

西欧中世の無限級数論—オレム『ユークリッド幾何学に関する諸問題』の諸相

神戸大学・国際文化科学研究科 三浦 伸夫 (Nobuo MIURA)

The Graduate School of Intercultural Studies,

Kobe University

1. はじめに

ガリレイやコペルニクスなど近代科学の歴史的研究が進むにつれてその起源への関心が向けられるようになった。その運動の嚆矢はピエール・デュエムである。彼は 14 世紀中頃パリで活躍した、ビュリダンやオレムに近代科学の起源を認め、その研究成果を『レオナルド・ダ・ヴィンチ研究』や浩瀚な『宇宙の体系』に纏めあげた¹。しかし彼はそこでは原典（そのほとんどはラテン語手稿のままであった）の断片的な仏訳を掲載するのみであり、後続する研究者は自らオリジナルな手稿を再度参照するという作業をせねばならなかった。その研究方法に対して、アメリカのクラゲットは原典の写本を収集校閲し新たに編集し英訳をつけるという研究方法を確立し、その弟子の中から今日多くの成果が生まれている²。こうしてデュエムがオレムの重要性を説いて以来、今日オレムの原典編集の研究状況は中世当時の他の学者の作品をはるかに抜きでている。われわれはオレムの多くのラテン語原典とその近代語訳に今日容易に接することが出来るようになっている。

しかし従来中世科学史研究の中心が運動論や天文学であったためあまり言及されることはなかったが、その作品『ユークリッド幾何学に関する諸問題』も数学史上では重要な意味を持つのである³。本稿では、そこに含まれる問題 1, 2 の翻訳をし、オレムがこの書で無限級数をどのように論じているかを見ていく。

ところでニコール・オレム (1320 頃 - 1382) はフランスのノルマンジーに 1320 年頃生まれ、論理学者として有名なビュリダンのもとパリ大学で学んだ。のちにナヴァール学寮学寮長、そしてシャルル 5 世と交友をもち、リジュー司教などを歴任し、当時としてはよく知られた学者である。数多くの作品を残し、それは神学、貨幣論、自然哲学、倫理学など多方面にわたっている。業績としては、神学研究、王への政治的助言、アリストテレス著作仏訳、魔術占星術批判、自然科学研究などがある⁴。数学史でいえば、質の図形化を最初に行ったということで知られている⁵。

2. 『ユークリッド幾何学に関する諸問題』 (*Quaestiones super geometriam Euclidis*)

本書は研究上幾分不幸な運命にあった。それはそのテキスト編集に関するものである。このラテン語作品はすでに早くから中世数学史の泰斗ブザールによって編集公刊された [Busard 1961]。しかし編集当時現存する手稿は 2 点しか見つかっておらず、しかもそれら手稿は数学の素養のな

い写字生によって書かれ、内容に混乱が見られることなどから、ブザールの編集本のみではオレムの著作内容が必ずしも正確には把握できないことがあった。否、誤解すら生じかねないのであった。実際、ブザール自身もラテン語原文の後、英訳をつけるのではなく内容の要約と言い換えを英文で与えているにすぎないのである。さてその後新たに1本の写本が発見され、それを元にマードックは詳細なラテン語の正誤表を付けて書評として発表した⁶ [Murdoch 1964]。今日、オレムのその書を研究するにはこのマードックの書評が必須文献である。しかしその新たに発見された写本でさえ、誤写が散見し、また先の2点の写本と内容に関して相違がある⁷。したがって、『ユークリッド幾何学に関する諸問題』の完全なる全体像把握は現在困難な状況ではある⁸。そういった現状を認識した上で、本稿ではブザールの編集本とマードックの書評をもとにオレムの議論を検証していくことにする。

まず全体の構成を見ていこう⁹。論題は、数学と無限、無限級数、通約可能・通約不能、形相の強弱の図形化、角の性質であり、各問題は次の問いからなる([]内は原文にはなく訳者が補った)。

- [問題 1] 量は比例的諸部分に応じて無限に減少するかどうか
- [問題 2] 大きさに関して比例的諸部分による加法は無限に生じるかどうか
- [問題 3] 同じものが同じものに加えられたら全体は等しくなるということは正しいかどうか
- [問題 4] 二直線はつねに無限に延長されるか、つねに近づくか、決して交わらないかどうか
- [問題 5] 数学的想像によれば、無限円は存在するかどうか、そこから矛盾が生じないかどうか
- [問題 6] 矩形の対角線はその辺に等しいかどうか
- [問題 7] 矩形の対角線はその辺と通約可能かどうか
- [問題 8] 対角線は辺と通約可能かどうか
- [問題 9] [正方形の]対角線はその辺と通約可能かどうか
- [問題 10] 矩形は高さにおいて一様に非一様かどうか
- [問題 11] 線の質は平面のように想像可能 [図形化できる] かどうか
- [問題 12] 質は一様性のない非一様かどうか
- [問題 13] 一様な質と非一様な質とは等しいかどうか
- [問題 14] 一様な質あるいは一様に非一様な質は、どんなに非一様であろうとも任意の質に等しくなりうるかどうか
- [問題 15] 任意のものはその部分が白いのと同じだけ白いかどうか
- [問題 16] [質は]得られるあいだに非一様であり続けられるか
- [問題 17] 物体の回りの力の伝播や多性は、たとえば媒介の照明や何らかの影響や媒介中の種の多化のように、一様に非一様かどうか
- [問題 18] 角度は質であるかどうか
- [問題 19] 角度は、白色に関して想像されるように、平面や存在物に絶対的に内在する属性かどうか
- [問題 20] 角度はものかどうか

[問題 2 1] 以下は角度の量についての規則である

ところで本書は「問題集」(Quaestiones)という中世特有の形式をもった作品である。これは問題(quaestio)の複数形であるが、14世紀においては大学における講義内容を反映している。すなわち、教授は「~かどうか」に答える形で講義を行うのである。実際オレムのこの書は、1350年頃オレムがパリ大学神学部学生でかつ学芸学部で教えていたときの作品と解される¹⁰。オレムはまた中世では格段に「問題集」を多く残している学者でもある¹¹。そこではまず問題が与えられ、それに対して反対の立場から「反対異論」が紹介され、アリストテレスやカンパヌスなどの権威によってそれが補強される。次いでオレム自身の理性による論証に基づいて問題に対する回答が与えられ、最後に先の反対異論を論駁する、という形式である。この問題は相手を説得させるように常に然りか否かと言う形で進められるもので、古典を一字一句解説していく「注釈」とは厳密な意味では異なり、むしろ注釈から発してさらに話題を自由に展開していくものである。この問題形式で興味深いのは、その結論というよりは、議論中に話題にされる事柄、議論の進め方である。

次に問題のなかの無限級数にかかわる興味深い記述を箇条書きにしてまとめておこう。

3. 無限級数の議論

問題 1 は、「ある量からある割合の部分を取り除かれ、最初の残りから先と同じ割合の部分を取り除かれ、第 2 の残りから先と同じ割合の部分を取り除かれると無限に続けると、量は正確に取り尽くされる」、である。これは一般的に表記すると次のことに他ならない。

$$\bullet a/n + a/n(1-1/n) + a/n(1-1/n)^2 + \dots = a.$$

その後すぐ、 $a=1$ としたとき、ある割合 n を $1/2$ としても $1/1000$ としても和の値が同じになってしまうことの不合理さを指摘している。すなわち、 $1/2 > 1/1000$, $1/4 > 1/1000(1-1/1000)$, ... というのである。ところがそれに対して、「このことは無限には続かない」「というのも a はある部分に至ると、そこではもはや b の部分より大きくはなくなり」、として $1/2(1-1/2)^n > 1/1000(1-1/1000)^n$ とはならない n が存在することを具体的数字を挙げることなく主張する。実際、対数を使用して計算すると、 $n=10$ であれば不等号は逆転することがわかる。

問題 2 では、「より大きな不等な比」「より小さな不等な比」という用語が用いられる。前者は $A > B$ のときの $A : B$ をいう。まず、「等比やより大きな不等な比にある比例的諸部分によって無限付加が生じると、全体は無限になる。より小さな不等な比において生じるなら、たとえ付加が無限に生じても、[全体は]決して無限にはならない」、として次のことが主張される。

• $\Sigma (a/b)^n$ は、 $a > b$ 、 $a = b$ のとき無限、 $a < b$ のときは有限。

そのあと次の具体例を挙げている。

$$\bullet 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2.$$

$$\bullet 1 + 1/3 + 1/9 + \dots = 3/2.$$

ここできわめて重要な次の一般的規則を与えている。

$$\bullet 1 + 1/m + \dots + 1/m^i + \dots + \text{のとき、}$$

- (1) 2項の差、 $1/m^i - 1/m^{i+1}$ をとる。
- (2) $m^i(1/m^i - 1/m^{i+1}) = x/y$ とおく。
- (3) すると和は y/x となる。

この規則は数列の和が存在するときの求和法として重要な規則であるが、これが何に由来するのかは触れられていない。そしてその例として次を挙げている。

$$\cdot 1 + 1/3 + 1/9 + \dots = 3/2.$$

次に比例的諸部分ではないものにも言及する。

- ・ 比例関係にない不等なより小さな比で大きさを付加していくと、全体は無限になる。

例として調和数列の和を挙げる。

$$\cdot 1 + 1/2 + 1/3 + \dots \rightarrow \infty.$$

この証明は、

$$1/2 + 1/4 > 1/2$$

$$1/5 + \dots + 1/8 > 1/2$$

$$1/9 + \dots + 1/16 > 1/2$$

.....

として辺々加え、 $1/2$ の無限個の和が無限大になることに帰着するものである。最後は次のものである。

- ・ 比例関係的に行うなら全体は有限となる。

4. 『質と運動の図形化』 (*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*)

オレムには質の図形化を論じた標記の有名な著作がある。その第3部8 - 11章は次のテーマについて議論しているが、これは形相の強弱 (*latitudo formarum*) を図形化するものである [Clagett 1968] [オレーム 1994]。

8章 無限に至る、ある非一様なものの測定と強度

9章 他の例

10章 一様なものと一様に非一様な諸部分から構成された非一様なものの他の例

11章 有限の質あるいは速さの、無限に至る測定と強度

議論の核心は、線分が a の比に無限分割されていくとし、第2の部分の幅 (高さ) は第1の部分の幅の b 倍、等々と無限に続くときの総面積を求めるもので、図形化して説明される (ここで、 $0 < a < 1, 1 < b$)。これは質 (白さ、熱さ、速さなど) の運動を論じたもので、現代的に見れば無限級数運動の和を図形にを用いて求めるというものであり、次のようになる。

$$8章 \quad 1 + (1/2) \times 2 + (1/4) \times 3 + \dots + (1/2^{n-1}) \times n + \dots = 4.$$

$$9章 \quad 1 + (1/4) \times 2 + (1/4^2) \times 2^2 + \dots + (1/4^n) \times 2^n + \dots = 2.$$

$$10章 \quad \text{奇数番目} \quad 1 + (1/4) \times 2 + (1/4^2) \times 2^2 + \dots + (1/4^n) \times 2^n + \dots = 2.$$

$$\text{偶数番目} \quad 1/2 \times 3/2 + 1/8 \times 2 \times 3/2 + 1/32 \times 4 \times 3/2 + \dots = 3/2.$$

もとよりこれらの議論は純粹には数学的ではなく、また『ユークリッド幾何学に関する諸問題』

とは異なり比例部分の無限加法を図形を用いて議論したものである。さらに指摘できることは、ここでははじめから結果がわかっている場合を想定して議論が進められていることである。すなわちこの方法を用いても任意の無限級数の和は求めることはできないのである。しかし方法や表記法は異なろうとも、両者が同じ題材を議論していることは「比例的諸部分」を議論の中心にそえていることからわかる。運動論の議論はのちに Alvaro Thomas (16 世紀初頭活躍) 『3 種の運動の書』 (*Liber de triplici motu*, 1509) や、Juan de Celaya (c.1490-1558) 『アリストテレス自然学解説』 (*Expositio in libros physicorum*, 1517) などに受け継がれ、最終的には、そこから運動論が取り除かれ、純粋に数学的に (ただし幾何学的に議論しているが) 無限級数の和として Gregoire de St.Vincent (1584-1667) 『円の計測に関する幾何学的著作』 (*Opus Geometricum quadratura circuli et sectionum*) 1647 で展開されるのである [三浦 2007]。

5. 最後に

オレムの書は広く歴史上次のような意味を持つことを指摘しておこう。

まず中世ユークリッド『原論』注釈上の意味である。中世アラビア世界では数多くの『原論』注釈が書かれたが、他方中世ラテン世界は、アラビア語からのラテン語訳を除いて見るべきものがほとんどないのが現状である。独立した注釈ではアルベルトゥス・マグヌス(1193 頃-1280)による第 1 巻への注 [Lo Bello 2003], ロジャー・ベイコンのものとしてされる注など数少なく¹²、他に格段に影響を与えたカンパヌス(1220-1296)編集本に付加されたカンパヌスによる注 [Busard 2005] しかない。オレムの書は『問題集』の範疇に属するが広い意味では注釈と解してもよく、中世ラテン世界で注釈が数少ない現状で、当時『原論』がどのように読まれたか、何が問題とされたかをそこから垣間見せてくれる貴重な作品のひとつなのである¹³。ここでは本質的には無限が問題とされ、数学の技法的なことには関心が向けられていないことがわかる。

先にも述べたように、オレムのこの書の写本は 3 点しか現存しない。しかもそれは誤写が多いことから数学には精通していない写字生によって書き写されたようである。また中世大学では「問題集」は重要な役割を果たしたことが知られているが、神学や自然学の「問題集」は数多く存在する一方数学に関してはオレムのこの書だけしか知られていない。以上のことから、中世大学 (とりわけパリ大学) の学芸学部では 4 科のひとつとして幾何学の基礎的教育は行われてはいたが、それ以上のことはほとんどされなかったことがわかる。中世教育における数学の位置は高くはなかったのである。

また無限級数の和に関する作品は中世では運動論の中で「形相の幅」として盛んに議論されたが、運動を離れて数学的に論じられているのは管見によれば本書以外にない。この意味で本書は中世では数学史上稀で、純粋数学に関する独創的な作品なのである。

以上の 3 点から、逆にオレムの書の中世における特異性が明らかとなるのである。しかし本書の影響はほとんど見られず、孤高の作品となった¹⁴。

『ユークリッド幾何学に関する諸問題』問題 1、2 翻訳¹⁵

[問題 1]

ユークリッドの本について、「量は無限に減少する」とカンパヌスが述べたが、その若干のことに關して最初に問われる。最初に、「量は比例的諸部分¹⁶に応じて無限に減少するかどうか」が問われる¹⁷。

最初その否定が支持される[つまり、量は比例的諸部分に応じて無限に減少すること]。連続体においては同じ量の部分は無限にはなく、それゆえ同じ比も無限にはない。前件は明らかである。というのもそのときそれ[=連続体]は無限となってしまうからである¹⁸。後件も明らかである。というのも比例的諸部分は何れも何か他[の比例的諸部分]と同じ量の部分だからである。それゆえ同じ比を持つ[比例的諸]部分と同じ量を持つ[比例的諸]部分とは同一なのである。

[以上に対する]反論はカンパヌスによる注で明らかである¹⁹。

この問題に関しては次のことに注意せねばならない。最初は、比例的諸部分とは何か、あるいは同じ比を持つ部分とは何かである。第2に、どれほど多くの仕方でのこの諸部分が考察できるかである。第3に、いかにしてそのような諸部分に分けられうるかである。第4に、前提と結論とである。

第1に關しては、次のことが注意されねばならない。「比例的諸部分」とは、連比にあり、しかも比が同じであるときを言う。すなわち、「比例関係は少なくとも2つの比の間にある」と、第5巻定義9の[カンパヌスによる]注で言われているようにである²⁰。それゆえユークリッドは、「見出される最も少ない項の数は3であり、[比例関係の]過程が無限に続くので最大[の数]を与えることはない」、と言う²¹。以上から、1つの比例的諸部分も2つの比例的諸部分も単独で述べられることはなく、それらはすくなくとも3個あることになり、しかも無限個にもなりうるのである、ということが帰結する。そしてそれらは連比と呼ばれる。というのも、第1項が第2項に対するのは、第2項が第3項に対するようにあるからであり、たとえ多くのことがとられても同様である。

第2に關しては、次のように答えられる。そのような比例的諸部分による分割法は連比と同じだけあり、後者は比と同じだけあるので、よって無限個あると。たとえば、連続体の分割に關しては共通に述べられているように、第1が第2に対して2倍[に分割]、第2が第3に対して[2倍に分割]等々ということがありうる²²。また第1が第2に対して3倍[に分割]、第2が第3に対して3倍[に分割]等々ということもありうる²³。

第3に關して、線分と任意の連続体とはそのような[比例的]諸部分に分割されうるといわれる。線分は2つの方法で、すなわち両端から[分割されていき]、しかも任意のほうからそのような分割を始めることができる。平面は無限の仕方での[分割されていき]、立体も同じである。

第4に關して、最初の前提は、「ある比が無限に増大するとき、最大項に変化がないなら、最小項は無限に減少する」である²⁴。このことは明らかである。というのも、最大項の無限増大によるか、最小項の無限減少によるかの2つの仕方での、2[項]の間の比は無限に増大するからである²⁵。

第2の前提は、「もしある比にそれだけの比が加えられていき、それが無限に続くなら、その比は無限に増大するであろう」というものである²⁶。

第3の前提は、「ある大きさは比例的諸部分の付加で増大し、同じ大きさのものは比例的諸部分[の除去]で減少する」というものである。

それゆえ最初の結論は次のようになる²⁷。もしある量からある割合の部分を取り除かれ、最初の残り

から先と同じ割合の部分が取り除かれ、第2の残りから先と同じ割合の部分が取り除かれと無限に続けると、この方法による無限の減少では量は多くもなく少なくもなく正確に取り尽くされる²⁸。このことは次のことから明らかである。実際、反転比によって証明できるように²⁹、最初にとられたもの全体、第1の残り、第2の残り、第3の残り等々は連比にある³⁰。それゆえある比があり、次にそのうちのそれだけの割合であり等々と終わりなく続く。よって第2の前提によって、全体の残りに対する比は無限に増大する³¹。というのも、それはこれら[の比]から構成されているからである。他の項、全体を考えよ、は変化がないと考えられる。それゆえ第1の前提によって、残りは無限に減少し、全体の量自体は正確に取り尽くされるのである。

以上から次の系が帰結される。1ペダリスのあるものから半ペダリスが取り除かれ、さらに残りの量からその半分が[取り除かれ]、そしてさらに残りから半分が[取り除かれ]と無限に続くなら、ここから[全体では]正確に1ペダリスが取り除かれることになる³²。

第2の系はこうである。1ペダリスのあるものから1000分の1が取り除かれ、さらにこの残りのものから1000分の1が取り除かれる等々と無限に続くなら、ここから[全体では]正確に1ペダリスが取り除かれることになる³³。

しかしここで疑義が挟まれる。というのも第1の系から1ペダリスの半分、さらにこの残りのペダリスの半分と、そしてこれが無限に続くなら、全体は1ペダリスとなった。ここでこの全体を a とする。同様に第2の系によって、1ペダリスの1000分の1、そして残りから1000分の1と、そしてこれが無限に続くなら、1ペダリスとなったが、これを b とする。そのとき a と b とは[ともに1となり]等しいことは明らかである。ところがそうではないことが証明されるのである。というのも a の最初の部分は b の最初の部分より大きく³⁴、 a の第2の部分は b の第2の部分より大きく³⁵等々と無限に続くので、よって全体 a は全体 b より大きくなるはずだからである。

[このことは]次のように確証される。もし時間が比例的諸部分に分割され、ソクラテスが1時間に a 上を動き、プラトンが b 上を動き、彼らは a と b とをそれぞれ進むなら、そのときソクラテスは最初の比例的諸部分の時間においてはプラトンよりもより速く動き、同様に第2の部分でも、等々と最後まで続く。それゆえソクラテスはプラトンよりもより多くの距離を動き、よって a は b よりより大きくなる³⁶。

これに対して、前件すなわち「 a の最初の部分は[b の最初の部分]より大きい等々」が否定されて返答される。なぜなら、 a の最初の部分が b の最初の部分よりどんなに大きくあろうと、また a の第2の部分が b の第2の部分よりどんなに大きくあろうと、このことは無限には続かないからである。というのも a はある部分に至ると、そこではもはや b の部分より大きくはなくなり、比較されることもなく、より小さくなるからである。

このことから問題の解答は明らかである。すなわち任意の連続体は正確に無限個の比例的諸部分を持ちうる。しかも最初の[比例的]部分は現実に残りから分離され、こうして第2[の比例的部分]もと、無限に続くのである。

反対への議論に対して私は推論を否定し、証明に関して次のように言おう。比例的諸部分がどうであろうとそれは前項と等しい[比例的諸]部分であるが、同じ比にある後項とは同じ量ではない。[それらは等しくないのである。] というのもそのとき、「等しいものは互いに等しい」ということが帰結し

てしまうからである。

[問題 2]

「大きさに関して比例的諸部分による加法は無限に生じるかどうか」が次に問われる。

最初に否であることが議論される。というのも、大きさは現実に無限に増大可能であることが帰結することになるからである。この帰結はアリストテレス『自然学』第3巻³⁷に反し、またカンパヌスの本書[ユークリッド『原論』]の冒頭にも反する。後者は、「数は無限に増大するが減少はせず、大きさはその反対である」[と述べ]³⁸、大きさと数の間の差を認めている。

結論が[次のように]証明される。[大きさは]加法によって増大され、加法は無限に生じるので、[大きさは]無限に増大する。

反対が支持される。すなわちある大きさから分離できるものは何でも他のものに付加出来る。しかしある大きさから[比例的]諸部分を無限個除去でき、よってここからまた、[大きさは]無限に増大可能であることも証明される。

直角や鋭角についてあるいは2直角についての例が考察される。線分が線分上におかれ、2直角をなすとす。それらを a と b とし、線分 c が両端の一方、それを d としよう、に対して傾斜しているとする。そのとき次のことが議論される。運動によって角 b が減少すればそれだけ角 a は増大すると。このことは明らかである。というのも角 b から取り除かれたものは角 a に加えられるが、角 b は2倍、3倍、4倍[だけ取り除かれ]と無限に減少していくので、それゆえ角 a は無限に増大するからである。

この問題に対して最初に次のことを注意すべきである。「等比」とは、等しいものの間の比のことである。また「より大きな不等な比」とは、2に対する4のように、小さいものに対する大きいものの比である。また「より小さな不等な比」とは、4に対する2のように、より大きなものに対するより小さなものの比である。これらの名称は、上述のように相対的上置と下置の場合のように異なり³⁹、こうしてある量に対する付加は[この3種の比に応じて]3通りの仕方で生じるのである。

次に注意すべきは次のことである。等比やより大きな不等な比にある比例的諸部分によって無限に付加が生じると、全体は無限になるであろう⁴⁰。もしより小さな不等な比において生じるなら、たとえ付加が現実に無限に生じても、そこでは[全体は]決して無限にはならない⁴¹。その理由は、[このとき]全体は、仮定された加法が生じる項に対して、ある定まった有限の比をもつからであり、このことは後で明らかにされるであろう。

最後に注意すべきは、他方よりも小さく、他方に対してある比を持つものはすべて、他方に関して一つあるいは複数の「断片」あるいは「部分」⁴²であると言われる。このことはユークリッド[『原論』]の第7巻冒頭において明らかであり⁴³、これら[両者の]より小さいものは2数によって名づけられ、同じ箇所でも明らかにされているように、そのうちのひとつは「数えるもの」、もう一つは「名称づけるもの」⁴⁴といわれる⁴⁵。たとえば、1は2より小さいが、2の2分の1、また3の3分の1等々と言われる。そして2は3の3分の2である。また[2は]5の5分の2であり、それらはこのように書かれなければならない、2は「数えるもの」、5は「名称づけるもの」と呼ばれる。

最初の結論はこうである。もし1ペダリスの量がとられ、以下のように細分できる比で無限に付加が生ずるなら、すなわちそれに対して1ペダリスの2分の1、4分の1、そして8分の1というよう

に無限分割を2倍にし[それらを合わせ]ていくなら、全体は最初にとられた大きさの正確に2倍になるであろう⁴⁶。このことは次のことから明らかである。最初の問題すなわち先行の問題[=問題1]より明らかかなように、あるものからその部分が順に除かれていくなら、正確に最初の2倍が除かれることになる。それゆえ加えられても同じ理由で[同じようになる]。

第2の結論はこうである。ある量がとられ、それを1ペダリスとし、それにその3分の1が加えられ、その後その3分の1が加えられ等々と無限に続くなら、全体は1ペダリスと半分、すなわちセスクイアルテラの比⁴⁷になるであろう⁴⁸。これに関しては次の規則を知るべきである。第2[の部分]がどれだけ第1[の部分]と異なるか、第3[の部分]が第2[の部分]とどれだけ異なるか、他に關しても等々ということ、そしてこれ[両者の差]を名称付けによって名づけ、全体の最初にとられた部分に対する比は、「名称付けるもの」に対する「数えるもの」の比のようになる、ということをお我々は知るべきである。たとえば、最初の部分の3分の1である第2の部分は、最初の部分から3分の2少なく、それゆえ全体の最初の部分あるいは最初にとられた項に対する比は、3の2に対する比になり、これはセスクイアルテラである。

第3の結論は、比例關係にない不等なより小さな比で[大きさを]付加していくと、全体は無限になるが、もし比例關係的に行うなら、先に述べたように[全体は]有限となる、というものである。たとえば[前者の主張に關しては]、1ペダリスの量がとられ、それに最初の比例的時間に半ペダリスが加えられ、さらに3分の1、4分の1、5分の1と数の順序にしたがって無限に加えられるなら、全体は無限になると私は言う⁴⁹。このことは次のように証明される。すなわち任意の部分が半ペダリスより大きい量が無限に存在し、ゆえに全体は無限となる。前件は明らかである。というのも、3分の1と4分の1と[の和]は半ペダリスよりも大きく、5分の1から8分の1まで[の和は半ペダリスよりも大きく]、そして9分の1から16分の1[までの和は半ペダリスよりも大きく]等々と無限に至るまでも同様であるからである⁵⁰。

反論への議論。「大きさは...という結果となる」と言われるとき、「大きさは無限に増大されるであろう」は意味上[2つに]區別される。最初の意味は、増大するという行為に「無限に」をあてはめることであり、このことはそのような行為を無限回言葉で述べることであるが、連続して行わねばならず、したがってこの意味はより不適切であるが、その可能性はこの問題ではありうる。もう一つの意味はより適切である。というのも、[大きさが]2倍、4倍等々と無限に増大されていくからであるが、問題から明らかかなようにこれは間違いである。

反論のもう一つの議論は、角に關して「それだけ増大される...」と議論される時にである。これは區別されるべきであると私は言う。というのも「それだけ」とは算術比を示すことが出来るがそれは超過量に關して理解される。そして私は大前提⁵¹は認めるが、小前提⁵²は否定する。というのもそれ[=減少]は仮定された解法にはあてはまらないからである。他の意味では、「それだけ」は幾何比と呼ぶことが出来る。この場合、私は大前提は否定するが、それはbが減少するのと同じ比にはaは増大することはないだろうからである。たとえbが減少するのとaが増大するのは同じ量としてもである。そしてこの方法で任意のほかの量と質とから増大することが出来、このことは次のことから明らかである。角bが2倍ずつ減少するとき、角aは2倍ずつでは増大しない。逆に、線分cがdに到達した時、aは2倍で増大されたと言われるが、これは角bが半分にされていき、完全になくなってしまった

ときにのみ起こるのである。

このように問題の解答は明らかである。そしてこうして終わる。

【文献】

- [Lo Bello 2003] Lo Bello, Anthony (ed.)
The Commentary of Albertus Magnus on Book I of Euclid's Elements of Geometry, Boston; Leiden: Brill Academic Publishers, 2003.
- [Biard et Celeyrette 2005] Biard, Joël et Celeyrette, Jean
De la théologie aux mathématiques : l'infini au XIVe siècle, Paris : Belles lettres, 2005.
- [Busard 1961] Busard, H.L.L. (ed.)
Nicole Oresme: Quaestiones super geometriam Euclidis, Leiden, 1961.
- [Busard 2005] Busard, H.L.L. (ed.)
Campanus of Novara and Euclid's Elements, Stuttgart: Steiner, 2005.
- [Clagett 1959] Clagett, Marshall
The Science of Mechanics in the Middle Ages, Madison: The University of Wisconsin Press, 1959.
- [Clagett 1968] Clagett, Marshall
Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions: a Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities Known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum, Madison: The University of Wisconsin Press, 1968.
- [Clagett 1974] Clagett, Marshall
 "Oresme, Nicole", in *Dictionary of Scientific Biography* 10(1974), 223-230.
- [Grant 1966] Grant, Edward (ed.)
De proportionibus proportionum; and, Ad pauca respicientes, Madison: The University of Wisconsin Press, 1966.
- [Grant 1974] Grant, Edward (ed.)
A Sourcebook in Medieval Science, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1974.
- [Gribaudo 1976/77] Gribaudo, Luciana
 "La serie geometrica nell'opera <quaestione super geometriam Euclidis> di Nicole Oresme", *Rendiconti del Seminario Matematico* 35(1976/77), 147-158.
- [Maierù 1990] Maierù, Luigi
 "La teoria delle proporzioni nelle Quaestiones super geometriam Euclidis di Nicole Oresme", *Archives internationales d'histoire des sciences* 40(1990), 258-277.
- [Mazet 2003] Mazet, Edmond
 "La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne. 'Questions 1 et 2 sur la Géométrie d'Euclide'", *Revue d'histoire des mathématiques* 9 (2003), 33-80.

[Murdoch 1964] Murdoch, John Emery

“Review: Nicole Oresme. *Quaestiones super geometriam Euclidis*, ed. by H. L. L. Busard”,
Scripta Mathematica 27 (1964), 67-91.

[Rommevaux 2006] Rommevaux, Sabine

“Un exemple de Question mathématique au Moyen Âge”, *Annals of Science* 63(2006), 425-445.

[オレーム 1994] ニコル・オレーム

「質と運動の図形化」中村治訳、『中世思想原典集成』19 (中世末期の言語・自然哲学)、
平凡社、1994, 451-605.

[三浦 2007] 三浦 伸夫

「アルヴァロ・トマスの運動論」における数学---16世紀初頭パリにおけるオックスフォ
ードの数学の影響』、『国際文化学研究』28(2007), 67-103.

¹ Duhem, P., *Le Système du Monde. Histoire des Doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, 10 vols., Paris, 1913-1959 : *Études sur Léonard de Vinci*, Paris, F. De Nobele, 1906-13.

² [Clagett 1968] [Grant 1966]など。

³ 本書について主題的に研究したものには次のものがある。[Gribaudo 1976/77] [Maierù 1990] [Mazet 2003] [Murdoch 1964].

⁴ [Clagett 1974, 223-230].

⁵ ただし、この図形化を始めたのは誰かに関しては、オレームが最初であるとは現在のところ断定は出来ない。他の可能性は、スワインズヘッド(Richard Swineshead, 1350年頃活躍)の『計算の書』(*Liber calculationumcorum*)、さらにカサーリ(Johannes de Casali)の『変質の運動の速さについての問題』(*Question de velocitate motus alterationis*)で1350年前後のことである。しかし体系的に論じたという意味でならオレームが最初である[Clagett 1959, 332-33].

⁶ ブザールによる多くの誤解はマードックによって指摘されている。その中で最も重要な誤解は、ブザールが比例的諸部分を $a/n(1-1/n)^2$ ではなく $a/n^2(1-1/n)$ と解釈してしまったことである [Murdoch 1964].

⁷ ブザールが使用した手稿は、Vaticano, Lat. 2225, f.90-98v (15世紀)および Vaticano, Chigi F IV 66, f.22v-40 (14世紀)であり、前者が基本テキストとして選ばれている。新たにボージュアン(Guy Beaujouan)が発見し、マードックが紹介したのは Seville, Biblioteca Colombina 7-7-13, f.102v-112 (14世紀)。3点の写本の一部の写真が[Gribaudo 1976/77]に所収。

⁸ 10-15章の質の図形化の部分はクラゲットによって英訳つきで編集されている。これは完全なテキストが存在する『質と運動の図形化』を参照しながらの編集であり、この箇所は編集された『ユークリッド幾何学に関する諸問題』の中では信頼にたる箇所である[Clagett 1968, 521-575]。また問題1と問題2の一部がグラントによって英訳されている[Grant 1974, 131-135]。最近では問題1, 2の仏訳がマゼによって発表された[Biard et Celeyrette 2005, 243-252]。以上の英訳と仏訳とは解釈を含んだ訳であり、決定訳とはいたっていない。角についての箇所(問題18-21)は最近の論文で議論されている[Rommevaux 2006].

⁹ 問題10を問題1、問題11を問題2と述べているのが計4箇所あるので、本書は本来2部から構成されていたと考えられる[Clagett 1968, 522]。全体の内容は[Murdoch 1964]参照。

¹⁰ マゼによると、1348-49年に執筆され1353年に公表されたピエール・シフォンの『命題集』にオレームの問題10の一部の引用が見えるという [Mazet 2003, 35]。したがって成立年は、オレームが学生となった1342年頃から1350年頃のあいだとなる。

¹¹ アリストテレス『生成消滅論』『天体地体論』など、アリストテレスに関するものが多い[Clagett 1974, 229].

¹² ユークリッド『原論』の中世の伝統に関しては、Folkerts, M., *Euclid's Elements in the Middle Ages*

参照。これは Web 上で最新版が見られる(<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/folkerts/folkerts.html>)。

¹³ 中世には著作形式として、解説(exposition), 論考(tractatus), 任意討論集(quodlibeta-disputatio)などがあるが、そこでも『原論』が主題的に論じられることはなかった。

¹⁴ 知られている影響は、ピエール・シフオンの言及のみである。注 10 参照。

¹⁵ テキストは、[Busard 1961, 1-6] をもとに[Murdoch 1964]で補った。仏訳[Biard et Celeyrette 2005, 243-52]も参照した。「」は訳者が付け加えた。[]内は理解しやすくように訳者が補った。数字は原文では文字によって記されているが、煩雑さを避けるために訳文ではアラビア数字を使用した。また内容から判断して段落をつけた。

¹⁶ 「比例的諸部分」(partes proportionales)は無限を論ずる場合によく用いられる中世特有の用語である。オレムは問題 1 で定義を与えている。

¹⁷ カンパヌスは「量は無限に減少する。他方数にはこれはあてはまらない」(第 1 巻共通概念への注)と述べているが[Busard 2005, 59], ここではその前半の議論に「比例的諸部分に応じて」という限定をつけて論じている。

¹⁸ 連続体が無限個の部分から構成されるとすると、連続体自体も無限になってしまうから。

¹⁹ カンパヌスは、「連続体には無限個の比例的諸部分が含まれる」(第 5 巻定義 3)、と述べている [Busard 2005, 161].

²⁰ 「比例関係は少なくとも 3 項のあいだで構成される」 [Busard 2005, 167].

²¹ [Busard 2005, 167-68].

²² $(1/2)^n, n = 1, 2, 3, \dots$ というように次々と半分にしていくことを指す。

²³ $(1/3)^n, n = 1, 2, 3, \dots$ というように次々と $1/3$ 倍にしていくことを指す。

²⁴ 最大項とは前項を指し、最小項とは後項を指す。 a/b が無限に増大し、 a が不変であれば、 b は減少していくことを言う。

²⁵ ここでは前者のみがあてはまる。

²⁶ 比の合成である「比の比」のことを指し、「加えられ」は乗法の意味に解される。

²⁷ 実際に結論はこれしかない。したがって「最初の」は意味をなさない。

²⁸ $a/n + a/n(1-1/n) + a/n(1-1/n)^2 + \dots = a$.

²⁹ ブザールは *terminata* と読むが [Busard 1961, 2], 意味をなさないのでマードックの読みにしたがって *transmutata* とする [Murdoch 1964, 79]. これは $A : B = C : D$ のとき、 $A : C = B : D$ に変換することを言う。

³⁰ $a, a(1-1/n), a(1-1/n)^2, a(1-1/n)^3$.

³¹ $a/n(1-1/n) < a/n(1-1/n)^2 < a/n(1-1/n)^3 < \dots$.

³² $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$.

³³ $1/1000 + 1/1000(1-1/1000) + 1/1000(1-1/1000)^2 + \dots = 1$.

³⁴ $1/2 > 1/1000$.

³⁵ $1/4 > 1/1000(1-1/1000)$.

³⁶ これは先に述べた a と b とは等しいに矛盾する。

³⁷ 6, 206 $a - 208 a$.

³⁸ [Busard 2005, 59].

³⁹ グラントの解釈による [Grant 1974, 134]. $4 : 2$ は、 4 が 2 に対して上置し、より大きな不等性の比をなす。

⁴⁰ $a > b$ のとき $\sum (a/b)^n$ が無限となること。

⁴¹ $a < b$ のとき $\sum (a/b)^n$ が無限にならないこと。

⁴² 「断片」 *fractio*, 「部分」 *pars*.

⁴³ 「部分とは、大きな数が小さな数を数えるときの、その大きな数に対する小さな数である。そして数え上げるものによって数え上げられるものは、倍数と呼ばれる」(第 7 巻定義 12)[Busard 2005, 230].

⁴⁴ 「数えるもの」 *numerator*, 「名称づけるもの」 *denominator*.

⁴⁵ ただしカンパヌス版では「断片」は現れない。

⁴⁶ $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$.

⁴⁷ sesquialtera. 3対2のこと。

⁴⁸ $1 + 1/3 + 1/9 + \dots = 3/2$.

⁴⁹ $1 + 1/2 + 1/3 + \dots \rightarrow \infty$.

⁵⁰ $1/5 + \dots + 1/8 > 1/2$, $1/9 + 1/10 + \dots + 1/16 > 1/2$.

⁵¹ 角 a の増大するのは角 b の減少するのと同じ割合である。

⁵² 角 b は無限に減少する。