

CAT(0) groups whose boundaries are scrambled sets

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

本稿では、力学系の概念である scrambled set (攪拌集合) を群作用に対して自然な拡張として定義し、CAT(0) 群の境界がいつ scrambled set となるかを調べる。

§1 CAT(0) 群の境界の極小性と攪拌集合について

非正曲率を持つ測地線空間として CAT(0) 空間が定義される。CAT(0) 空間 X およびその境界 ∂X の定義および詳細は [2] に見られる。CAT(0) 空間 X 上に幾何学的に (proper, cocompact, isometry に) 作用する群 G を CAT(0) 群とよぶ。

いま、群 G が CAT(0) 空間 X 上に幾何学的に作用しているとする。本稿では、 X 上の点 x_0 を固定し、境界 ∂X 上の距離を以下で定義する。

Definition. Let $\alpha, \beta \in \partial X$. There exist unique geodesic rays $\xi_{x_0, \alpha}$ and $\xi_{x_0, \beta}$ in X with $\xi_{x_0, \alpha}(0) = \xi_{x_0, \beta}(0) = x_0$, $\xi_{x_0, \alpha}(\infty) = \alpha$ and $\xi_{x_0, \beta}(\infty) = \beta$. Then the metric $d_{\partial X}(\alpha, \beta)$ of α and β on ∂X (with respect to the basepoint x_0) is defined by

$$d_{\partial X}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \min\{d(\xi_{x_0, \alpha}(i), \xi_{x_0, \beta}(i)), \frac{1}{2^i}\}.$$

ここで定義された距離は、当然 x_0 に依存するが、境界 ∂X の位相は x_0 に依らず、よく知られている cone topology となる。

いま、群 G は境界 ∂X 上に同相によって作用する。ここで、minimality (極小性) および scrambled set (攪拌集合) を以下で定義する。

Definition. The boundary ∂X is said to be *minimal*, if any orbit $G\alpha$ is dense in ∂X . Also the boundary ∂X is called a *scrambled set*, if for any $\alpha, \beta \in \partial X$ with $\alpha \neq \beta$,

$$\begin{aligned} \limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} &> 0 \text{ and} \\ \liminf\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} &= 0. \end{aligned}$$

ここで定義された “minimality” および “scrambled set” は、力学系の概念の自然な拡張である。一般に、境界 ∂X およびそこへの群 G の作用は、非常に複雑で難解であり、その複雑な対象から何らかの情報を得ることが、“minimality” および “scrambled set” といった力学系の概念を導入した動機である。

いくつかの議論により、実際には、

$$\limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} > 0$$

は常に成立することがわかり、scrambled set となるかどうかは、実は、

$$\liminf\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} = 0$$

の条件が成立するかどうかにかかっていることがわかる。

本稿では、境界がいつ scrambled set となるのか、また、いつ minimal となるのか、を中心に考えていく。

§2 HYPERBOLIC の場合

まず、CAT(0) 空間が (Gromov) hyperbolic の場合について得られた結果を述べる。

Theorem 1. *Suppose that a group G acts geometrically on a CAT(0) space X and $|\partial X| > 2$. If X is hyperbolic, then the boundary ∂X is a scrambled set and minimal. Moreover there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} > c$$

for any $\alpha, \beta \in \partial X$ with $\alpha \neq \beta$.

ここで、力学系の “expansive” という概念を導入する。

Definition. An action of a group G on a metric space Y by homeomorphisms is said to be *expansive*, if there exists a constant $c > 0$ such that for each pair $y, y' \in Y$ with $y \neq y'$, there is $g \in G$ such that $d(gy, gy') > c$.

ここで、次の定理を得た。

Theorem 2. *Suppose that a group G acts geometrically on a CAT(0) space X and $|\partial X| > 2$. The action of G on ∂X is expansive if and only if the space X is hyperbolic.*

§3 境界が SCRAMBLED SET となる CAT(0) 群について

境界が scrambled set となる CAT(0) 群の条件としては、例えば、以下の結果を得ている。

Theorem 3. *Suppose that a group G acts geometrically on a CAT(0) space X . If there exists an element $g_0 \in G$ such that*

- (1) Z_{g_0} is finite,
- (2) $X \setminus F_{g_0}$ is not connected, and
- (3) each component of $X \setminus F_{g_0}$ is convex and not g_0 -invariant,

then the boundary ∂X is a scrambled set and minimal, where Z_{g_0} is the centralizer of g_0 and F_{g_0} is the fixed-point set of g_0 in X , that is,

$$Z_{g_0} = \{g \in G \mid gg_0 = g_0g\} \text{ and}$$

$$F_{g_0} = \{x \in X \mid g_0x = x\}.$$

また、境界が scrambled set とならない CAT(0) 群の条件として、以下を得ている。

Theorem 4. *Suppose that a group G acts geometrically on a CAT(0) space X and $|\partial X| > 2$. If X contains a quasi-dense subset $X_1 \times X_2$ such that X_1 and X_2 are unbounded, then the boundary ∂X is not a scrambled set.*

ここで、 $A \subset X$ が X において quasi-dense であるとは、「 A をある constant $c > 0$ だけ太らせたものが X を覆える (すなわち $B(A, c) = X$)」によって定義する。

このように、CAT(0) 空間 X の本質的な部分が積に分解するとき、その境界 ∂X は scrambled set とはならない。一方で、この逆が成立するかは、未解決な問題である。

§4 RIGHT-ANGLED COXETER 系の境界について

Coxeter 系 (W, S) から、Davis 複体とよばれる CAT(0) 空間 $\Sigma(W, S)$ が定義される ([6], [7], [8], [25])。このとき、Coxeter 群 W は Davis 複体 $\Sigma(W, S)$ 上に幾何学的に自然に作用する。Davis 複体の境界 $\partial \Sigma(W, S)$ を Coxeter 系 (W, S) の境界

とよぶ. Coxeter 群 W の任意の元の位数が 2 か ∞ のとき, (W, S) を right-angled Coxeter 系, W を right-angled Coxeter 群とよぶ.

ここで, right-angled Coxeter 系の境界に関して, 以下の非常に強い結果を得た.

Theorem 5. *If (W, S) is an irreducible right-angled Coxeter system and $|\partial\Sigma(W, S)| > 2$, then the boundary $\partial\Sigma(W, S)$ is a scrambled set and minimal.*

Theorem 6. *Let (W, S) be a right-angled Coxeter system with $|\partial\Sigma(W, S)| > 2$. Then the following statements are equivalent:*

- (1) $\partial\Sigma(W, S)$ is a scrambled set.
- (2) $\partial\Sigma(W, S)$ is minimal.
- (3) Any finite index subgroup of W does not split as a product of infinite subgroups.

このように, right-angled Coxeter 系の境界に関しては, いつ scrambled set となるのか, また, いつ minimal となるのか, がはっきりとわかった. 今後は, より一般の Coxeter 系の境界および CAT(0) 群の境界に関して取り組みたい.

REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.
- [2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980.
- [4] M. Coornaert and A. Papadopoulos, *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Lecture Notes in Math., Vol. 1539, Springer, Berlin, 1993.
- [5] C. B. Croke and B. Kleiner, *Spaces with nonpositive curvature and their ideal boundaries*, *Topology* **39** (2000), 549–556.
- [6] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, *Ann. of Math.* **117** (1983), 293–324.
- [7] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in *Handbook of geometric topology* (Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher), pp. 373–422, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [8] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, *Duke Math. J.* **91** (no.2) (1998), 297–314.
- [9] E. Ghys and P. de la Harpe (ed), *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, *Progr. Math.* vol. 83, Birkhäuser, Boston MA, 1990.
- [10] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in *Essays in group theory* (Edited by S. M. Gersten), pp. 75–263, M.S.R.I. Publ. 8, 1987.
- [11] T. Hosaka, *Parabolic subgroups of finite index in Coxeter groups*, *J. Pure Appl. Algebra* **169** (2002), 215–227.
- [12] T. Hosaka, *Dense subsets of the boundary of a Coxeter system*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 3441–3448.
- [13] T. Hosaka, *The interior of the limit set of groups*, *Houston J. Math.* **30** (2004), 705–721.

- [14] T. Hosaka, *On dense orbits in the boundary of a Coxeter system*, J. Math. Kyoto Univ. **45** (no.3) (2005), 627–631.
- [15] T. Hosaka, *Reflection groups of geodesic spaces and Coxeter groups*, Topology Appl. **153** (2006) 1860–1866.
- [16] T. Hosaka, *Dense subsets of boundaries of $CAT(0)$ groups*, Houston J. Math., to appear.
- [17] T. Hosaka, *On splitting theorems for $CAT(0)$ spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature*, arXiv:math.GR/0405551 (2004).
- [18] T. Hosaka, *Minimality of the boundary of a right-angled Coxeter system*, arXiv:math.GR/0606020 (2006).
- [19] T. Hosaka, *$CAT(0)$ groups and Coxeter groups whose boundaries are scrambled sets*, preprint, 2007.
- [20] W. Huang and X. Ye, *Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **21** (2001), 77–91.
- [21] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [22] H. Kato, *On scrambled sets and a theorem of Kuratowski on independent sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2151–2157.
- [23] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.
- [24] N. Monod, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 781–814.
- [25] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1988.
- [26] D. Radcliffe, *Unique presentation of Coxeter groups and related groups*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, 2001.
- [27] K. Ruane, *Dynamics of the action of a $CAT(0)$ group on the boundary*, Geom. Dedicata **84** (2001), 81–99.
- [28] J. Tits, *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica, vol. 1, pp. 175–185, Academic Press, London, 1969.