数理解析研究所講究録
第 1582 巻 2008 年 10-17

ガルニエ系の相空間

高野恭一（青山学院大学理工学部）

この研究集会で複素領域における差分方程式の話をするように、研究代表者から依頼された。筆者は30年以上前にそういう研究をやっていたし、今でも興味があるが、今はお話しするような適当な話題を持ち合わせていないので、ここしばらくの間考えて来た、パンルヴェ系やその多変数版であるガルニエ系の相空間の話をさせていただくことにした。これも、あちこちで話したり書いたりもして来ていて、目新しいことは何も無いが、実領域微分方程式の研究者との交流が復活することを願って、何を問題としているのかを知っていただくための話をすることにした。

1. ガルニエ系とその特別な場合であるパンルヴェ系

ガルニエ系とは多くの微分方程式の総称で、自然数 n と $n+3$ の分割に応じて一つ一つのガルニエ系（多時間ハミルトン系）が定まる。n は独立変数（時間変数）の個数である。$n=1$ のときのガルニエ系はパンルヴェ系と総称される。この場合 $n+3=4$ であるが、4 の分割は $1+1+1+1$, $2+1+1$, $2+2$, $3+1$, 4 と 4 通りあり、それぞれ、第 VI パンルヴェ系 (H_{VI})、第 V パンルヴェ系 (H_V)、第 IV パンルヴェ系 (H_{VI})、第 III パンルヴェ系 (H_{III})、第 II パンルヴェ系 (H_{II}) と呼ばれる：

$$
\begin{array}{lll}
1+1+1+1 & \cdots & (H_{VI}) \\
2+1+1 & \cdots\cdots & (H_V) \\
2+2 & \cdots\cdots\cdots & (H_{IV}) \\
3+1 & \cdots\cdots\cdots & (H_{III}) \\
4 & \cdots\cdots\cdots\cdots & (H_{II})
\end{array}
$$

第 I パンルヴェ系 (H_I) はこの分類では例外として扱う。

ガルニエ系や、その特別の場合であるパンルヴェ系を知るために色々な切口が提供されて来た。ここでは岡本和夫氏の研究に始まる「相空間」という切口からの見方の概略を解説しようと思う。

2. パンルヴェ系の相空間

第 J パンルヴェ系 (H_J) $J=VI,\ldots,I$ はいずれも t の有理関数係数の x,y の多項式 H_J をハミルトニアンとするハミルトン系

$$
(1) \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_J}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial H_J}{\partial x}
$$

である。第 J パンルヴェ系から変数 y を消去すると第 J パンルヴェ方程式と言われる x に関する 2 階常微分方程式が得られる。この意味で、パンルヴェ方程式とパンルヴェ系は同値なものである。

$J = VI, V, IV, III, II$ は何でもよいが、以下 $J = VI$ を例に話を進めよう。このとき $H := H_{VI}$ の具体形は

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{t(t-1)}\big[x(x-1)(x-t)y^2 - \{\kappa_0(x-1)(x-t) \\ & + \kappa_1 x(x-t) + (\theta-1)x(x-1)\}y + \kappa(x-t)\big], \\ & (\kappa = (\kappa_0+\kappa_1+\theta-1)^2/4 - \kappa_\infty^2/4) \end{aligned}$$

である。ここで $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \theta$ は定数。

$$B := \mathbf{C} - \{0, 1\}$$

とすると H は $\mathbf{C}^2 \times B \ni (x, y, t)$ において正則であるから、任意の $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbf{C}^2 \times B$ に対して、初期条件

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

を満たす $t = t_0$ の近傍で正則な解がただ一つ存在するが、この解は、$t = t_0$ を始点とする曲線に沿って t が B 内を動くとき、$\mathbf{C}^2 \times B$ に留まっているだろうか。後で見るように、答は一般に否である。それは方程式系 (1) の非線形性による。

線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t), \quad \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t)$$

の場合は、$a(t), b(t), c(t), d(t), f(t), g(t)$ が領域 $B \subset \mathbf{C}$ で正則であるならば、任意の $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbf{C}^2 \times B$ に対して、初期条件 (2) を満たす解は $t = t_0$ を始点とする任意の曲線に沿って t が B 内を動くとき、$\mathbf{C}^2 \times B$ に留まっている。周知のように、これは線形微分方程式の最も顕著な性質である。

非線形の場合はどのようなことが起こるだろうか。まず、リッカチの微分方程式といわれる特殊な非線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{3}$$

の場合を見てみよう。ここで $a(t), b(t), c(t)$ は領域 $B \subset \mathbf{C}$ で正則とし、非線形であるために $a(t)$ は恒等的に 0 ではないとする。(3) の右辺は $\mathbf{C} \times B \ni (x, t)$

において正則であるので、リッカチの微分方程式 (3) は $\mathbf{C}\times B$ において定義されている。さて 任意の $(x_0, t_0)\in \mathbf{C}\times B$ に対して、初期条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

を満たす (3) の解は t を $t = t_0$ を始点とする D 内の任意の曲線に沿って動かしたとき、$\mathbf{C}\times D$ 内に留まるだろうか。答えは否である。それは次のようにして分かる。

$$x = \frac{1}{X} \tag{5}$$

なる変換をすると、(3) は

$$\frac{dX}{dt} = -a(t) - b(t)X - c(t)X^2 \tag{3'}$$

に変換される。t_0 を $a(t_0)\neq 0$ なる点とし、初期条件

$$X(t_0) = 0 \tag{6}$$

を満たす (3') の解を $X(t)$ とする。$X(t)$ は $t = t_0$ の近傍で

$$X(t) = -a(t_0)(t-t_0) + O((t-t_0)^2)$$

と表されるので $0 < |t - t_0| << 1$ において $X(t)\neq 0$ である。そこで $X(t_1)\neq 0$ なる点 t_1 $(0 < |t_1 - t_0| << 1)$ をとって初期条件

$$x(t_1) = \frac{1}{X(t_1)} \tag{7}$$

を満たす (3) の解 $x(t)$ を考えると、$x(t)$ は $t = t_0$ において ∞ となり、$\mathbf{C}\times B$ からはみ出ることになる。

ところで変換 (5) についての上の考察から、リッカチの微分方程式 (3) はその定義域を $\mathbf{P}\times B$ にまで拡張出来ることが分かる。ここで $\mathbf{P}$ は x の定義域 $\mathbf{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えたリーマン球面である。2 個の $\mathbf{C}\times B\ni(x,t)$ と $\mathbf{C}\times B\ni(X,t)$ を、関係式 (5) によって貼合わせると $\mathbf{P}\times B$ が得られる。一方の $\mathbf{C}\times B\ni(x,t)$ 上には微分方程式 (3) を、他方の $\mathbf{C}\times B\ni(X,t)$ 上には微分方程式 (3') を与えると、$\mathbf{C}\times B\ni(x,t)$ と $\mathbf{C}\times B\ni(X,t)$ の共通部分では 2 つの微分方程式が一致する。よって、これにより $\mathbf{P}\times B$ 上に微分方程式が定義されたことになり、それは元の $\mathbf{C}\times B$ 上の微分方程式 (3) の拡張になっているという訳である。

こうして得られた $\mathbf{P}\times B$ 上の微分方程式を (R) とすると、次の重要な事実が成り立つ：任意の

$$(P,a)\in\mathbf{P}\times B$$

に対して、点 (P,a) を通る (R) の解は、a を始点とする B 内の任意の曲線に沿って t を動かしたとき $\mathbf{P}\times B$ 内に留まる。これは $\mathbf{P}$ がコンパクトであることと、「正則解の一意性」という名前で知られるパンルヴェの定理（筆者は「正則解の延長可能性」と呼ぶことにしているが）から導かれる。この事実は「リッカチの微分方程式の動く特異点は極である」という古典的定理であるが、多様体上の力学系の言葉を借りて、(3) は $\mathbf{P}\times B$ 上の微分方程式 (R) に「完備化可能」ということにしよう。別の言い方も色々ある。微分方程式 (R) は $\mathbf{P}\times B$ の葉層構造を定めるが、任意の $(P,a)\in\mathbf{P}\times B$ に対して、a を始点とする B 内の任意の曲線は (P,a) を通る葉 (leaf) に持ち上がるといってもよい。これを「葉層構造の一様性」という。

第 VI パンルヴェ方程式系に話を戻そう。それは $\mathbf{C}^2\times B$ $(B=\mathbf{C}-\{0,1\})$ 上に定義されているハミルトン系

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y},\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{8}$$

であった (下付添字 VI は省略する)。これに対して

$$x=\frac{1}{X},\quad y=X(\kappa_+-XY) \tag{9}$$

$(\kappa_+=(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_\infty+\theta-1)/2)$ なる変換をしてみよう。$dy\wedge dx=dY\wedge dX$ であるので、これは正準変換であり、

$$dy\wedge dx-dH\wedge dt=dY\wedge dX-dK\wedge dt$$

を満たす K をハミルトニアンとするハミルトン系

$$\frac{dX}{dt}=\frac{\partial K}{\partial Y},\qquad \frac{dY}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial X} \tag{10}$$

に変換される。今の場合、正準変換が t を含まないので $K=H$ であるが、計算により、K は X,Y の多項式で、係数は B で正則な t の有理関数であることが、確かめれる。

任意の $t_0\in B$ と任意の $h\in\mathbf{C}$ に対して、初期条件

$$X(t_0)=0,\quad Y(t_0)=h \tag{11}$$

を満たす (10) の解 $(X(t), Y(t))$ を考える。

$$\frac{dX}{dt}(t_0) = \frac{\partial K}{\partial Y}\Big|_{X=0,Y=h,t=t_0} = -\frac{\kappa_\infty}{t_0(t_0-1)}$$

であるので、$\kappa_\infty \neq 0$ とすると、$t=t_0$ の近傍で

$$X(t) = -\frac{\kappa_\infty}{t_0(t_0-1)}(t-t_0) + O((t-t_0)^2), \quad Y(t) = h + O(t-t_0)$$

である。これを元の座標 (x,y) で見ると

$$x(t) = -\frac{t_0(t_0-1)}{\kappa_\infty}\frac{1}{t-t_0} + O(1), \quad y(t) = O(t-t_0). \tag{12}$$

従って、$0 < |t_1 - t_0| << 1$ なる t_1 に対して $X(t_1) \neq 0$ に注意して、初期条件

$$x(t_1) = \frac{1}{X(t_1)}, \quad y(t_1) = X(t_1)(\kappa_+ - X(t_1)Y(t_1))$$

を満たす (8) の解は $t=t_0$ において (H) の定義域 $\mathbf{C}^2 \times B$ を一瞬飛び出ることが分かった。すなわち、第 VI パンルヴェ系 (8) は $\mathbf{C}^2 \times B$ において完備ではないのである。他のパンルヴェ系についても同様である。

それでは $J = VI$ に限らず一般の J に対して「第 J パンルヴェ系は完備化出来るだろうか」ということが問題となる。それを問題として提出し、それがが可能であるということを示したのは岡本和夫氏である。岡本氏の結果を見直すと、「$\mathbf{C}^2 \times B$ 上定義されているハミルトン系 (H_J) は B_J 上の或るファイバー空間 E_J 上の完備なハミルトン系に拡張出来る」ということが出来る。E_J はいずれも、何個かの $\mathbf{C}^2 \times B_J$ を (9) のような簡単な（双有理）正準変換で貼合わせたもので、その上に拡張されたハミルトン系のハミルトニアンは正準変数の多項式で、その係数は B_J で正則な t の有理関数である。

第 VI パンルヴェ系 (8) の解 (12) をよく見てみよう。この解には任意パラメータ $h \in \mathbf{C}$ が含まれている。このことは、(8) の定義域の境界上の点 $(x,t) = (\infty, t_0)$ を通る解が複素 1 次元分あることを、さらに、この 1 次元分の解をほぐして区別する座標系が (X, Y, t) であることを示している。ファイバー空間 E_J の構成法はここでは説明しないが、色々な準備の後 blow up という操作によって、このように一点を通る多くの解をほぐしてゆくのだということを述べておこう。前準備の仕方によっては blow down という操作をしなければならないが、いつ blow down すべきかの実践的な判断基準は笹野祐輔氏が与えた。

各 $t \in B_J$ に対して、t 上のファイバー $E_J(t)$ は、岡本氏の命名により、初期空間 (space of initial condisions) あるいは「初期値空間」と呼ばれる。ファ

イバー空間 E_J には名前がなくて不便だったが、岩崎克則氏に従って「相空間」と呼ぶことにしたい。講演題目もこの用語によっている。

用語のことはさておき、上述のリッカチの微分方程式の場合と異なり、パンルヴェ系の初期値空間がコンパクトでないことは注意しなければならない。相空間の上に拡張されたパンルヴェ系が完備であることは、リッカチの微分方程式の場合のように自明でなくなるからである。しかし、パンルヴェ自身が証明した（その不備を補って完全にしたのは福原満洲雄先生）「パンルヴェ方程式の動く特異点は極である」という事実から、完備性は従うのである。その逆、すなわち相空間上に拡張されたパンルヴェ系の完備性から、パンルヴェ方程式の動く特異点は極という性質が従うことも自明である。パンルヴェ系の相空間を知っていると、その上に拡張されたハミルトン系が完備であることを、パンルヴェ・福原の方法に従って証明することが大変見通し良くなる。

相空間について述べておくべきことは多いが、一つだけ「相空間 E_J 上の正則なハミルトン系は、（ある条件のもとで）第 J パンルヴェ系に限る」に注意しておこう。

3. ガルニエ系の相空間

$n \geq 2$ の場合のガルニエ系の相空間について若干の解説をしよう。この場合の方程式系は、$2n$ 個の正準変数 $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{C}^{2n}$ の n 個の時間変数 $t = (t_1, \ldots, t_n)$ に関する（フロベニウスの意味で完全積分可能な）ハミルトン系

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_k} = \frac{\partial H_k}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial y_j}{\partial t_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial x_j}, \qquad j, k = 1, \ldots, n$$

である。各時間変数 t_k にハミルトニアン H_k が対応していて、H_k は $2n$ 変数 (x, y) の多項式で、係数は領域 $B \subset \mathbf{C}^n$ において正則な n 変数 t の有理関数である。従って、ガルニエ系は $\mathbf{C}^{2n} \times B$ において定義されている。

パンルヴェ系の相空間の構成にならってガルニエ系の相空間を構成することは、非常に大変であることが容易に想像されよう。その困難を越えてこれまでに得られているのは、木村弘信氏による一般の n で $n+3$ の分割が $1+\cdots+1$ の場合と $n=2$ で 5 の分割が $2+1+1+1$ の場合、鈴木正樹氏による $n=2$ で 一般の 5 の分割の場合である。

ガルニエ系の相空間はパンルヴェ系の場合と同様に、すべての有理型解を捉える空間として、基本的には blow up の操作によって構成する。ただし、相空間上に拡張されたハミルトン系が完備であることはまだ証明されていないことは注意しておこう。完備であるに違いないと思うが。

すべての有理型解を捉えるのであるが、有理型関数は 2 つの正則関数の商であるから、$n \geq 2$ の場合は分子も分母も消える不定点が存在し得る。その場合には特異点の解消が blow up の操作でうまく進行しない場合がある。そのようなときに「変換は正準変換であるべし」として先に進むと、特異点がうまく解消されてしまうことを鈴木正樹氏の計算の相談にのっていて経験した。座標をどう選ぶかというこの種の研究では、理論はともかくうまく選んでしまえば勝ちなので、実践的に役にたつ指導原理は大事である。

一つの具体例で説明しよう：blow up を繰り返して元の変数 (x_1, x_2, y_1, y_2) から変数 (X, ξ, Y, Z) への変換を得、この新しい変数に関する微分方程式を書き下すと、方程式はほとんど特異点を持たないが、ある因子上の $\xi = 1$ というところだけ例外的に特異点が残るという状況が起こった。しかも blow up をすると、状況が複雑になるばかりである。ほとほと困って試みに $dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2$ を計算してみると、

$$
\begin{aligned}
&dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2 \\
=&dY \wedge dX + \{-\eta(\xi - 1) + X(\kappa_1 + XY)\}dZ \wedge d\xi \\
&+ \left\{(\kappa_1 + 2XY)Z - \frac{y}{\xi - 1}\right\}dX \wedge d\xi + \left(ZX^2 - \frac{x}{\xi - 1}\right)dY \wedge d\xi \\
=&dY \wedge dX + d\left[\{-\eta(\xi - 1) + X(\kappa_1 + XY)\}Z - \frac{XY}{\xi - 1} - \frac{\kappa_1}{\xi - 1}\right] \wedge d\xi
\end{aligned}
$$

が得られた。そこで

$$
W = \{-\eta(\xi - 1) + X(\kappa_1 + XY)\}Z - \frac{XY}{\xi - 1} - \frac{\kappa_1}{\xi - 1}
$$

とおくと、

$$
dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2 = dY \wedge dX + dW \wedge d\xi
$$

より X, ξ, Y, W は正準変数であるので、それに関する微分方程式を計算すると、見事に特異点 $\xi = 1$ が解消しているという訳であった。

概説的講演であっても、何か新しいこともなければならないと思い、$n = 2$ で 5 の分割 $1+1+1+1+1$ の相空間から、分割 $2+1+1+1$ の相空間への合流を多様体の変形として記述する話を用意していたが、時間もないし、余程の専門家でないと興味がないだろうと思って、省略した。この講究録でも省く。結果は論文とする積もりである。

ガルニエ系の相空間とは何かという大まかな話なので，重要な事実で触れられなかったことが多いし，重要な貢献をした人の名前も多くは洩れていることをお断りしておきます．下の参考文献も上の話をするときに思い浮かべていたものだけです．

参考文献

[1] K.Iwasaki,H.Kimura,S.Shimomura,M.Yoshida, From Gauss to Painlevé, Vieweg, 1990.

[2] T.Matano, A.Matumiya and K.Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II, J. Math. Soc. Japan, **51**(1999), 843-866.

[3] K.Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P.Painlevé, Jap. J. Math.,**5**(1979), 1-79.

[4] T.Shioda and K.Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, I, Funkcial. Ekvac., **40**(1997), 271-291.

[5] M.Suzuki, Spaces of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, J. Math. Soc. Japan, **58**(2006),1079-1117.