数理解析研究所講究録
第 1577 巻 2008 年 45-54

拡散と不変な等位面

愛媛大学・大学院理工学研究科　　坂口 茂 (Shigeru Sakaguchi)

Graduate School of Science and Engineering,
Ehime University

この話は R. Magnanini (Firenze 大学) との共同研究による線形及び非線形拡散方程式の解の不変な等位面に関する 2 つの定理からなる。定理自体は同様に見えるが証明の方法が異なる。目的は両方法を概説し, その違いや類似点を明らかにすることにある。線形拡散方程式に対する結果は主に [MS1, MS3] により, 非線形拡散方程式に対する結果は [MS4] によるので, 詳しくはそれらを参照してほしい。

1　線形拡散と不変な等位面

始めに線形拡散方程式に関する結果から述べよう。$\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 2)$ の領域 Ω において, $u = u(x,t)$ を次の拡散方程式の初期境界値問題の有界な一意解とする。

$$u_t = \Delta u \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

$$u = 1 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{1.3}$$

このとき, 次の定理が成り立つ。

定理 1.1 ([MS1] の Theorem 1.1 および [MS3] の Theorem 3.1 とその一般化)　Ω を $\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 2)$ の領域とし, Ω は外部球面条件を満たし, その境界 $\partial\Omega$ は有界であるとする。 D を $\mathbb{R}^N$ の領域で $\overline{D} \subset \Omega$ を満たすものとする。 Γ を境界 ∂D の連結成分で $dist\,(\Gamma, \partial\Omega) = dist\,(\partial D, \partial\Omega)$ を満たすものとし, D は Γ において内部円錐条件を満たすとする。u を (1.1)-(1.3) の有界な一意解とし, Γ が常に u の等位面であるとする。つまり,

$$u(x,t) = a(t) \qquad ((x,t) \in \Gamma \times (0,\infty)) \tag{1.4}$$

を満たす関数 $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在すると仮定する。このとき, $\partial\Omega$ は一つの球面か 2 つの同心球面のどちらかに限る。つまり, Ω は球か球の外部領域か円環領域のどれかに限る。

この定理の証明の概略を述べよう。まず, 境界への距離関数 $d(x) =$ dist $(x, \partial\Omega)$ について, Varadhan [Va] の結果より

$$-4t \log u(x,t) \to d(x)^2 \quad \text{as} \quad t \to 0^+ \quad \text{uniformly on each compact subset of } \overline{\Omega}. \tag{1.5}$$

従って, 仮定 (1.4) と合わせて, ある正定数 $R > 0$ が存在して

$$d(x) = R \quad (x \in \Gamma) \tag{1.6}$$

が成り立つ。Γ が滑らかであることは, 次のバランス法則より従う。

命題 1.2 ([MS1] の Corollary 2.2) $x_0 \in \Omega$ に対して, $\nabla u(x_0, t) = 0$ $(t > 0)$ が成り立つための必要十分条件は

$$\int_{\partial B_r(x_0)} (x - x_0) u(x,t)\, dS_x = 0 \quad (0 < r < d(x_0),\ t > 0)$$

が成り立つことである。ここで, $B_r(x_0)$ は x_0 を中心とする半径 r の開球であって, dS_x は球面 $\partial B_r(x_0)$ の面積要素である。

このバランス法則に仮定の外部球面条件と内部円錐条件および (1.5), (1.6) を合わせると, 任意の $x_0 \in \Gamma$ に対して $\nabla u(x_0, t_0) \neq 0$ となる時刻 $t_0 > 0$ が存在することがわかる。さらに, u の空間変数 x に関する実解析性と陰関数定理より Γ は滑らかであることがわかると同時に, $\partial\Omega$ のある連結成分 S が存在して, Γ と S は平行であることがわかる。(詳しくは [MS1] の Lemma 3.1 の証明を参照せよ。) さて, (1.6) より

$$R = \text{dist}\,(\Gamma, S)$$

であることに注意しよう。任意の 2 点 $p, q \in \Gamma$ に対して, 関数 $v = v(x,t)$ を

$$v(x,t) = u(x+p, t) - u(x+q, t) \quad (x \in B_R(0),\ t > 0) \tag{1.7}$$

で定める。このとき, (1.1) と (1.4) より

$$v_t = \Delta v \ \text{ in } \ B_R(0) \times (0, \infty) \ \text{ and } \ v(0,t) = 0 \ (t > 0)$$

が成り立つ。ここで, 次のバランス法則を利用する。

命題 1.3 ([MS1] の Theorem 2.1) $v(0,t) = 0$ $(t > 0)$ が成り立つための必要十分条件は

$$\int_{\partial B_r(0)} v(x,t)\, dS_x = 0 \quad (0 < r < R,\ t > 0)$$

が成り立つことである。

これを用いて,

$$\int_{B_R(0)} v(x,t)\ dx = 0 \quad (t>0)$$

を得て, さらに, v の定義 (1.7) を用いて

$$\int_{B_R(p)} u(x,t)\ dx = \int_{B_R(q)} u(x,t)\ dx \quad (t>0)$$

を得る。両辺に $t^{-\frac{N+1}{4}}$ をかけて $t \to 0^+$ の極限を考えると [MS2] の Theorem 4.2 より

$$c(N)\left\{\prod_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{R}-\kappa_j(P)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} = c(N)\left\{\prod_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{R}-\kappa_j(Q)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

ここで, $c(N)$ は次元 N にのみ依存する正定数, κ_j $(j=1,\dots,N-1)$ は S の主曲率であり, $P,Q \in S$ は

$$\overline{B_R(p)} \cap S = \{P\}, \quad \overline{B_R(q)} \cap S = \{Q\}$$

を満たす点である。結果として

$$\prod_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{R}-\kappa_j(y)\right) = \text{正定数} \quad (y \in S) \tag{1.8}$$

が得られる。Aleksandrov の球面定理 ([Alek]) を適用すれば, S は球面でなければならない。従って, Γ も S と中心を共有する球面となる。そこで, E を $\partial E = \Gamma \cup S$ となる円環領域とし, S の中心を x_0 とする。もちろん, $E \subset \Omega$ である。[MS3] でも述べたように, 任意の N 次直交行列 A に対して, 関数 $w = w(x,t)$ を

$$w(x,t) = u(x_0 + A(x-x_0),t) - u(x,t) \quad ((x,t) \in E \times (0,\infty)) \tag{1.9}$$

で定めると, w は次の初期境界値問題の有界な解である。

$$w_t = \Delta w \ \text{ in } \ E \times (0,\infty) \ \text{ and } \ w = 0 \ \text{ on } \ (\partial E \times (0,\infty)) \cup (E \times \{0\}).$$

従って, 解の一意性より $w = 0$ $((x,t) \in E \times (0,\infty))$ が成り立つ。故に, u の x についての実解析性を考慮して, 任意の $i \neq j$ に対して

$$-(x_j - x_{0j})\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + (x_i - x_{0i})\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty)$$

が得られる。これは定理 1.1 の結論を導く。□

2 非線形拡散と不変な等位面

線形の場合はバランス法則が重要な役割を担った。バランス法則は調和関数の平均値の定理に似ていて, 非線形拡散方程式には期待できない。従って, 非線形拡散方程式について定理 1.1 と同様の結果を得るには異なる方法が必要になる。まず, 非線形拡散方程式に関する結果を述べよう。Ω を $\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 2)$ の C^2 級の領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は有界で $\partial\Omega$ の連結成分の個数を $m \in \mathbb{N}$, 各連結成分を $S_j \subset \partial\Omega$ $(j = 1, \dots, m)$ とすると

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$$

が成り立つ。$u = u(x,t)$ を次の非線形拡散方程式の初期境界値問題の有界な一意解とする。

$$u_t = \Delta\phi(u) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.1}$$

$$u = 1 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{2.3}$$

ここで, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^2 級で, $\phi(0) = 0$ および 2 つの正定数 $0 < \delta_1 \leqq \delta_2$ について

$$\delta_1 \leqq \phi'(s) \leqq \delta_2 \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{2.4}$$

を満たすとする。従って, 方程式 (2.1) は一様放物型の非線形拡散方程式である。最大値の原理から $0 < u(x,t) < 1$ $(x \in \Omega,\ t > 0)$ が成り立つ。関数 $\Phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\Phi(s) = \int_1^s \frac{\phi'(\xi)}{\xi} d\xi \qquad (s > 0) \tag{2.5}$$

によって定める。$\phi(s) \equiv s$ のときは, $\Phi(s) \equiv \log s$ であって, 熱方程式の場合に対応している。境界への距離関数 $d(x) =$ dist $(x, \partial\Omega)$ について, 線形方程式の場合の Varadhan [Va] の結果に対応する非線形の場合の結果は次である。

定理 2.1 ([MS4]) 次が成り立つ。

$$-4t\Phi(u(x,t)) \to d(x)^2 \quad \textit{as } t \to 0^+ \textit{ uniformly on every compact set in } \Omega.$$

定理 2.1 と Aleksandrov の折り返しの方法 ([Sir, Ser]) を合わせると, 熱方程式に対する定理 1.1 に対応する非線形拡散方程式の結果として, 次の定理を示すことができる。

定理 2.2 （[MS4]） u を (2.1)-(2.3) の有界な一意解とする。 D を $\mathbb{R}^N$ の C^2 級領域とし, $\overline{D} \subset \Omega$ を満たすとする。ただし, Ω が非有界領域のときは D も非有界領域であると仮定する。∂D が常に u の等位面であるとする。つまり,

$$u(x,t) = a(t) \quad ((x,t) \in \partial D \times (0,\infty)) \tag{2.6}$$

を満たす関数 $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在すると仮定する。このとき, $\partial\Omega$ は一つの球面に限る。

注意 2.3 Ω が非有界領域のときは仮定 (2.6) は次の仮定で置き換えられる。

任意の ∂D の連結成分 Γ に対して, ある関数 $a_\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在して,

$$u(x,t) = a_\Gamma(t) \quad ((x,t) \in \Gamma \times (0,\infty)) \tag{2.7}$$

が成り立つ。

注意 2.4 定理 2.2 が結論として Ω に円環領域を含まず, 定理 1.1 が Ω に円環領域を含むのは, *Aleksandrov* の折り返しの方法の使い方の違いによる。つまり, 定理 2.2 の証明では Ω 上の関数 u に対して用いるが, 定理 1.1 においては境界 $\partial\Omega$ のみに対して用いるからである。([Sir, Ser] および [Alek] を参照せよ。)

注意 2.5 初期関数を Ω の補集合の特性関数とする $\mathbb{R}^N$ 上の *Cauchy* 問題についても対応する定理が成り立つ。([MS4] を参照)

定理 2.2 の証明は定理 2.1 から $\partial\Omega$ と ∂D が平行になることを導き, さらに Aleksandrov の折り返しの方法（[Sir, Ser] 参照）を直接初期境界値問題 (2.1)-(2.3) に適用することによって得られる。

ここでは, 定理 2.1 の証明の概略を述べよう。粘性解の理論（ [CrIL] を参照）を用いて示すことができる。[FW] や [EI] のように, パラメータ $\varepsilon > 0$ を導入し, 関数

$$v^\varepsilon(x,t) = -\varepsilon\Phi(u(x,\varepsilon t)) \qquad (x \in \Omega, t > 0) \tag{2.8}$$

を考える。v^ε は次を満たす。

$$v_t^\varepsilon = \varepsilon\phi'\Delta v^\varepsilon - |\nabla v^\varepsilon|^2 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.9}$$

$$v^\varepsilon = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{2.10}$$

$$v^\varepsilon = +\infty \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{2.11}$$

ここで, $\phi' = \phi'\left(\Phi^{-1}\left(-\varepsilon^{-1}v^\varepsilon\right)\right)$ である。$h > 0$ について, $u(x, t+h)$ と $u(x,t)$ に比較定理を用いて

$$u_t > 0 \ \text{ and } \ \Delta\phi(u) > 0 \ \text{ in } \ \Omega \times (0, \infty). \tag{2.12}$$

を得る。$w = \phi(u)$ とおくと $w_t = \phi'(u)\Delta w$ となり, (2.4) と (2.12) より

$$\delta_1 \Delta w \le w_t \le \delta_2 \Delta w \ \text{ in } \ \Omega \times (0, \infty). \tag{2.13}$$

そこで, w_j $(j = 1, 2)$ を次の熱方程式に対する初期境界値問題の有界な一意解とする。

$$(w_j)_t = \delta_j \Delta(w_j) \qquad \text{in } \ \Omega \times (0, \infty), \tag{2.14}$$

$$w_j = \phi(1) \qquad \text{on } \ \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{2.15}$$

$$w_j = 0 \qquad \text{on } \ \Omega \times \{0\}. \tag{2.16}$$

このとき, (2.13) を考慮すると, 比較定理から次の補題が成り立つ。

補題 2.6 $w_1 \le w \le w_2$ *in* $\Omega \times (0, \infty)$.

さて, 次の事実を観察する。

$$\delta_1 s \le \phi(s) \le \delta_2 s \qquad \text{for } \ s \ge 0, \tag{2.17}$$

$$-\delta_1 \log s \le -\Phi(s) \le -\delta_2 \log s \qquad \text{for } \ 0 < s \le 1, \tag{2.18}$$

$$e^{\frac{s}{\delta_1}} \le \Phi^{-1}(s) \le e^{\frac{s}{\delta_2}} \qquad \text{for } \ -\infty < s \le 0. \tag{2.19}$$

$w_j^\varepsilon = w_j^\varepsilon(x, t)$, $(j = 1, 2)$ を次で定める。

$$w_j^\varepsilon(x, t) = w_j(x, \varepsilon t).$$

(2.17) と (2.18) の助けを借りて, 補題 2.6 より

$$-\varepsilon\delta_1 \log\left(\frac{w_2^\varepsilon}{\delta_1}\right) \le v^\varepsilon \le -\varepsilon\delta_2 \log\left(\frac{w_1^\varepsilon}{\delta_2}\right) \ \text{ in } \ \Omega \times (0, \infty). \tag{2.20}$$

Varadhan [Va] の結果より, $\varepsilon \to 0^+$ のとき, 関数 $-\varepsilon\delta_j \log w_j^\varepsilon$ は関数 $\frac{1}{4t}d(x)^2$ に $\overline{\Omega}\times(0,\infty)$ 内の任意の compact 集合上一様収束することがわかる。従って, 次の補題が得られる。

補題 2.7 次が成り立つ。

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \frac{1}{4t} d(x)^2 \le \liminf_{\varepsilon \to 0^+} v^\varepsilon(x, t) \le \limsup_{\varepsilon \to 0^+} v^\varepsilon(x, t) \le \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{1}{4t} d(x)^2 \ \ in \ \ \Omega \times (0, \infty).$$

この補題は次を導く。

補題 2.8 $\Omega \times (0,\infty)$ 内の任意の *compact* 集合 K に対して, $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_1 \le c_2 < +\infty$ を満たす 3 つの定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(K)$, $c_1 = c_1(K)$ と $c_2 = c_2(K)$ が存在して, もし $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば次が成り立つ。

$$0 < c_1 \le v^\varepsilon \le c_2 \quad in \quad K.$$

この補題と [LSV] の勾配評価の方法および [Gild] の定理の助けを借りて, $\Omega \times (0,\infty)$ 内の任意のコンパクト集合 K を与えるとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $\{v^\varepsilon\}$ が K 上一様有界で同程度連続であることを示すことができる。([MS4] 参照) 従って, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ を満たすある正数列 $\{\varepsilon_n\}$ および $\Omega \times (0,\infty)$ 上の連続関数 $v = v(x,t)$ が存在して, 関数列 $\{v^{\varepsilon_n}\}$ は $\Omega \times (0,\infty)$ 上 v に広義一様収束する。特に, 補題 2.7 より

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \frac{1}{4t} d(x)^2 \le v(x,t) \le \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{1}{4t} d(x)^2 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty). \tag{2.21}$$

(2.21) および $\partial\Omega$ 上 $d(x)^2 = \nabla(d(x)^2) = 0$ であることを合わせると, $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ 上の連続関数 $V(x,t)$ を

$$V(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \text{if } x \in \Omega, \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega \end{cases}$$

によって定めることができる。このとき, $V = V(x,t)$ は次の Cauchy 問題の粘性解であることがわかる。

$$V_t = -|\nabla V|^2 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{2.22}$$

$$V = 0 \quad \text{on} \quad (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times \{0\}, \tag{2.23}$$

$$V = +\infty \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{2.24}$$

最後に Strömberg [Str] の初期値問題の粘性解の一意性の結果を用いると

$$V(x,t) = \frac{\left(\text{dist } (x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\right)^2}{4t} \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty))$$

でなければならないことがわかる。従って,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v^\varepsilon(x,t) = \frac{d(x)^2}{4t} \quad ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)).$$

故に, まず $t = 1$ とおき, 次に $\varepsilon = t$ とおくと, 定理 2.1 が得られる。

3 いくつかの注意

注意 3.1 ここで利用した *Varadhan* [Va] の定理は変数係数の線形拡散方程式の場合でも成り立つので, *Aleksandrov* の折り返しの方法（[Sir, Ser] 参照）を直接初期境界値問題に適用することによって, 定理 2.2 と同様の結果が N 次元球面や N 次元双曲空間上の熱方程式に対して得られる。ただし, *Aleksandrov* の折り返しの方法を用いるので, N 次元球面の場合は領域 Ω は半球に含まれるもののみを考える。また, バランス法則は N 次元球面や N 次元双曲空間上の熱方程式に対しても成り立つことが [Sa2] で示されている。

注意 3.2 熱方程式の *Cauchy* 問題

$$u_t = \Delta u \quad in \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \quad and \quad u(x, 0) = \chi_E(x) \quad in \quad \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

について考える。ただし, E は $\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 2)$ の領域で, 集合 E の特性関数を χ_E とかく。$\chi_E(x) = 1$ *if* $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$ *if* $x \notin E$ である。もちろん,

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_E e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} d\xi \tag{3.2}$$

が成り立つ。E が必ずしも有界でない場合, どのようなときに u は動かない等温面を持つかを考える。すぐに ∂E が *isoparametric hypersurfaces* の族, つまり, 同心球面の族, 平行な超平面の族, または一般の同心円柱面の族のどれかに属する場合は容易に u は動かない等温面を持つことがわかる。これ以外の興味深い例として, $\mathbb{R}^3$ 内の常螺旋面 *(right helicoid)* $\mathcal{H}$ がある。$\mathcal{H}$ は次で与えられる.

$$\mathcal{H} = \left\{ \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = s\cos t, \ x_2 = s\sin t, \ x_3 = at + b, \ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \ \right\}.$$

ここで, $a \neq 0, b$ は実定数である. $\mathcal{H}$ は $\mathbb{R}^3$ を 2 つの連結成分に分け, その一方を E とすると, $\mathcal{H}$ の対称性から次が成り立つ.

$$u = \frac{1}{2} \quad on \quad \mathcal{H} \times (0, +\infty).$$

このことに関連した $\mathbb{R}^N$ 内の超曲面の分類について [MPS] で考察した。

注意 3.3 線形および非線形拡散方程式に対するノイマン境界条件の場合の初期境界値問題については, ユークリッド空間内の *isoparametric hypersurfaces* の分類定理（[LC, Seg]）を利用することによって, 全ての等位面が不変な解の分類が [Sa1] で得られている。従って, ノイマン条件の場合に, 一つの等位面が不変な解の分類をするためには初期条件をどのように設定するかが問題である。つまり, 初期条件を $u = 0$ *on* $\Omega \times \{0\}$ とすることはできない。

References

[Alek] A.D. Aleksandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large V, Vestnik Leningrad Univ. 13, no. 19 (1958), 5–8. (English translation: Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, 21 (1962), 412–415.)

[CrIL] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1–67.

[EI] L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, Ann. Inst. Henri Poincaré 2 (1985), 1–20.

[FW] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York 1984.

[Gild] B. H. Gilding, Hölder continuity of solutions of parabolic equations, J. London Math. Soc. 13 (1976), 103–106.

[LC] T. Levi-Civita, Famiglie di superficie isoparametriche nell' ordinario spazio euclideo, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 26 (1937), 355–362.

[LSV] P. L. Lions, P. E. Souganidis, and J. L. Vázquez, The relation between the porous medium and the eikonal equations in several space dimensions, Rev. Mat. Iberoamericana 3 (1987), 275–310.

[MPS] R. Magnanini, J. Prajapat, and S. Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces and uniformly dense domains, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 4821–4841.

[MS1] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Matzoh ball soup: Heat conductors with a stationary isothermic surface, Ann. of Math. 156 (2002), 931–946.

[MS2] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Interaction between degenerate diffusion and shape of domain, Proceedings Royal Soc. Edinburgh, Section A 137 (2007), 373–388.

[MS3] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces for unbounded domains, Indiana Univ. Math. J., to appear.

[MS4] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Nonlinear diffusion with a bounded stationary level surface, preprint.

[Sa1] S. Sakaguchi, When are the spatial level surfaces of solutions of diffusion equations invariant with respect to the time variable?, J. Analyse Math. 78 (1999), 219–243.

[Sa2] S. Sakaguchi, Stationary critical points of the heat flow in spaces of constant curvature, J. London Math. Soc. 63 (2001), 400–412.

[Seg] B. Segre, Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 27 (1938), 203–207.

[Ser] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.

[Sir] B. Sirakov, Symmetry for exterior elliptic problems and two conjectures in potential theory, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire 18 (2001), 135–156.

[Str] T. Strömberg, The Hopf-Lax formula gives the unique viscosity solution, Differential Integral Equations 15 (2002), 47–52.

[Va] S. R. S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 431–455.