

Josephson 接合キュビット系の Birkhoff-Gustavson 標準化と分岐問題¹

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 複雑系科学科²
上野 嘉夫 (Yoshio Uwano), 奥 佑子 (Yuko Oku)
Department of Complex Systems, Future University-Hakodate

概要

Birkhoff-Gustavson(BG) 標準化は, 非線形 Hamilton 系の有用な解析手段として知られているが, その応用は具体的な非線形 Hamilton 系の解析よりは, (Hamilton 方程式に関する) 微分方程式論を対象とする場合が多い傾向にある. 本稿では, 量子計算素子の有力な候補である Josephson 接合キュビット系が BG 標準化適用可能な具体系であることを示し, この系に BG 標準化を適用して周期軌道の分岐解析を行う. 調和振動子解の「生き残り」として存在する周期軌道に関する分岐は量子レベルにおける不安定さをもたらすと考えられるが, この種に分岐が発生しないことを本稿の解析で確認する.

§1 はじめに

Birkhoff-Gustavson(BG) 標準化は, 非線形 Hamilton 系の半単純安定平衡点近傍の正則領域³を記述するのに有効な手法として知られている [1]. 以下, 本稿では, 原点を 1:1 共鳴安定平衡点として許容する 2 自由度系に対象を制限する.

D を $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ の原点を含む領域とし, デカルト座標 (q, p) ($q, p \in \mathbb{R}^2$) を, $D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の正準共役なデカルト座標とする. D 上の C^∞ 関数 $H(q, p)$ を Hamiltonian とする Hamilton 系の r 次までの Birkhoff-Gustavson 標準化とは以下の (i) と (ii) を満たすような局所正準変換, $\tau: (q, p) \rightarrow (\xi, \eta)$, をいう [1].

- (i) 原点 $(0, 0)$ は原点 $(0, 0)$ に移される: $\tau(0, 0) = (0, 0)$.
- (ii) 変換 τ より $(H^{NF} \circ \tau)(q, p) = H(q, p)$ で得られる Hamiltonian $H^{NF}(\xi, \eta)$ は

$$H^{NF}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\eta_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{k=3}^r N_k(\xi, \eta) + o_r(\xi, \eta) \quad (1)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\eta_j^2 + \xi_j^2), N_k(\xi, \eta) \right\} = 0 \quad (k = 3, \dots, r) \quad (2)$$

という形である. ただし, $N_k(\xi, \eta)$ は (ξ, η) の斉 k 次多項式, $\{\cdot, \cdot\}$ は

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial F_2}{\partial \eta_j} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta_j} \frac{\partial F_2}{\partial \xi_j} \right) \quad (3)$$

で定まる正準座標系 (ξ, η) に関する Poisson 括弧式を表わしている.

¹本稿は, 数理解析研究所共同研究集会「力学系と微分幾何学」(2007 年 9 月 12 日-14 日)での講演「Josephson 接合キュビット系の Birkhoff-Gustavson 標準化逆問題」を基にした, その後の進展の報告である.

²041-8655 函館市亀田中野町 116-2

³正則 (非カオスの) 運動が支配的な部分という意味で用いられる.

式(1)で与えられた $H^{NF}(\xi, \eta)$ から高次項 o_r を切り落として得られる r 次多項式を Hamiltonian とする系は, (H を Hamiltonian とする) もとの系の「打ち切り系」と呼ばれる [1, 2]. 打ち切り系は, 平衡点まわりの正則領域の相図をよく近似することが知られている. 例えば, 調和振動子軌道の「生き残り」として得られる周期軌道に関して, 次の結果が知られている.

定理 1.1 (Kummer [2]) 1:1 共鳴安定平衡点を原点に持つ非線形 Hamilton 系の十分低い値の等エネルギー多様体上を流れる非退化軌道安定性を持つ周期軌道の十分近くには, 打ち切り系の十分低い値の等エネルギー多様体上を流れる周期軌道が唯一存在する. 対応する打ち切り系の周期軌道の軌道安定特性は, 与えられた Hamilton 系の周期軌道のそれと一致する.

BG 標準化は, 上記の Kummer による定理や, それ以前の Moser による講義録 [1] で述べられているように, 非線形 Hamilton 系の (低エネルギー) 正則領域の相図の良い近似を与える. しかしながら筆者達の調べた範囲では, 具体的な力学系への応用は意外に少なく, むしろ非線形 Hamilton 系に関する微分方程式論の観点からの研究⁴ に応用が見出されているように見える.

本稿では, 量子計算素子の有力候補である Josephson 接合キュビット (JJQ) 系が, BG 標準化が適用可能な物理的具体的系であることを示し, JJQ 系では (低エネルギー領域において) 周期軌道分岐が発生しないことを BG 標準化を適用して確かめる. 周期軌道分岐は量子レベルにおける不安定性と見なせる意味で, 今回の結果は有用と思われる. 以下, 本稿の構成を説明する.

2章では Josephson 接合キュビット系を導入し, 3章での解析に必要な準備を行う. Josephson 接合素子に関する概説 [3, 4] に続き, 4個の Josephson 接合素子の連結回路である Josephson 接合キュビット (JJQ) 系を Yukon の論文 [5] に従って導入する. JJQ 系は, 4個の単振子からなる連成系にある制約⁵ を課して得られる 2 自由度 Hamilton 系であり, 相空間の原点は構成素子のパラメータにある条件を課すことで 1:1 安定共鳴平衡点となる. 3章では, JJQ 系の BG 標準化を行い, 4次の打ち切り系における周期軌道分岐の解析を行う. 打ち切り系において周期軌道分岐が発生しないことと, Kummer による定理 1.1 [2] により JJQ 系の低エネルギー領域においては周期軌道分岐が発生しないことが確認される. 4章では結論と今後の展開について述べる. また, 今回発生が無いことを確かめた周期軌道分岐は量子レベルにおいてある種の不安定性とみなせる点についても, 筆者のひとりである上野の結果に基づいて触れる.

§2 Josephson 接合キュビット系

Josephson 接合キュビット系とは, Josephson 接合素子を 4 個接続して得られる回路で, 量子計算における情報表現単位であるキュビット素子を実現する有力候補のひとつである.

2.1 Josephson 接合素子

Josephson 接合素子とは, 図 1 に示されるような, 2つの超伝導体が薄い絶縁体を中間に挟んで接合された素子である. 図 1 においては, 紙面の裏側から表側に向いた総磁束 Φ の一様磁場が素子にかかっている. 古典力学的には絶縁体を電子が通過することは不可能であるが, 量子力学ではトンネル効果によって絶縁体 1 (あるいは 2) の波動関数が絶縁体 2 (あるいは 1) の領域に「滲みだす」ことが可能である. Josephson 効果とは巨視的な波動関数でのトンネル効果により電流 I が流れる現象である. Josephson 接合素子の挙動は, 以下のように Hamilton 系

⁴そこでは, 共鳴条件を外した Birkhoff 標準形が対象となる場合が多い.

⁵回路接続から派生する制約.

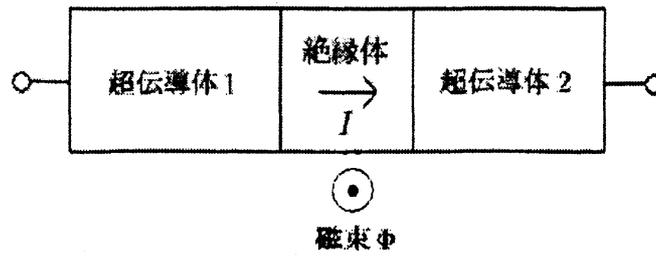


図 1: Josephson 接合素子の概念図

として記述できる。超伝導体 j ($j = 1, 2$) における自由電子対の波動関数の位相を θ_j で表わし、その位相差を θ で表わす。すなわち

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (4)$$

とする。Josephson 効果によって超伝導体 1 から超伝導体 2 へ向けて絶縁体を流れる電流 I は、位相差 θ の関数

$$I(\theta) = I_C \sin \theta \quad (5)$$

で表される。ここで、 I_C は臨界電流と呼ばれる定数で、

$$I_C = I_C^0 \left| \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{(\pi \Phi / \Phi_0)} \right| \quad (6)$$

で与えられる。 Φ_0 は磁束量子の値、 $\hbar/2e$ を表わし、 I_C^0 は一様磁場をかけない素子の臨界電流値である。また、位相差 θ と素子を貫く磁束 Φ とは

$$\theta = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^{-1} \Phi = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e}) \quad (7)$$

という関係で結ばれている [3, 4].

位相差 θ の時間変化を記述するために、Josephson 接合の等価回路モデルを考えよう。電子対のトンネル効果以外の電流はないものと仮定すると、等価回路モデルは、図 2 のようになる。Kirchhoff の法則から関係式

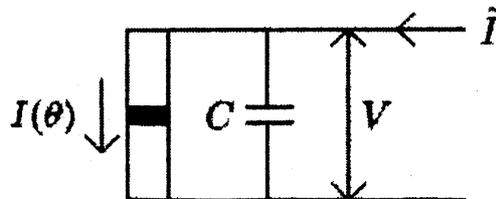


図 2: Josephson 素子の等価回路

$$\tilde{I} = C \frac{dV}{dt} + I(\theta) = C \frac{dV}{dt} + I_C \sin \theta \quad (8)$$

が得られる。ここで、(5)と対をなす Josephson 接合の基本方程式

$$2eV = \hbar \frac{d\theta}{dt} \quad (9)$$

を考慮すると、 θ に対する 2 階の常微分方程式

$$\tilde{I} = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\theta}{dt^2} + I_C \sin \theta \quad (10)$$

が得られる。(10)は、外部からの駆動トルクがちょうど \tilde{I} であるような、振子の運動方程式と同じである。以後、本稿では外部駆動電流 \tilde{I} が 0 の場合、すなわち常微分方程式

$$C \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} I_C \sin \theta = 0 \quad (11)$$

に従う Josephson 接合素子を考えることにする。式(11)は、

$$p_\theta = C \left(\frac{\hbar}{2e}\right) \frac{d\theta}{dt} \quad (12)$$

によって変数 p_θ を導入することで、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{C} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -I_C \sin \theta \quad (13)$$

という連立 1 階常微分方程式の形式に書き換えられる。式(13)は (θ, p_θ) を正準変数とし、

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2C} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} p_\theta^2 - I_C \cos \theta \quad (14)$$

を Hamiltonian とする Hamilton 方程式で、Yukon が [5] で与えた Hamilton 形式と同等である。

2.2 Josephson 接合キュビット系

前節で導入した Josephson 接合素子 4 個を図 3 のように配線したものを、Yukon [5] に従って Josephson 接合キュビット系と呼ぶ。以下、Josephson 接合キュビット (JJQ) 系の Hamilton 形式による記述を与える。回路接続による制約条件を考慮しないならば、JJQ 系の Hamiltonian は (14) で与えた形の 4 個の Hamiltonian の和

$$\mathcal{H}_Q(\theta, p_\theta) = \sum_{k=1}^4 \left[\frac{1}{2C_k} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} p_{\theta,k}^2 - I_k \cos(\theta_k) \right] \quad (15)$$

で表される。 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$ は、4 個の接合素子 J_k ($k = 1, 2, 3, 4$) における位相差を表す変数で、 $p_\theta = (p_{\theta,1}, p_{\theta,2}, p_{\theta,3}, p_{\theta,4})^T$ は、 θ に正準共役な運動変数である。また、 C_k, I_k は、それぞれ接合素子 J_k のキャパシタンスと臨界電流値である ($k = 1, 2, 3, 4$)。

図 3 に示されている接合素子間の接続による、独立変数の低減を実行する。左側のループを紙面の裏から表へ貫く磁束を $\Phi_{a,1}$ 、右側のループを紙面の裏から表へ貫く貫く磁束を $\Phi_{a,2}$ とすると、 θ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) の間には、

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_{a,1}, \quad -\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_{a,2} \quad (16)$$

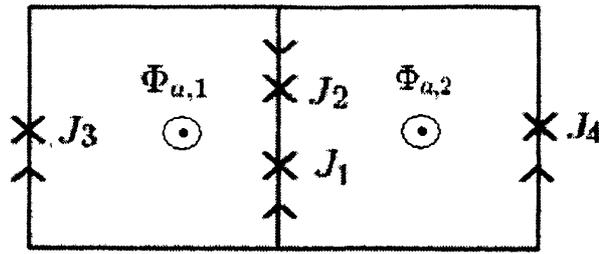


図 3: Josephson 接合キュビット系の回路図

という制約が付加される. この制約は, (7) を各 Josephson 接合素子 J_k ($k = 1, 2, 3, 4$) に適用して得られる関係

$$\theta_k = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (17)$$

から得られる. 磁束 $\Phi_{a,1}$ と $\Phi_{a,2}$ が一定とすると, (16) から

$$p_{\theta,1} - p_{\theta,2} - p_{\theta,3} = 0, \quad -p_{\theta,1} + p_{\theta,2} + p_{\theta,4} = 0 \quad (18)$$

という, 変数 $p_{\theta,k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) の間に制約が導出される. (16) と (18) より, Josephson 接合キュビット系は 2 自由度 (4 変数) ハミルトン系になる. その 4 変数を

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad p_{\psi,1} = \frac{1}{2}(p_{\theta,1} + p_{\theta,2}), \quad p_{\psi,2} = \frac{1}{2}(p_{\theta,1} - p_{\theta,2}) \quad (19)$$

で導入し, 諸定数を

$$\tilde{C}_k = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \frac{1}{C_k}, \quad \tilde{I}_k = I_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

$$\tilde{\Phi}_{a,j} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_{a,j} \quad (j = 1, 2) \quad (21)$$

で表わすとき, JJQ 系の Hamiltonian は,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_Q(\psi, p_\psi) = & \frac{1}{2} \left[(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) p_{\psi,1}^2 + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_3 + 4\tilde{C}_4) p_{\psi,2}^2 \right] \\ & - \tilde{I}_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) - \tilde{I}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \\ & - \tilde{I}_3 \cos(2\psi_2 - \tilde{\Phi}_{a,1}) - \tilde{I}_4 \cos(2\psi_1 + \tilde{\Phi}_{a,2}) \end{aligned} \quad (22)$$

となる.

2.3 原点 (平衡点) 周りでの Hamiltonian の展開近似

JJQ 系に関する定数 ((20), (21) 参照) の間に

$$-\tilde{I}_3 \sin \tilde{\Phi}_{a,1} + \tilde{I}_4 \sin \tilde{\Phi}_{a,2} = 0 \quad (23)$$

が成立していると仮定すると，原点 $(\psi, p_\psi) = (0, 0)$ が JJQ 系の平衡点になることが容易に確認できる．原点周りで Hamiltonian $\mathcal{H}_Q(\psi, p_\psi)$ を展開したときの 4 次以下の部分は，

$$\begin{aligned}
H_Q(\psi, p_\psi) &= \frac{1}{2} \left[(\bar{C}_1 + \bar{C}_2) p_{\psi,1}^2 + (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 4\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4) p_{\psi,2}^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \psi_1^2 + (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \psi_1 \psi_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 4\bar{I}_3 \cos \bar{\Phi}_{a,1} + 4\bar{I}_4 \cos \bar{\Phi}_{a,2}) \psi_2^2 \\
&\quad - \frac{1}{24} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \psi_1^4 - \frac{1}{6} (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \psi_1^3 \psi_2 - \frac{1}{4} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \psi_1^2 \psi_2^2 \\
&\quad - \frac{1}{6} (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \psi_1 \psi_2^3 - \frac{1}{24} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 16\bar{I}_3 \cos \bar{\Phi}_{a,1} + 16\bar{I}_4 \cos \bar{\Phi}_{a,2}) \psi_2^4
\end{aligned} \tag{24}$$

となる．仮定 (23) に，

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 \tag{25}$$

$$\bar{I}_3 \cos \bar{\Phi}_{a,1} + \bar{I}_4 \cos \bar{\Phi}_{a,2} = -\frac{(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)(\bar{C}_3 + \bar{C}_4)}{(\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 4\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4)} \tag{26}$$

という仮定を追加すると，正準変換 $(\psi, p_\psi) \rightarrow (Q, P)$ を

$$Q_j = \Omega^{1/2} \omega_j^{-1} \psi_j, \quad P_j = \Omega^{-1/2} \omega_j p_{\psi,j} \quad (j = 1, 2) \tag{27}$$

および定数 $\Omega, \omega_1, \omega_2$ を

$$\Omega = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)^{1/2} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)^{1/2}, \quad \omega_1 = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 4\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4)^{1/2} \tag{28}$$

によって定めるとき， $H_Q(\psi, p_\psi)$ から

$$K(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (P_j^2 + Q_j^2) + f_1 Q_1^4 + f_2 Q_1^2 Q_2^2 + f_3 Q_2^4 = \frac{1}{\Omega} H_Q(\psi, p_\psi) \tag{29}$$

という形の，斉 4 次多項式ポテンシャルが印加された 1:1 共鳴摂動調和振動子 Hamiltonian が得られる．ただし， f_h ($h = 1, 2, 3$) は，

$$f_1 = -\frac{1}{24} \left(\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{\bar{I}_1 + \bar{I}_2} \right)^{1/2} \tag{30}$$

$$f_2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{\bar{I}_1 + \bar{I}_2} \right)^{1/2} \frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 4\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} \tag{31}$$

$$f_3 = -\frac{1}{24} \left(\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{\bar{I}_1 + \bar{I}_2} \right)^{1/2} \frac{(\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + 4\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4)(\bar{C}_1 + \bar{C}_2 - 12\bar{C}_3 - 12\bar{C}_4)}{(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)^2} \tag{32}$$

で定まる定数である．以下の章では， $K(Q, P)$ を JJQ 系の Hamiltonian と呼ぶことにする．

注意 2.1 $K(Q, P)$ を得るに際して，本稿で設定した 3 つの仮定，(23)，(25)，(26)，は，Yukon が [5] にて設定した仮定を弱めたものとなっている．

注意 2.2 仮定 (25) と (26) の追加は, 原点 (平衡点) に関する 1:1 共鳴条件と同値である. 今後はこの仮定を課さない方向での解析も必要と思われる.

§3 周期軌道分岐解析

本章では, 前章で得られた Josephson 接合キュビット (JJQ) 系の平衡点まわりで 4 次まで展開近似された Hamiltonian $K(Q, P)$ を Birkhoff-Gustavson (BG) 標準化し, BG 標準化系の周期軌道解析と Kummer の結果 (定理 1.1) を用いて JJQ 系の周期軌道分岐が発生しないことを示す.

3.1 $K(Q, P)$ の BG 標準化

BG 標準化の処方箋はすでに確立したものであり (例えば, [1] 参照), 標準化に用いる正準変換母関数に予め弱い制約を課しておけば, 与えられた Hamiltonian の BG 標準形は一意的に定まる⁶ [6]. 本稿では, BG 標準化のための変換の詳細は割愛し, JJQ 系の Hamiltonian $K(Q, P)$ に対する 4 次までの BG 標準形 $G(\xi, \eta)$ を紹介する. BG 標準化 (およびその逆問題) では数式処理の活用が極めて有効であり⁷, $G(\xi, \eta)$ は

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\zeta_1 \bar{\zeta}_1 + \zeta_2 \bar{\zeta}_2) + \frac{3}{8}f_1 \zeta_1^2 \bar{\zeta}_1^2 + \frac{1}{16}f_2 \zeta_1^2 \bar{\zeta}_2^2 + \frac{1}{4}f_2 \zeta_1 \zeta_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 + \frac{1}{16}f_2 \zeta_2^2 \bar{\zeta}_1^2 + \frac{3}{8}f_3 \zeta_2^2 \bar{\zeta}_2^2 \quad (33)$$

となる. ここで, (ξ, η) は BG 標準化において (Q, P) から定まる新正準変数であり, ζ_j は, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ ($j = 1, 2$) で定まる複素変数である. 以下では, $G(\xi, \eta)$ を Hamiltonian とする系を, JJQ 系の BG 標準化系と呼ぶ.

3.2 BG 標準化系の周期軌道

BG 標準形の特徴付け (1) および (2) からは, JJQ 系の BG 標準化系の任意解軌道は, 調和振動子 Hamiltonian

$$J(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\eta_j^2 + \xi_j^2) = \frac{1}{2} (\zeta_1 \bar{\zeta}_1 + \zeta_2 \bar{\zeta}_2) \quad (34)$$

のレベル多様体

$$J^{-1}(\rho) = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mid J(\xi, \eta) = \rho\} \simeq S^3 \quad (\rho > 0) \quad (35)$$

のいずれかに含まれる. ただし, 平衡点としての原点は議論から予め除外しておく. $J^{-1}(\rho)$ 上で $U(1)$ 作用

$$\zeta \in J^{-1}(\rho) \mapsto e^{i\theta} \zeta \in J^{-1}(\rho) \quad (36)$$

を考えると, $J^{-1}(\rho) (\simeq S^3)$ は S^2 上の主 $U(1)$ 束構造を許容することが容易にわかる⁸. 実際,

$$\pi_\rho : \zeta \in J^{-1}(\rho) \mapsto \frac{1}{\rho} \left(\Re(\bar{\zeta}_1 \zeta_2), \Im(\bar{\zeta}_1 \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_1 \bar{\zeta}_1 - \zeta_2 \bar{\zeta}_2) \right) \in S^2 \quad (37)$$

⁶BG 標準化の逆問題 [6, 7] を考える際には, この一意性が重要である.

⁷例えば, 著者 (U) らはプログラム GITA⁻¹ や ANFER などを開発している.

⁸以後, S^2 で単位 2 次元球面を表わすこととする.

は, $S^3 (\simeq J^{-1}(\rho))$ から S^2 への Hopf 写像となっている. BG 標準化系に随伴する, 上記の主 $U(1)$ 束構造を巧妙に用いた Kummer の結果 [2] を, JJQ 系の BG 標準化系について以下のよ
うに述べる事ができる.

補題 3.1 S^2 上の関数で,

$$(G \circ \pi_\rho)(\zeta) = G(\Re \zeta, \Im \zeta) \quad (\zeta \in J^{-1}(\rho)) \quad (38)$$

を満たす $G(x)$ を考える. ただし, $x = (x_1, x_2, x_3)$ は $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ を満たす. 関数 $G(x)$ の臨界点は, $J^{-1}(\rho)$ 上を流れる JJQ 系の BG 標準化系の周期軌道で集合として $U(1)$ 作用 (36) による軌道に等しいものと 1 対 1 対応している. この対応から, $G(x)$ の臨界点 $m \in S^2$ に対して, m の π_ρ による逆像, $\pi_\rho^{-1}(m)$, が $J^{-1}(\rho)$ 上を流れる JJQ 系の BG 標準化系の周期軌道となる. この逆も成り立つ.

補題 3.1 と定理 1.1 により, 我々は $G(x)$ の臨界点を調べることで, JJQ 系の低エネルギー領域において, 調和振動子解軌道の「生き残り」とみなせる周期軌道の分岐を解析できる. 式 (38) から定まる S^2 上の関数

$$G(x) = \rho + \rho^2 \left\{ \frac{3}{4}(f_1 - f_3)x_3 + \frac{-f_2 + 3(f_1 + f_3)}{8}x_3^2 + \frac{f_2}{4}x_1^2 + \frac{f_2 + 3(f_1 + f_3)}{8} \right\} \quad (39)$$

$(x \in S^2)$

の臨界点を調べよう. $G(x)$ を特別な場合とする S^2 上の関数

$$\Psi(x) = \rho + \rho^2 \left(-\alpha_1 x_3 + \frac{\alpha_2}{2} x_3^2 - \frac{\alpha_3}{2} x_1^2 + \alpha_4 \right) \quad (\alpha_j > 0 (j = 1, 2, 3), x \in S^2). \quad (40)$$

の臨界点について以下の結果を得る.

補題 3.2 S^2 上の関数 $\Psi(x)$ の臨界点は, 関数

$$S_1(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2, \quad (41)$$

$$S_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1^2 - (\alpha_2 + \alpha_3)^2 \quad (42)$$

の符号に応じて, 表 1 のとおり分類される. ただし, 表中の $\gamma_\pm, \delta_\pm, \sigma_\pm, \tau_\pm$ は, それぞれ S^2

	$S_1 < 0$	$S_1 = 0$	$S_1 > 0$
$S_2 < 0$	$\gamma_\pm, \delta_\pm, \sigma_\pm, \tau_\pm$	$\gamma_\pm, \sigma_\pm, \tau_\pm$	$\gamma_\pm, \sigma_\pm, \tau_\pm$
$S_2 = 0$	$\gamma_\pm, \delta_\pm, \sigma_\pm$	γ_\pm, σ_\pm	γ_\pm, σ_\pm
$S_2 > 0$	γ_\pm, σ_\pm	γ_\pm, σ_\pm	γ_\pm, σ_\pm

表 1: 関数 $\Phi(x)$ の臨界点

上の点

$$\gamma_\pm = (0, \pm 1, 0), \quad \delta_\pm = \left(0, \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \quad (43)$$

$$\sigma_\pm = (0, 0, \pm 1), \quad \tau_\pm = \left(\pm \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2}}, 0, \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) \quad (44)$$

を表わす.

補題 3.1 と補題 3.2 からは, JJQ 系の BG 標準化系では各レベル多様体 $J^{-1}(\rho)$ 上において, 表 1 にリストされた臨界点 $m (= \gamma_{\pm}, \delta_{\pm}, \sigma_{\pm}, \tau_{\pm})$ の π_{ρ} による逆像 $\pi_{\rho}^{-1}(m)$ として与えられる周期軌道が存在する. その周期軌道の本数は, JJQ 系を規定している諸定数の変化によって (41) と (42) で定義された関数 S_1 や S_2 の符号を変えることが可能であれば変化する. すなわち周期軌道分岐が生じる可能性がある. 次節では, 関数 S_1 や S_2 の符号を変えるような諸定数の変化は不可能であり, 周期軌道分岐が生じないことを確認する.

3.2 周期軌道分岐の非発生

JJQ 系の BG 標準化系の Hamiltonian $G(\xi, \eta)$ から導かれる S^2 上の関数 $\mathcal{G}(x)$ は, 前節で臨界点を詳細に調べた関数 $\Phi(x)$ で ((40) 参照),

$$\alpha_1 = -\frac{3}{4}(f_1 - f_3), \quad \alpha_2 = \frac{-f_2 + 3(f_1 + f_3)}{4} \quad \alpha_3 = -\frac{f_2}{2} \quad \alpha_4 = \frac{f_2 + 3(f_1 + f_3)}{8} \quad (45)$$

とおいたものである. 定数 f_1, f_2, f_3 の定義式 (30), (31), (32) より得られる不等式

$$f_2 < 6f_1 < 0, \quad f_2 < 6f_3, \quad f_1 < f_3 \quad (46)$$

を考慮すると, 対応関係 (45) は well-defined である. 言い換えれば, (46) の下での対応関係 (45) は, (40) に現れる条件式, $\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$) と矛盾しない. 対応 (45) を (41) と (42) に代入すると,

$$S_1(\alpha_1, \alpha_2) = S_1(f_1, f_2, f_3) = -\frac{1}{16}(f_2 - 6f_1)(f_2 - 6f_3) \quad (47)$$

$$S_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = S_2(f_1, f_2, f_3) = -\frac{9}{16}(f_2 - 2f_1)(f_2 - f_3) \quad (48)$$

という表現を得る. 再び, JJQ 系の諸定数から定まる f_1, f_2, f_3 の間の関係式 (46) を用いると, JJQ 系の BG 標準化系に関しては

$$S_1(f_1, f_2, f_3) < 0, \quad S_2(f_1, f_2, f_3) < 0 \quad (49)$$

の恒等的な成立が確認される. また, 臨界点の型を調べることで, 対応する周期軌道の安定性に関する情報も得られて, 以下が示される.

定理 3.3 Josephson 接合キュビット系の BG 標準化系のレベル多様体, $J^{-1}(\rho)$, 上に補題 3.1 の意味で存在する周期軌道の数, Josephson 接合キュビット系のパラメータが (23), (25), (26) を保って変化する限り, 不変である. 補題 3.1 の意味で $J^{-1}(\rho)$ 上に存在するそれぞれの周期軌道の安定性も Josephson 接合キュビット系のパラメータ変化に対して不変である.

§4 おわりに

本稿では, 量子計算素子の有力候補である Josephson 接合キュビット (JJQ) 系が, Birkhoff-Gustavson (BG) 標準化適用可能な格好の具体系であることを示し, BG 標準化を活用した周期軌道分岐解析を実行した. その結果, JJQ 系の BG 標準化系を含む抽象的な BG 標準化系にお

いて発生可能性がある周期軌道分岐は, JJQ系のBG標準化系では発生しないことが確認できた. Kummerによる定理 1.1 を用いると, JJQ系の低エネルギー領域においても周期軌道分岐は発生しないことが結論できる. この結果は, JJQ系の低エネルギー領域の相図のトポロジーがパラメータ変化でも保たれることを意味している.

筆者のひとりである上野は, BG標準化系にトーラス量子化を適用し, 補題 3.1 の意味での周期軌道分岐に起因するエネルギー準位の偶然縮退が発生することを一連の研究で見出している (例えば, [8]). このように分岐に同調して生じるエネルギー準位の偶然縮退発生は, ある種の不安定さと見ることもできるが, 今回の結果で JJQ系ではその種の不安定さは生じないことが確認できる.

補題 3.2 からは, 分岐に起因しない種類のエネルギー準位縮退の存在も期待できるが, その解析は今後の課題である.

参考文献

- [1] J.K.Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems* (Memoirs of American Mathematical Society 81) (AMS, Providence, RI, 1968), 10.
- [2] M.Kummer, *Commun. Math. Phys.*, 48(1976), 53.
- [3] 勝本信吾, 河野公俊, *超伝導と超流動* (岩波書店, 2006).
- [4] A.C. Rose-Innes, E.H. Rhoderick, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. (Pergamon Press, 1978).
- [5] S.P. Yukon, *Quantum Computing in Solid State Systems* (Eds. B.Ruggiero et al, Springer-Verlag, NY, 2006), 137.
- [6] Y.Uwano, *Journal of Physics A*, 33(2000), 6635.
- [7] Y.Uwano, N.Chekanov, V.Rostovtev and S.Vinitisky, *Computer Algebra in Scientific Computing* (Eds.V.Ganzha et al, Springer-Verlag, Berlin, 1998), 441.
- [8] Y.Uwano, *Rep. Math. Phys.*, 44(1999), 267.