数理解析研究所講究録
第1578巻 2008年 40-45

物質のマクロ構造の弱い自己相似相からの逐次形成

早稲田大学理工学術院　北田　韶彦(Akihiko Kitada)
Faculty of Science and Engineering,
Waseda University

dendriteやdislocationのFrank-Read源、あるいは粒状pearlite [1] などのような、物質の様々なマクロ構造*)を表現するところの連続体(continuum)の、弱い自己相似集合からの逐次形成について議論する。物質のマクロ構造を定める性質としては、例えば点のorder、disconnection number、fixed point propertyあるいはsimple closed curveを含まない、などが考えられる。

まず弱い自己相似集合の存在について以下のpropositionが成り立つ [2, 3]。

Proposition

$$d(f_j(x), f_j(x')) \le \alpha_j(t) d(x,x'), \qquad d(x,x')<t, \qquad 0<\alpha_j(t)<1, \qquad \inf_{t>0} \alpha_j(t)>0$$

によって定義されるcompact距離空間(X, τ_d)上の弱い縮小写像f_j : $X \to X$, $j\in \overline{m}$ $(2 \le m \le \infty)$が、性質i)、ii)、iii)を満たすとする。

i) 各$j\in \overline{m}$に対してf_jは単射。

ii) $\bigcup_{j\in\overline{m}} \{x\in X; f_j(x)=x\}$は2点以上を含む。

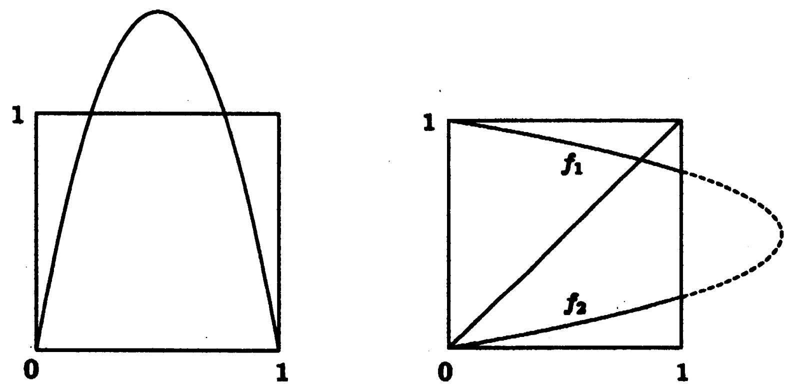
iii) $^{\exists}t_0>0$ s.t. $\sum_{j\in\overline{m}} \alpha_j(t_0)<1$.

---

*)量子力学を用いずに記述できる系。

この時、X内にϕでない、0次元でperfectなcompact集合Sが存在し、$S=\bigcup_{j=1}^{m}f_j(S)$（$S$は弱い自己相似集合）を満たす。

例えばFig. 1の2次力学$F_\mu(x)=\mu x\,(1\text{-}x)$, $\mu>4$が作る縮小写像f_1, f_2はμが十分大きいとき、上の条件i)、ii)、iii)をみたす。



$F_\mu(x)=\mu x\,(1\text{-}x)$, $\mu>4$

Fig. 1

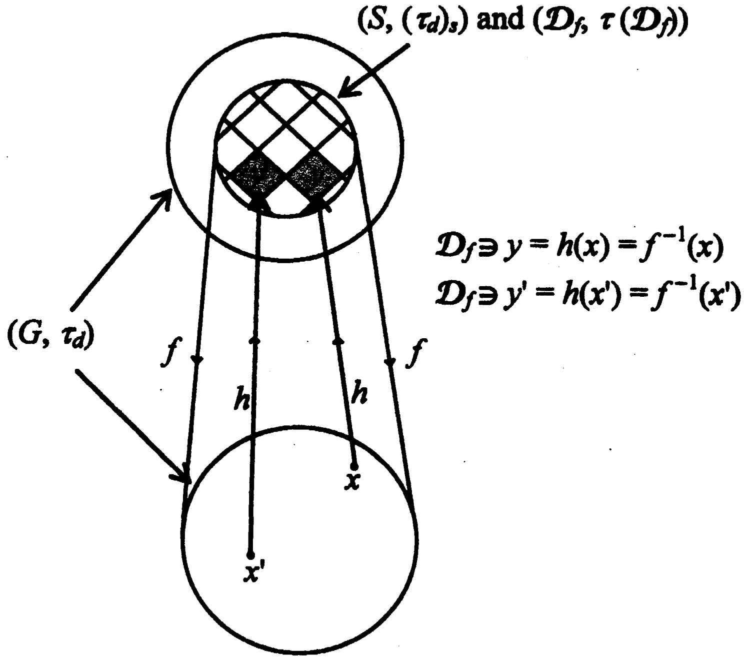
任意のcompact距離空間Fに対して、0次元、perfectなcompact T_1空間Eから連続全射$f: E\rightarrow F$が常に存在すること [2, 3, 4]及び、compact空間(E, τ)からT_2空間Fへの連続全射fが存在するならば、Eの分解空間(decomposition space) $\mathcal{D}_f$とFとは同相となること、すなわち

$$h: F\cong(D_f,\tau(D_f)), y\mapsto f^{-1}(y)$$

$$D_f=\{f^{-1}(y)\subset E; y\in F\}, \tau(D_f)=\{u\subset D_f;\bigcup u\in\tau\}$$

となることが知られている[2, 3, 5]から、これらにもとづいて以下の（A）が成り立つ。

(A) propositionにおいてXから得られた弱い自己相似集合Sに関して、SからX自身への連続全射$f: (S, (\tau_d)_S) \to (X, \tau_d)$が存在し、さらに写像$h: (X, \tau_d) \to (\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f)), x \mapsto f^{-1}(x)$によって$S$の分解空間$\mathcal{D}_f$*)は$X$と同相となる。ここで$X$がもし連結ならば$f$は単射ではありえないことに注意する [6]。



$$\rho(y, y') = d(h^{-1}(y), h^{-1}(y')) = d(x, x')$$
$$\tau(\mathcal{D}_f) = \tau_\rho$$
$(\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f))$ turns to a compact metric space $(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$

Fig. 2

*)分解空間は商空間(quotient space)であり物性物理学におけるその最も典型的な例は、結晶の回折像(diffraction pattern of crystal)である。従って分解空間は単に数学的対象というだけでなく、物理的実在である。

Fig. 2 から明らかなように、Sの分解空間$(\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f))$は距離$\rho(y, y') = d(h^{-1}(y), h^{-1}(y'))$によってcompact距離空間$(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$となる。$S$の分解空間$(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$は、はじめの連続体$(X, \tau_d)$と同相であるから、$X$があらわす物質のマクロ構造の位相的性質を保存する。

今、写像f_j^1を

$f_j^1 = h \circ f_j \circ h^{-1} : (D_f, \tau_\rho) \to (D_f, \tau_\rho)$

によって定めると、f_j^1はf_jと位相的共役(topologically conjugate)になる。

この系$\{f_j^1;\ j \in \overline{m}\}$はpropositionの条件i), ii), iii)を再びみたすから、Sの分解空間$(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$内に再び 0 次元、perfect、compactな弱い自己相似集合S^1が存在することになる。すなわち、

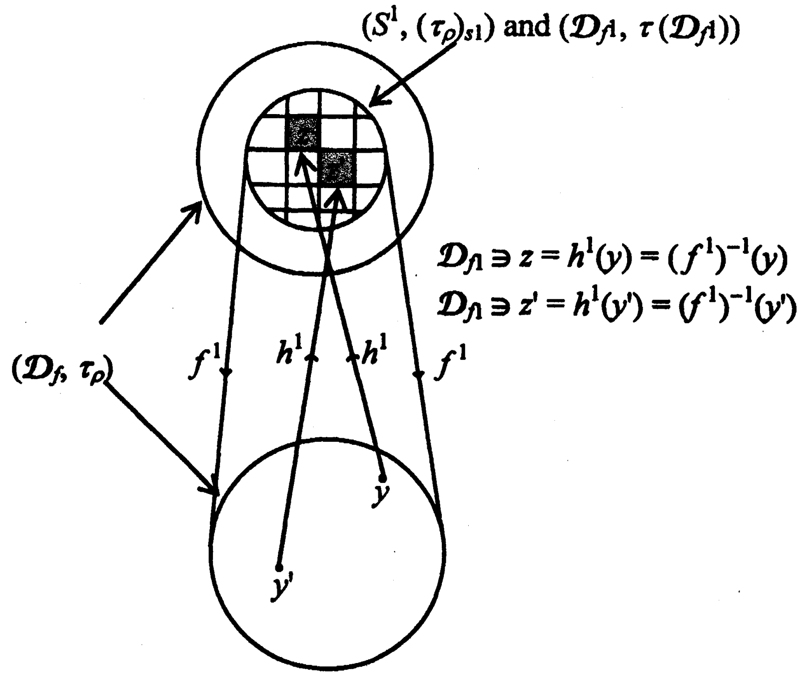
$$S^1 = \bigcup_{j \in \overline{m}} f_j^1(S^1).$$

ここで、S^1から$\mathcal{D}_f$への連続全射f^1が存在するからS^1の分解空間$(\mathcal{D}_{f^1}, \tau(\mathcal{D}_{f^1}))$と$\mathcal{D}_f$とは

$$h_1 : \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}_{f^1},\ y \mapsto (f^1)^{-1}(y)$$

によって同相になる。

Fig. 3 から明らかなようにS^1の分解空間$(\mathcal{D}_{f^1}, \tau(\mathcal{D}_{f^1}))$は、
距離$\rho_1(z, z') = d((h^1 \circ h)^{-1}(z), (h^1 \circ h)^{-1}(z'))$によってcompact距離空間$(\mathcal{D}_{f^1}, \tau_{\rho^1})$となる。



$$\rho^1(z, z') = \rho((h^1)^{-1}(z), (h^1)^{-1}(z')) = \rho(y, y')$$
$$= \rho(h^{-1}((h^1)^{-1}(z), h^{-1}(h^1)^{-1}(z'))) = d((h^1 \circ h)^{-1}(z), (h^1 \circ h)^{-1}(z'))$$
$$\tau(\mathcal{D}_{f1}) = \tau_{\rho 1}$$

Fig. 3

さらに写像f_j^2を

$$f_j^2 = h^1 \circ f_j^1 \circ (h^1)^{-1} : (D_{f^1}, \tau_{\rho^1}) \to (D_{f^1}, \tau_{\rho^1})$$

によって定めるとf_j^2はf_j^1と位相的共役となる。これを続けることにより、Fig. 4 のような系列がえられる。

このようにして、それぞれの自己相似集合を媒介として同じ位相的性質をもつ物質のマクロ構造を次々に生成することが出来る。なお 0 次元、perfect な T_0 空間はそのϕでない開かつ閉集合による任意の n 分割 (n-partition)が可能だから 0 次元、perfectなcomapct距離空間Sも任意にn分割され、さらにこの分割は際限なく続けられることに注意する。

$$\begin{tikzcd}
(X, \tau_d) \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "h"'] & (X, \tau_d) \arrow[d, "h"] \\
(\mathcal{D}_f, \tau_\rho) \arrow[r, "f_{j1}"] \arrow[d, "h^1"'] & (\mathcal{D}_f, \tau_\rho) \arrow[d, "h^1"] \\
(\mathcal{D}_{f1}, \tau_{\rho 1}) \arrow[r, "f_{j2}"'] \arrow[d] & (\mathcal{D}_{f1}, \tau_{\rho 1}) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
X & \underset{h}{\cong} & \mathcal{D}_f & \underset{h^1}{\cong} & \mathcal{D}_{f1} & \underset{h^2}{\cong} & \mathcal{D}_{f2} & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\
S & \underset{h}{\cong} & S^1 & \underset{h^1}{\cong} & S^2 & \underset{h^2}{\cong} & S^3 & \cdots
\end{array}$$

Fig. 4

参考文献

[1] 例えば、幸田成幸、改訂　金属物理学序論、コロナ社、1964

[2] A. Kitada, Y. Ogasawara, On a decomposition space of a weak self-similar set, Chaos, Solitons & Fractals 24 (2005) 785-787.

[3] A. Kitada, Y. Ogasawara, Erratum to "On a decomposition space of a weak self-similar set" [Chaos, Solitons & Fractals 24 (2005) 785-787], Chaos, Solitons & Fractals 24 (2005) 1273.

[4] S.B. Nadler Jr., Continuum theory, Marcel Dekker, 1992, p.106.

[5] S.B. Nadler Jr., Continuum theory, Marcel Dekker, 1992, p.44.

[6] A. Kitada, Y. Ogasawara, T. Yamamoto, On a dendrite generated by a zero-dimensional weak self-similar set, Chaos, Solitons & Fractals 34 (2007) 1732-1735.