopf 型定理).

(1) $\mathrm{mDeg} : [M, SW]_G^{\mathrm{isov}} \to \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$ は単射,

(2) 任意の 2 つの等変写像 $f, g : M \to SW$ について

$$\mathrm{mDeg}\, f - \mathrm{mDeg}\, g \in \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} |NH|\mathbb{Z}$$

である.

(3) 等変写像 $f_0 : M \to SW$ を固定する. 任意の元 $a \in \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} |NH|\mathbb{Z}$ に対して, 等変写像 $f : M \to SW$ が存在して,

$$\mathrm{mDeg}\, f - \mathrm{mDeg}\, f_0 = a$$

が成り立つ.

$d_H(f) \in \mathbb{Z}$ は $\mathrm{mDeg}\, f$ の (H) 成分を表すとする.

$$\mathrm{mD}_{f_0}(f) = ((d_H(f) - d_H(f_0))/|NH|)_{(H)\in\mathcal{A}/G} \in \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$$

とおく. このとき, 等変 Hopf 型定理より次の系が成り立つ.

系 4.6 (分類定理). 対応 $\mathrm{mD}_{f_0} : [M, SW]_G^{\mathrm{isov}} \to \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$ は全単射である.

5. 証明の概略

等変 Hopf 型定理の証明の概略を以下で述べる. 詳しくは [21] で述べる予定である.

5.1. 同変複体のコホモロジー．tom Dieck のテキスト [4] から同変障害理論で使われる同変コホモロジー（Bredon コホモロジーの特別な場合）を復習しておく．X を有限 G-CW 複体，A をその G 不変な部分複体とする．G は $X \setminus A$ 上に自由に作用しているとする．また，X_n は (X, A) の n 骨格，$C_n(X, A) := H_n(X_n, X_{n-1}; \mathbb{Z})$，$\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$:は境界準同型とする．

X 上の作用から誘導される作用で $C_n(X, A)$ は $\mathbb{Z}G$ 加群であり，∂ は $\mathbb{Z}G$ 準同型となる．

π を任意の $\mathbb{Z}G$ 加群とする．同変コチェイン複体を

$$C_G^*(X, A; \pi) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, A); \pi),\ \delta := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial)$$

とおく．

定義．

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi) := H^*(C_G^*(X, A; \pi), \delta)$$

注意．$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi) \cong H^*(X/G, X/A; \{\pi\})$ (with local coefficients).

定理は以下の補題たちから証明される．

補題 5.1.

$$\varepsilon : \mathfrak{H}_G^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}})) \to H^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}}))$$

は忘却準同型で

$$\tau : H^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}})) \to \mathfrak{H}_G^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}}))$$

はトランスファー準同型（ノルム準同型）とする．

このとき次が成り立つ．

(1) $\tau \circ \varepsilon = |G|$.

(2) τ は全射.

(3) ε は単射.

補題 5.2. 次の G 同型あるいは同型が成り立つ.

(1) $\pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}}) \cong_G \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]$.

(2) $H^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}})) \cong_G \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]$.

(3) $\mathfrak{H}_G^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}})) \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]^G \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$.

(4) $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\varepsilon\circ\tau \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} |NH|\mathbb{Z}$.

補題 5.3. $f, g : M \to SW$ は G 等変写像とする. f, g が（同変）ホモトピックであるための同変障害類 $\gamma_G(f,g)$ と（非同変）障害類 $\gamma(f,g)$ が存在する.

さらに, 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
[M, SW]_G^{\mathrm{isov}} & \xrightarrow[\cong]{\gamma_G} & \mathfrak{H}_G^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}})) \\
{\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\
[M, SW_{\mathrm{free}}] & \xrightarrow[\cong]{\gamma} & H^{d-1}(M; \pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}})).
\end{array}$$

水平の写像は対応 $[f] \mapsto \gamma_G(f, f_0)$ と $[f] \mapsto \gamma(f, f_0)$ で定義される全単射である. ここで f_0 は固定された等変写像である.

補題 5.4. 多重写像度はコホモロジーで記述でき, 特に

$$\mathrm{mDeg}\, f - \mathrm{mDeg}\, g = \Phi(h(\langle\gamma(f,g), [M]\rangle))$$

である. ここで h は Hurewicz 準同型である.

たとえば等変 Hopf 型定理の (1) は次のように示される.

$\mathrm{mDeg}\, f = \mathrm{mDeg}\, g$ ならば補題5.4 により $\gamma(f,g) = 0$ である. $\varepsilon(\gamma_G(f,g)) = \gamma(f,g)$ かつ ε は単射であるので, $\gamma_G(f,g) = 0$ がいえる,

したがって f と g は等変ホモトピックである. つまり mDeg は単射である.

他の主張も補題5.2 (2), 5.3および5.4から容易に帰結される. □

REFERENCES

[1] T. Bartsch, *On the existence of Borsuk-Ulam theorems*, Topology **31** (1992), 533–543.

[2] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math, **20** (1933), 177–190.

[3] W. Browder and F. Quinn, *A surgery theory for G-manifolds and stratified sets*, Manifolds—Tokyo 1973, 27–36, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975.

[4] T. tom Dieck: Transformation groups, Walte de Gruyter & Co, Berlin, New York 1987.

[5] W. Lück, *Transformation groups and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1408, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] A. Dold, *Simple proofs of some Borsuk-Ulam results*, Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982), 65–69, Contemp. Math., 19.

[7] E. Fadell and S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bougin–Yang theorems*, Ergodic Theory Dynamical System **8** (1988), 73–85.

[8] Y. Hara, *The degree of equivariant maps*, Topology Appl. **148** (2005), 113-121.

[9] A. Inoue, *Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds* Osaka J. Math. **43** (2006), 183-191.

[10] J. Jaworowski, *Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **32** (1989), 271-279.

[11] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a Z_q-map from a Z_q-space to* S^{2n+1}, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 714-716.

[12] K. Komiya, *Equivariant K-theoretic Euler classes and maps of representation spheres*, Osaka J. Math. **38** (2001), 239-249.

[13] E. Laitinen, *Unstable homotopy theory of homotopy representations*, Transformation groups, Poznań 1985, 210–248, Lecture Notes in Math., **1217**, Springer, Berlin, 1986,

[14] W. Marzantowicz, *Borsuk-Ulam theorem for any compact Lie group*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **49** (1994),195-208.

[15] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Universitext, Springer, 2003.

[16] J. P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Univ. of Chicago Press, 1999.

[17] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, Arch. Math. **81** (2003), 348-359.

[18] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743-757.

[19] I. Nagasaki, *The converse of isovariant Borsuk-Ulam results for some abelian groups*, Osaka. J. Math. **43** (2006), 689-710.

[20] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free C_n-manifolds to representation spheres*, preprint.

[21] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Classification of isovariant maps from free G-manifolds to representation spheres*, in preparation.

[22] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey*, Topological methods in nonlinear analysis, 166–235, Montreal, 1985.

[23] H. Steinlein, *Spheres and symmetry: Borsuk's antipodal theorem*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 15–33.

[24] R. S. Palais: *Classification of G-spaces*, Mem. Am. Math. Soc. 36 (1960).

[25] A. G. Wasserman: *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161.

E-mail address: `nagasaki@koto.kpu-m.ac.jp`