数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 220-231

フーリエの生涯と熱伝導の研究

明治大学付属中野八王子高等学校　西村重人 (Shigeto Nishimura)
Nakano-Hachioji Senior High School Attached to Meiji University

2007.8.24 京都大学数理解析研究所研究集会

1　フーリエの生涯

ジャン=バチスト=ジョセフ・フーリエ [Jean-Baptiste-Joseph Fourier] は 1768 年 3 月 21 日にパリの北東約 150km にある田舎町オーセール [Auxerre] で仕立屋の子として誕生した．しかし 1777 年に母を，1778 年初めには父も失い 10 歳になる前に孤児となった．彼はモワトン [Moitton] という婦人に引き取られ、聖エチエンヌ大聖堂のオルガン奏者を務める音楽家パレ [Joseph Pallais] が経営する小さな学校に通って，ラテン語とフランス語で最初の教えを受けた．フーリエはオーセールの司教にあずけられ，1780 年にベネディクト会の管理下にあるオーセールの士官学校 [École Royale Militaire] に入学した．この学校でベズーの「海兵と砲兵のための数学完全教程」[*Cours complet de mathématiques à l'usage de marine et de l'artillerie* (1780)](全 6 巻) を学び，1782 年 8 月 29 日 (14 歳) には修辞学と数学で賞を得た．その後、パリに出てモンテーニュ中学校 [Collège Montaigu] で修辞学と哲学の講座を受講し，17 歳まで勉強した．1785 年にオーセールに戻り，数学の授業を手伝ったりしていたが，1787 年 (19 歳) のとき見習い僧としてベネディクト会のサン・ブノワ修道院 [Abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire] に入り，他の修練士たちに数学を教えながら僧侶になるための準備を始めた．フーリエはもともと砲兵か技術者になることを志望していたが，貴族の出身ではなかったために僧職の道に進もうとしたのである．しかし 1789 年に大革命が勃発し 8 月 26 日に人権宣言が出されたため，フーリエは身分差別から開放された．当時 21 歳のフーリエは宗教上の誓いをたてることなく修道院を去り，パリ科学アカデミーに赴いて 12 月 9 日に一篇の論文を提出し，口頭発表した．アカデミーの当日の会議録には「フーリエが代数方程式に関する論文の講演を始めた.」と記されている．翌年の 1 月にオーセールに戻り，彼自身が教育を受けた士官学校で，歴史学・哲学・修辞学・数学・物理学をさまざまなレベルで教え，1794 年まで教鞭をとった．この時期は教育と幾らかの数学の研究にほとんど身をささげているが，それでも 1790 年 4 月にはオーセールの 13 人の若者とともに文学や学芸の修練を目的とする会 [Société Émulation] を設立して初代の会長になった．

この頃までは僧職の道を選ぶか，数学の研究の道を選ぶか迷っていたが，1793 年頃からは徐々に革命運動に踏み込んでいくことになる．革命後，オーセールはヨンヌ [Yonne] 県の県庁所在地となるが，ロワレ [Loiret] 県などの近隣諸県に軍隊を配備するための職務の一環としてオーセールからフーリエを含む 6 名が指名され，ロワレ県のオルレアン [Orléans] に派遣された．フーリエはオルレアンで与えられた職務の範囲を超えて革命運動に参加するようになる．これがもとでオルレアンでの任務は 1793 年 10 月末までとなった．翌年の 6 月にオーセールに戻ると一連の革命

運動が原因となって逮捕された．いったんは釈放されるが7月に再び逮捕される．しかしロベスピエール [Maximilien François Marie Isidore de Robespierre (1758-1794)] の死刑執行による恩赦で8月には釈放され自由になった．

1795年1月20日，高等師範学校 [École Normal] が開校されるが，この学校は準備が不十分であったため評判が悪く，わずか3ヶ月で閉鎖されることになる．フーリエは1794年のうちにこの学校の生徒に推薦され，入学後ラグランジュ，ラプラス，モンジュに学んだ．フーリエはコレージュ・ド・フランス [Collège de France] で教えるとともに，ラグランジュ，ラプラス，モンジュらと良好な関係を保ちながら数学の研究を始めた．フーリエを高く評価していたモンジュは1795年5月19日に中央公共事業学校 [École Centrale des Travaux Publiques] の教員にフーリエを推薦した．フーリエはここで画法幾何学などを教えるようになるが，以前の政治行動と逮捕の影響から，1795年6月7日にまたしても逮捕されることになる．しかし，彼の生徒たちとラグランジュ，ラプラス，モンジュの嘆願，そして政治状勢の変化もあって8月には釈放され，9月にはこの学校に戻った．9月18日に校名が諸工芸学校 [École Polytechnique] と改められ，フーリエは10月28日にこの学校の教員に正式に任命された．1797年，フーリエは解析学と力学を教えていたラグランジュの後任として教授となり翌年1798年までこの職にあった．

1798年，フーリエはナポレオン [Napoléon Bonaparte (1769-1821)] のエジプト遠征に科学顧問として，モンジュやマリュスとともに同行した．エジプトでは考古学上の調査を行ったり，カイロ学士院の創設に力を注ぎ，カイロ学士院の書記官にも選出された．ナポレオンは1799年にパリに帰還するが，フーリエはその後も2年間エジプトに残った．

1801年，フーリエはフランスに帰還し，再び諸工芸学校の解析学の教授に戻ったが，翌年2月にナポレオンはフーリエをイゼール [Isère] 県の知事に任命した．パリのアカデミックな世界を離れるのは望みではなかったが，ナポレオンの要求を断ることはできず，グルノーブル [Grounoble] に赴き，イゼール県の知事に就任した．フーリエの県知事としての行政手腕は瞠目に値するものがあり，グルノーブルからイタリアのトリノ [Torino] へ至る道路を開いたり，ブルゴアン [Bourgoin] の沼地を干拓するなど幾つもの功績を残した．この間にエジプトでの調査をもとにした論文 “Recherches sur les sciences et gouvernement de l'Egypte (エジプトの科学と政治に関する研究)” を書き，のちにエジプト考古学の重要な文献となった「エジプト誌」[*Description de l'Egypte*](1809) に掲載するとともに，この書物の “Préface historique (歴史的序文)” を執筆した．さらに，1802-3年頃からは熱伝導の研究に励み，その結果を1807年にフランス学士院 [Institut de France][*1] に提出した[*2]．1803年にはレジオンドヌール勲章騎士章 [Chevalier de la Légion d'Honneur] を受賞し，知事としてのこれまでの功績で1808年に男爵となった．

1807年にフランス学士院に提出された熱伝導に関する論文はラグランジュ，ラプラス，モンジュ，ラクロアによって審査されたが，この論文に含まれる数学的部分は議論の的となった．熱伝導に関する問題は十分に解決されていないとして，学士院は1811年に「熱の伝播法則の数学的理論を与え，その理論の帰結を精密な実験と比較せよ.」という懸賞問題を提示した．フーリエはこの問題に応え長大な論文を9月11日に提出し，1812年1月に学士院の科学アカデミーから賞を得るが，それにもかかわらず十分な評価は得られなかった[*3]．賞を勝ち取った論文がすぐには

[*1] 1795年10月25日に設立された国立学術団体で五つのアカデミー (アカデミー・フランセーズ／碑文・文芸アカデミー／科学アカデミー／芸術アカデミー／倫理・政治学アカデミー) からなる．

[*2] “Sur la propagation de la chaleur (熱の伝播について)”. その後フーリエ自身によって撤回されたとされているもの．

[*3] ダルブーによるフーリエ著作集第1巻の「序文」に見ることができる．

出版されなかったのはおそらくそのためである．こうして1807年論文も1811年論文も公になる機会を逸した．

1814年，ナポレオンが退位し，ルイ18世が即位すると，フーリエは国王ルイに忠誠を誓って知事職を続けた．しかし，1815年3月ナポレオンがエルバ[Elbe]島を脱出し，グルノーブルにやって来るとフーリエは再びナポレオンに忠誠を誓った．3月7日にイゼール県知事は免職になるが，3月11日にはローヌ[Rhône]県知事に任命された．しかしこの職は短く，5月3日に罷免された．6月にはナポレオンの百日天下が終わり，ルイ18世が復位したためフーリエの立場は悪くなり，困窮した生活を余儀なくされるが，そんな折，救いの手を差し伸べたのは，フーリエが諸工芸学校で教えた生徒であり，エジプト派遣軍の同僚であったセーヌ[Seine]県知事のヴォルヴィック[Chabrol Count de Volvic (1773-1843)]であった．彼はフーリエをセーヌ県の統計局長に任命してくれたのである．

1816年5月27日，フーリエは科学アカデミーの会員に推薦されるが，ルイ18世が承認しなかったためアカデミー会員にはなれなかった．しかし同じ年にパリ学術振興会[Société philomathique de Paris]の会員には選出された．ところが翌1817年4月5日にアカデミー会員の一人ロション[Alexis Marie Rochon (1741-1817)]が亡くなったため，再びアカデミーの会員となるチャンスが訪れた．フーリエはアカデミー会員の選挙に出馬し，5月に会員に選ばれた．このときはルイ18世の抵抗に遭うことはなかった．1816年から1820年までの4年間は多数の科学論文を執筆し，もっとも研究活動の盛んな時期であった．

1822年はフーリエにとって二つの意味で重要な年となった．一つは今までほとんど公にされることのなかった彼の熱伝導の研究を一冊の書物「熱の解析的理論」に集大成して出版したこと．もう一つは科学アカデミーの終身書記であったドランブル[Jean Baptiste Joseph Delambre (1749-1822)]が8月に亡くなったために終身書記となるチャンスが訪れたことである．12月18日，フーリエは科学アカデミーの終身書記に選出され，翌年の1月6日に正式にこのポストに就いた．1823年4月には医学アカデミー[Académie de médecine]の準自由会員，12月にはイギリスの王立協会[Royal Society]の外国人会員にも選出された．

フーリエは1811年に賞を得た論文を二部に分けて，1824年と1826年に出版した．このうち，1824年に出版された第1部は「熱の解析的理論」に非常に近い形になっているという．「熱の解析的理論」が1822年に出版されたあとも1811年論文の出版にこだわったのは，ダルブーが述べている通り，先取権を明確にする目的にほかならない．フーリエはドランブルが終身書記を務めているころからこの論文の出版準備をしており，早く公にしようとしていたことが「熱の解析的理論」の「まえがき」に読み取れる．「熱の解析的理論」は二つの論文，すなわち1807年論文と1811年論文を経て完成された作品だが，出版の順序はまったく逆で，1807年論文は1972年に文献[4]に掲載されて初めて公にされた．

1826年，フーリエはアカデミーフランセーズ[Académie française]*4の会員に選出され，1829年にはサンクトペテルスブルク科学アカデミーの名誉会員にもなったが，1830年5月16日，心臓発作で亡くなった．62歳であった．

*4 フランス学士院のアカデミーの一つで，フランス語の保存と純化，標準フランス語の辞書編集などを行う．

2　熱伝導の研究について

フーリエが生前に出版したただ一つの著書「熱の解析的理論」の「まえがき」には自然哲学の目的，熱伝導の研究目的，熱伝導の微分方程式の解のあり方，解析学の研究とその重要性，自らの理論の展開の仕方，熱伝導の研究の経緯などについてフーリエの思いが綴られている．それらの幾つかは本論の中に繰り返し語られ，そこから科学者としてのフーリエの姿を垣間見ることができる．以下は「熱の解析的理論」からの抜粋である．

○自然哲学の目的，熱伝導の研究目的について

「第一原因は我々には不可知である．しかし，それらは観察によって発見することのできる簡単かつ恒常的な諸法則に従っている．それらの法則を研究することが自然哲学の目的である．

熱は重力と同じように宇宙のすべての物質に入り込み，その放射は空間のすべての部分を占めている．本書の目的はこの基本要素が従う数学的法則を述べることである．この理論は今後一般物理学の最も重要な一部門を形成するだろう.」[まえがき]

「熱の効果は数学解析の助けがなければ発見することのできない恒常的な諸法則に従っている．これから展開しようする理論はこれらの法則を明らかにすることを目的としている．この理論は熱伝播に関するすべての物理学的研究を積分計算の問題に帰着させるが，その根幹をなす原理は経験によって与えられる.」［第１条］

「熱の性質については不確かな仮説しか立てることができないが，熱の効果を支配する数学的法則の知識はどんな仮説とも無関係である．この知識を手にするには一般的観察が示した主だった諸事実の注意深い考察だけが要請される.」[第 22 条]

フーリエの自然科学ととりわけ熱伝導に関する研究姿勢を明確にしている点が注目される．アリストテレスのいう自然の第一動作原因は知りえないが，経験・観察に基づいて熱の性質を捕らえ，熱伝導の法則を数学的に究明するのが目的である．

○熱伝導の方程式について

「熱の効果は特別な秩序の現象をなし，運動と平衡の諸原理で説明することはできない．人は以前からこれらの効果の幾つかを測定するのに適した精巧な道具を所有し，貴重な観察結果を集めてきた．しかし，こうして知ることができたのは部分的な結果だけであって，それらをすべて包括して説明する法則を数学的に示すことではなかった.」［まえがき］

「熱伝播の微分方程式は最も一般的な諸条件を表し，物理学の問題を純粋解析学の問題に帰着させるが，まさにこれがこの理論の目的である.」［まえがき］

「熱の運動方程式は，発音体の振動や液体の最終振動を表す方程式と同じように，ごく最近発見された微分・積分計算の一部門に属するが，それを完成することは非常に

重要である．これらの微分方程式を立ててから，それらの積分を得なければならないが，その道筋を作っているのは，一般表示式から，与えられたすべての条件に従う固有解へと移行する手順である．この難しい研究は新たな諸定理に基づく特別な解析手法を要求したが，ここでそれらの定理の対象を知る必要はない．そこから導かれた方法は解の中に曖昧さや不定性を何も残さない．この方法は最終的な数値的応用，すなわちすべての研究に必要な条件にまでこれらの解を導いていくが，これがなくては無用な変形に至るだけである.」[まえがき]

「熱伝播の一般方程式は偏微分方程式である．その形は非常に簡単ではあるが，既知の方法はそれらを積分する一般的手段を何一つ与えてくれない．それゆえ，一定時間後の温度の値をそこから導くことはできなかった．しかしながら，積分計算の結果の数値的解釈は必要である．自然科学に解析学を応用する際，非常に重要になるのはその数値的解釈の仕上がりの度合いなのである．完成度の高い数値的解釈が手に入らない限り，問題の解答は不完全である．言い換えると，役に立たないというほかなく，発見しようとしていた真理は物理学の問題それ自体にというよりも，解析学の諸公式の中に潜んでいると言えるのである.」[第 13 条]

熱伝導の微分方程式の解を数値的な利用が可能となるような形で解かなければ，この微分方程式を解いたことにはならないという強い主張を読み取ることができる．

○解析学 (数学) について

「その最も大きな特質は明晰さである．この学問は不明瞭な概念を表すような記号をもたない．この学問は極めて多様な現象を比較し，それらを結び付ける秘められた類似性を明らかにする．空気や光のように，物質があまりに微小なために我々の目に見えないときも，物体が広大な宇宙の遠く離れたところに置かれたときも，何世紀にもわたる各時代の空模様を知りたいときも，重力と熱の作用が地球内部のまったく近寄ることのできない深さに及んでいるときも，数学解析はこれらの現象の諸法則を捕らえることができるのである．数学解析は諸法則を我々に提示し，測定可能にし，さながら一生の短さと感覚の不完全を補うためにあらかじめ準備されていた人間理性の力であるかのようである．そして，さらにもっと注目すべきことは，数学解析はあらゆる現象の研究において歩を一にしているという事実である．数学解析は，あたかも宇宙の構想の統一性と単純性を証明し，自然のあらゆる原因をつかさどる不変の秩序をよりよく明らかにするためであるかのように，諸現象を同じ言語で解釈する.」[まえがき]

「自然の奥深い究明は数学的発見の最も実りの多い源である．この探求は明確な目的を研究に与えたとき，曖昧な問題や結果の出ない計算を排除する利点をもつだけではない．それは解析学自身を形成し，その原理を発見するための確実な手段でもある．我々にとって解析学の原理を知ることは最も大切で，この学問はそれを常にもち続けることになる．なぜなら，解析学の基本原理は自然の効果すべてに繰り返し現れるものだからである.」[まえがき]

○理論の論じ方について

「我々は，この書物において，熱の理論のすべての原理を明らかにし，すべての基本問題を解いた．もっと簡潔な形でこれらを説明し，簡単な諸問題を省き，最も一般的な諸結果を最初に示すこともできたであろう．しかし，我々はこの理論の始まりそのものとその後のさまざまな進展の様子を見てほしかったのである.」［まえがき］

フーリエはフーリエ展開公式を得る際，まず最初に奇数羃だけを含むべき級数に展開できる関数だけを対象にして議論を進めた．フーリエは奇妙だが巧妙な計算を実行してフーリエ展開公式を得た．フーリエはこの方法にこだわりをもっていた．実際1807年の論文にもすでに現れている．1811年の論文の第1部*12は「熱の解析的理論」とほとんど変わることがないというダルブーの言葉を信じれば，この論文にもこの手法は掲載されていたと思われる.「我々はこの理論の始まりそのものの様子を見てほしかった」と語っているのはこうした論じ方を指しているのである．しかしそのために論文が冗長になり審査員にはよい印象を与えなかったであろう．

○熱伝導の研究の経緯について

「熱伝導に関する我々の最初の解析的研究は，離れた位置に置かれた物体間の温度分布を対象にしていた．これらは第4章・第2節に収められている．本来の理論を構成する連続物体に関する諸問題は数年後に解かれた．この理論は1807年末にフランス学士院に提出した原稿*2の中で初めて提示され,「学術振興会科学紀要」(1808年112〜116ページ) にその要約*5が発表された．この論文に，級数の収束・無限角柱における熱の拡散・その真空中への熱放射・主な諸定理を感覚的にとらえるために適した作図法・地球表面の周期的熱運動の解析に関する，十分に拡張されたノートを次々付け加えて提出した．熱伝播についての第二論文は1811年9月28日に学士院の文書館に収められた．それは前の論文とすでに手渡されたノートからなる．その論文では，幾何学的作図と，物理学の問題に必ずしも関係をもたない解析学の細部を省略し，表面の状態を表す一般方程式を付け加えた．この第二の著作は1821年のうちに印刷に附され，科学アカデミーのコレクションに加えられた．これは何の変更も加筆もせず印刷された．その本文は，すでに学士院に提出され，蔵書の一つになった原稿と一言一句一致している．

この論文とそれに先立ついろいろな著作の中には，本書に収録されなかった幾つかの応用について最初の説明が見いだされる．これらは今後の諸論文でさらに拡張され，可能であればもっと明瞭に論じられるであろう．これらの問題に関する研究成果は，すでに公にされた幾つかの論文にも示されている.「化学と物理の年報」に掲載された要約*6はそれらの研究の全容を示している (1816年第3巻350〜376ページ)．この年報に熱放射に関する二つのノート*7を発表した (1817年第4巻128〜145ページと1817

---

*5 "Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, Extrait (諸固体における熱の伝播についての論文，要約)" *Nouveau bulletin des sciences, par la Société Philomatique de Paris* (パリ学術振興会による新科学紀要), 第1巻 (1808),p.112-116,[著作集第2巻 p.213-221]. ポアソンによる要約である.

*6 "Théorie de la chaleur (熱の理論)" *Annales de chimie et de physique* (化学と物理の年報), 第3巻 (1816),p.350-376.

*7 "Note sur la chaleur rayonnante (放射熱についてのノート)" *Annales de chimie et de physique* (化学と物理の年

年第 6 巻 259～303 ページ).

同じ論文集の他のさまざまな論文は，理論と観察から生じる確固とした諸結果を示している．これらの年報の有名な編集者たち*8を措いて，熱学の知識の有用性と汎用性を最も高く評価できる人物はいない．

「学術振興会科学紀要」(1818 年 1～11 ページと 1820 年 58～70 ページ) には，一定に保たれたり，変動したりする住居の温度に関する論文の要約*9と，地球の温度に関する我々の解析の主な諸結果の説明*10が出ている.」[まえがき]

フーリエがいつから熱伝導の研究を始めたかを特定する資料はないが，研究の開始は 1802 年頃らしい．最初の研究結果は「離れた位置に置かれた物体間の温度分布を対象にしていた」が，これは 1807 年論文の冒頭に論じられている．ボタチーニによれば「フーリエは，約 1802-3 年の初めの研究では明らかにこの点で止めていて，連続な物体にまで拡張することを考えなかった」(文献 [2]p.71) のだが，1807 の論文では連続物体の温度分布の問題を解くことに発展している．その解からフーリエ展開公式が導かれる．しかし他方では薄板の定常温度の考察からこの公式を導いている．その導き方は，当時すでに知られていたべき級数展開公式からフーリエ展開公式を得るという方法であった．この方法に欠陥があることはフーリエ自身も気づいていたに違いないがフーリエはこの方法にこだわった．

1811 年に書かれた第二論文は 1807 年論文を修正・増補したもので 1812 に賞を受けた．ポアソンをはじめとする熱伝導の研究が進みつつあることもあってフーリエとしてはどうしても先取権を主張したかった.「本文にはこの第二の著作は 1821 年のうちに印刷に附され，科学アカデミーのコレクションに加えられた」とあるが，これはフーリエが「熱の解析的理論」が出版されるころには科学アカデミーの論文集の中に加えられているだろうという予想のもとで書いたことでこの時点では出版されていなかった．このあたりに焦りが伺える．この論文は，フーリエが科学アカデミーの終身書記となってから，2 つに分けられて第 1 部*11が 1824 年，第 2 部*12が 1826 年に初めてアカデミーの論文集に掲載された．

○「熱の解析的理論」の続巻について

「球における熱運動の問題の中には地球の温度の問題もある．後者の問題を幅広く論じるために，我々はこれを別の章のテーマにした.」[第 304 条]

報), 第 4 巻 (1817),p.128-145,[著作集第 2 巻 p.331-348],"Questions sur la théorie-physique de la chaleur rayonnante (放射熱の物理学的理論についての諸問題)" *Annales de chimie et de physique* (化学と物理の年報), 第 6 巻 (1817),p.259-303,[著作集第 2 巻 p.349-386].

*8 ゲイ・リュサック [Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850)] とアラゴ [Dominique François Jean Arago (1786-1853)].

*9 "Sur la température des habitations et sur le mouvement varié de la chaleur dans les prismes rectangulaires (住居の温度について，および，四角柱における熱の変動運動について)" *Bulletin des sciences, par la Société Philomatique de Paris* (パリ学術振興会による科学紀要)(1818),p.1-11,[著作集第 2 巻 p.223-239].

*10 "Extrait d'un mémoire sur le refroidissement séculaire du globe terrestre (古来からの地球の冷却に関する論文の抜粋)" *Bulletin des sciences, par la Société Philomatique de Paris* (パリ学術振興会による科学紀要)(1820),p.58-70.

*11 "Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides (いろいろな固体における熱の運動についての理論)" *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (王立科学アカデミー論文集) 第 4 巻 (1819-1820)[1824 年出版],p.185-555.

*12 "Suite du mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides (いろいろな固体における熱の運動についての理論・続篇)" *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (王立科学アカデミー論文集) 第 5 巻 (1821-1822)[1826 年出版],p.153-246,[著作集第 2 巻 p.1-94].

「別の章」というのは「熱の解析的理論」には含まれなかったが，フーリエは「熱の解析的理論」の続巻の出版を計画していたことは明らかである．1825年に出された彼の論文[*13]には次のような一文がある：

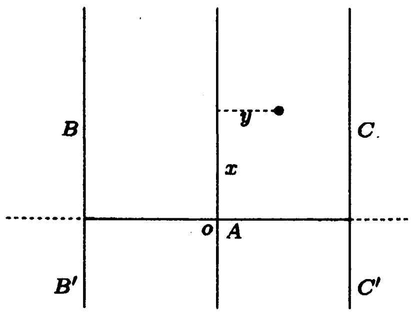
> 「近いうちに,『熱の物理学的理論』というタイトルで『解析的理論』の主要な適用例を出版して，私は放射熱に関する諸命題を再び提示するであろう．…，この第二の書物には，放射熱の理論といろいろな適用例の他にも地球の温度の一般的問題，液体中の熱運動の微分方程式の証明が含まれている.」

3　フーリエ展開公式の発見と立証

フーリエは熱伝導のモデルを作りそれをもとにして熱伝導の問題を数学的に解いた．フーリエは,「熱の解析的理論」のまえがきで「理論の始まりそのものとその後のさまざまな進展の様子を見てほしかった」と言っている通り，自らが辿った研究の過程をこの書物の到る所に書き綴った．特に注目されるのは，フーリエ展開公式を発見し、それを立証しようとしたところである．フーリエは次のような二つの熱伝導のモデルを考えた．

熱伝導のモデル1 — 薄板における定常温度

フーリエは薄板における定常温度のモデルを考えた．下の図で $B'AC'$ は熱源で辺 A を温度1に保ち，辺 B と辺 C は温度0に保たれていると仮定する．薄板 BAC が定常状態になったときの温度分布を考察しようというのである．



第164条，図7

それは微分方程式を解くことに帰着する：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

$$\varphi\left(x, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\varphi(0, y) = 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

[*13] "Remarques sur la théorie mathématique de la chaleur rayonnante (放射熱の数学的理論に関する諸注意)", *Annales de chimie et de physique* (化学と物理の年報), 第28巻 (1825),p.337-365,[著作集第2巻 p.425-449].

(1),(2) を満たす解として

$$v = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + de^{-7x}\cos 7y + \cdots \tag{4}$$

をとってから (第 169 条)，(3) を満たす解を得るために

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \cdots \tag{5}$$

の係数 $a, b, c, d, \cdots$ を決定する (第 171〜176 条)．そうして

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \frac{1}{9}\cos 9y - \frac{1}{11}\cos 11y + \cdots \tag{6}$$

を得る (第 177 条)．$\frac{\pi}{4}$ の三角級数展開には特別にこだわっており，第 179〜180 条，第 185〜188 条，第 188 条においてそれぞれ別の方法で導出がなされている．フーリエはこのように異なる方法で何度も確認作業を行って $\frac{\pi}{4}$ の三角級数展開の正しさに確信を深めたのであろう．

さらに (3) の右辺を定数ではなく任意の関数に一般化する過程でフーリエ展開公式が得られるが，最初は冪級数展開式が奇数冪を含む関数をフーリエ正弦級数に展開する形で論じられた (第 207〜219 条) が，それが任意の関数についても可能であることを主張して，フーリエ正弦級数

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \sin x\int_0^\pi \varphi(x)\sin x\,dx + \sin 2x\int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x\,dx \\ + \sin 3x\int_0^\pi \varphi(x)\sin 3x\,dx + \cdots + \sin ix\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix\,dx + \cdots\end{aligned} \tag{7}$$

が得られる (第 219 条)．これもまた三角関数の直交性を用いて再確認がなされる (第 221 条)．この公式で $\varphi(x) = 1$ とした場合，すなわち

$$\frac{1}{4}\pi = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \cdots \tag{8}$$

に言及しているが (第 222 条)，これも予め第 184 条で同じ級数を得ていて確認を忘れていない．フーリエ余弦級数については直交性によってのみ得られる (第 224 条)：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)\,dx + \cos x\int_0^\pi \varphi(x)\cos x\,dx \\ + \cos 2x\int_0^\pi \varphi(x)\cos 2x\,dx + \cos 3x\int_0^\pi \varphi(x)\cos 3x\,dx + \cdots\end{aligned} \tag{9}$$

そしてフーリエ展開公式

$$\begin{aligned}\pi F(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx \\ &+ \cos x\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos x\,dx + \cos 2x\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos 2x\,dx + \cdots \\ &+ \sin x\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin x\,dx + \sin 2x\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin 2x\,dx + \cdots\end{aligned} \tag{10}$$

を得るに到る (第 233 条)．

熱伝導のモデル2 — 離散物体間の熱伝導

もう一つのモデルは，フーリエが「最初の解析的研究は，離れた位置に置かれた物体間の温度分布を対象にしていた」と述べている通り，離れた位置に置かれた物体間を無限小片 ω が往復運動して熱を伝えるというものであった．この考えのもとで n 個物体を円周上に並べて時間 t が経過した後の各物体の温度を定めようというのである．各物体の初期温度を $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$，質量を m，伝導度を K とするとき，時間 t が経過した後の j 番目の物体の温度は

$$
\begin{aligned}
\alpha_j = \frac{1}{n}\sum a_i &+ \left(\frac{2}{n}\sin(j-1)\frac{1\cdot 2\pi}{n}\sum a_i \sin(i-1)\frac{1\cdot 2\pi}{n}\right.\\
&+ \left.\frac{2}{n}\cos(j-1)\frac{1\cdot 2\pi}{n}\sum a_i \cos(i-1)\frac{1\cdot 2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m}t \operatorname{vers}\frac{1\cdot 2\pi}{n}}\\
&+ \left(\frac{2}{n}\sin(j-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\sum a_i \sin(i-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right.\\
&+ \left.\frac{2}{n}\cos(j-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\sum a_i \cos(i-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m}t \operatorname{vers}\frac{2\cdot 2\pi}{n}}\\
&+ \cdots
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる (第 273 条)．フーリエは研究のごく初期の段階ではここまでの結果でとめていたが，1807 年の論文で連続物体，すなわち円環体の温度分布の問題を解決するに到っている．「物体の個数 n を次第に増やし，同時に各物体の長さを同じ比で減らして，この一系の物体の長さの総和が一定値 2π になるという状勢を想定しよう．したがって，物体の個数 n は次第に $2, 4, 8, 16, \cdots$，物体の各々の長さは $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \cdots$ となる．熱の伝わり易さも，物体 m の個数が増加するのと同じ割合で増大すると考えなければならない．したがって，物体が二つしかないとき K が表す量は，物体が四つのときは二倍になり，八つのときは四倍になるというふうになる．この量を g で表せば，数値 K は次々に $g, 2g, 4g, \cdots$ に置き換えられることがわかる．そこで連続物体について課すべき前提に移ると，今度は m の代わりに限りなく小さな各物体の値，すなわち要素 dx を書くことになる．また物体の個数 n の代わりに $\frac{2\pi}{dx}$，K の代わりに $\frac{n}{2}g$，すなわち $\frac{\pi g}{dx}$ を設定することになる．

初期温度 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_i, \cdots, a_n$ について言うと，これらは弧 x の値に依存する．そこで，これらの温度をある一つの変化量が次々ととる状態と見れば，一般値 a_i は x の任意関数を表すことになる．この場合，添字 i は $\frac{x}{dx}$ に置き換えられる．量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ について言えば，これらの温度は二つの量 x と t に依存する変化量である．この変化量を v で表すと，$v = \varphi(x,t)$ という形になる．物体の一つが占める場所を示す添字 j は，$\frac{x}{dx}$ に置き換えられる．このように環の形をした連続物体を作る無限個の薄層が手元にある場合，この物体に対して前の解析手法を適用するには，諸量

$$n,\quad m,\quad K,\quad a_i,\quad i,\quad \alpha_j,\quad j$$

の代わりに，それらに対応する量，すなわち

$$\frac{2\pi}{dx},\quad dx,\quad \frac{\pi g}{dx},\quad f(x),\quad \frac{x}{dx},\quad \varphi(x,t),\quad \frac{x}{dx}$$

を採用すればよい．これらを等式 (ε)(第 *273* 条)[訳註：(11) 式を指す] に代入し，$\operatorname{vers} dx$ の代わりに $\frac{1}{2}dx^2$，$i-1$ と $j-1$ の代わりに i と j を書く．初項 $\frac{1}{n}\sum a_i$ は，積分 $\frac{1}{2\pi}\int f(x)\,dx$ を $x=0$ から

$x=2\pi$ までとった値になる．量 $\sin(j-1)\dfrac{2\pi}{n}$ は $\sin j\,dx$，すなわち $\sin x$ となる．$\cos(j-1)\dfrac{2\pi}{n}$ の値は $\cos x$ である．$\dfrac{2}{n}\sum a_i \sin(i-1)\dfrac{2\pi}{n}$ の値は $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int f(x)\sin x\,dx$ で，積分は $x=0$ から $x=2\pi$ までとる．また，$\dfrac{2}{n}\sum a_i \cos(i-1)\dfrac{2\pi}{n}$ の値は $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int f(x)\cos x\,dx$ で，積分は同じ限界の間でとる.」このように述べて，等式

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,t) = v = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\
& + \frac{1}{\pi}\left(\sin x\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx + \cos x\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\right)e^{-g\pi t} \\
& + \frac{1}{\pi}\left(\sin 2x\int_0^{2\pi} f(x)\sin 2x\,dx + \cos 2x\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2x\,dx\right)e^{-2^2 g\pi t} \\
& + \cdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

を得る (第 277 条)．そうして $t=0$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\pi f(x) = {} & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\
& + \sin x\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx + \sin 2x\int_0^{2\pi} f(x)\sin 2x\,dx + \cdots \\
& + \cos x\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx + \cos 2x\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2x\,dx + \cdots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる (第 278 条)．

こうした二つの熱伝導のモデルからフーリエ展開公式が導かれた経緯を見れば，フーリエの研究の中心はあくまでも熱伝導の問題の解決にあり，フーリエ展開公式はそこから生み出された副産物と見ることができる．フーリエ展開公式に関して，フーリエは数学的な厳密性を追及するよりもむしろ，異なる二つのモデルから同じ結果を引き出して，その結果が正しいことに確信を深めたに違いない．

参考文献

[1] E.T.Bell 著，田中勇・銀林浩訳「数学をつくった人びと」(東京図書，東京，1997)

[2] Umberto Bottazzini 著，好田順治訳「解析学の歴史」(現代数学社，東京，1990)

[3] Jean Dhombres, Jean-Bernard Robert 著 *Fourier,Créateur de la physique-mathématique* (BELIN,Paris,1998)

[4] I.Grattan-Guinness 著 *Joseph Fourier 1768-1830* (MIT Press,Cambridge-Massachusetts-London,1972)

[5] John Herivel 著，*Joseph Fourier, The Man and the Physicist* (Clarendon Press,Oxford,1975)

[6] Felix Klein 著，彌永昌吉監修「クライン：19 世紀の数学」（共立出版，東京，1995）

[7] 田村三郎著「フランス革命と数学者たち」(講談社ブルーバックス，東京，1989)

[8] 西村重人「『熱の解析的理論』Fourier 展開公式と Fourier 積分公式．その Fourier 自身による証明」(京都大学数理解析研究所講究録**1257**,2002,p.76-87)