数理解析研究所講究録
第1584巻 2008年 188-198

2隻の警備艇が使用可能な多時点確率取締ゲームの一段階ゲーム戦略

防衛大学校・理工学研究科　前原　裕樹(Hiroki Maehara)
Graduate School of Science and Engineering,
National Defense Academy
防衛大学校・情報工学科　宝崎　隆祐(Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1　はじめに

銃器や薬物等の密輸によって不法な資金の獲得を企てる密輸者と，これの摘発を行うべく活動する取締機関をプレイヤーとする密輸取締ゲームには，多時点にわたるモデルであり，かつ各時点において相手プレイヤーが採った行動を知ることのできる多段ゲームが多い[1,2]．しかし現実には，相手の採った行動を逐一確認することは困難な場合が多いことから，前回の報告[3]では，相手の採った行動に関する情報はプレイ中には一切得られず，期間中の全ての日の行動を一度に決定する一段階の多時点取締ゲームとして問題を定式化し，その最適戦略を導出した．

さらに現実的な取締活動を考えると，取締機関が一度に複数の取締艇を出動させ，パトロールを実施する場合も多い．そこで，ここでは取締側が2隻の取締艇を保有しており，1回のパトロールにつき最大2隻まで派遣することができるゲームとして問題を定式化し，最適戦略の導出を行う．一度に2隻を投入した場合には，1隻のみでパトロールを行なう場合に比べて密輸者の摘発に成功する確率は上がり，密輸の成功を許す確率は下がると考えるのが自然であろう．しかしながら，取締側は常に2隻でのパトロールを実施できるわけではなく，燃料費に対する予算制約等により出動回数は限られており，その中で成果をあげることが求められる．出動可能延べ隻数の制約を考慮すれば，2隻での出動の引き換えにパトロール実施日数自体は減少することを考えなければならず，一度に2隻ずつ出動させる戦略が最適であるか，それとも1隻ずつの出動でパトロール実施日をできるだけ確保する戦略を採るべきかが問題となる．

次章ではモデルの前提の説明から始め，定式化を行う．その後，一般的な支払行列による数値解法に加え，動的計画法による解法を提案する．

2　モデルの前提と定式化

ここでは，パトロールを実施するプレイヤーA と，密輸の実行を企てるプレイヤーB との間で行われる，次のような2人ゼロ和ゲームを考える．

(1) プレイヤーA，Bが1日に1回の行動をとる全体でN日間のゲームを考える．

(2) プレイヤーA は2隻の取締艇を保有しており，N日間の中で1回につき最大で2隻，期間中に延べM隻の艇の出動が可能であり，プレイヤーBは最大でL日の密輸が実行可能である．

(3) 1日の行動決定に際し，プレイヤーAはパトロールを取締艇2隻で実施，1隻で実施，またはパトロール未実施の3つの手を，プレイヤーBは密輸を実行するか否かの2つの手を持つ.

(4) プレイヤーB の密輸実行日に1隻のみでパトロールを実施すれば，プレイヤーBは確率p_1で摘発され，密輸の成功も確率q_1で起こる．もし出動隻数が2隻であれば，確率p_2の摘発確率と確率q_2の密輸成功確率となる．ただし，$p_1+q_1 \le 1$，$p_2+q_2 \le 1$，さらには$p_1 < p_2 < 1$，$q_1 > q_2$とする．また，パトロールが実施されない日に密輸を決行すれば，密輸は必ず成功する.

(5) プレイヤーBが摘発されるか，残り日数が尽きた場合にゲームは終了する.

(6) 摘発によるプレイヤーAの利得はα（>0），密輸成功によるプレイヤーBの利得は1である．ただし，取締艇2隻でのパトロール実施日にはプレイヤーBは密輸に出ることはないことを保証するため，$\alpha p_2 - q_2 > 0$とする．ゲームの支払をプレイヤーAの利得で定義し，両プレイヤーの利得はゼロ和であるとする.

(7) 両プレイヤーとも前提(1)～(6)に関し了解しているが，プレイヤーが採った行動は相手プレイヤーには一切知られない.

以上の前提のもとで行われる2人ゼロ和ゲームについて考えていく．前提(4)の不等式$p_1 < p_2$及び$q_1 > q_2$は，1隻のみでのパトロール実施に比べ，2隻でのパトロール実施では摘発成功確率が大きく，密輸の成功を許す確率が小さいことを表す.

まずは幾つかの記号を定義し，各プレイヤーの戦略を表現する．ゲームの行われるN日を離散時点$\mathbf{T} = \{1, \cdots, N\}$で表現する．時点$i \in \mathbf{T}$におけるプレイヤーAの戦略について，取締艇2隻でパトロール実施ならば$x(i)=2$，1隻でパトロール実施ならば$x(i)=1$，未実施ならば$x(i)=0$で表すと，プレイヤーAの純粋戦略は0，1または2の要素を持つN次元のベクトル$\mathbf{x} = \{x(i), i \in \mathbf{T}\}$で表される．同様に，プレイヤーBについては密輸実行を$y(i)=1$，未実行を$y(i)=0$で表すと，プレイヤーBの純粋戦略は0及び1の要素を持つN次元のベクトル$\mathbf{y} = \{y(i), i \in \mathbf{T}\}$で表される．ただし，前提(2)の最大行動可能隻数の制約から，

$$\sum_{i=1}^{N} x(i) \le M, \quad \sum_{i=1}^{N} y(i) \le L \tag{1}$$

の制約が課される.

ここで，プレイヤーA，Bそれぞれの純粋戦略$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$に対するプレイヤーAの期待利得を求めると次のようになる．まず，時点nでのゲームを考えよう．ゲーム開始時から前日の時点$n-1$までに，プレイヤーBが密輸を実行し，かつプレイヤーAによる2隻でのパトロールが行われる日数，すなわち$(x(i), y(i)) = (2,1)$である時点数を$T_2(n)$とすると$T_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1} y(i)x(i)(x(i)-1)/2$であり，密輸の実行と1隻でのパトロール実施が同時に行われる日数，すなわち$(x(i), y(i)) = (1,1)$である時点数を$T_1(n)$とすると$T_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} y(i)x(i)(2-x(i))$となる．これと前提(4)及び(5)から，摘発が起こらずに時点nまでゲームが続く確率は$(1-p_2)^{T_2(n)}(1-p_1)^{T_1(n)}$である.

また，到達した時点nでのプレイヤーA の期待利得について考えると，$(x(n), y(n)) = (2,1)$の場合は，前提(4)及び(6)からプレイヤーA は確率p_2でプレイヤーB を摘発して利得αを得るが，確率q_2で密輸の成功を許して1の損失を被るから，期待利得は$\beta_2 = \alpha p_2 - q_2$である．同様に$(x(n), y(n)) = (1,1)$の場合の期待利得は$\beta_1 = \alpha p_1 - q_1$である．ちなみに，(4)の不等式$p_1 < p_2$及び$q_1 > q_2$から$\beta_2 > \beta_1$が成り立つ.

$(x(n),y(n))=(0,1)$，すなわちパトロールが実施されない状況でプレイヤーB が密輸を決行した場合は，前提(4)から密輸は確実に成功し，プレイヤーA は 1 の損失を被る．$(x(n),y(n))=(2,0)$，$(1,0)$ 及び $(0,0)$ の場合，すなわちプレイヤーB が密輸を実行しない場合には，摘発も密輸の成功も起こり得ず利得は 0 である．以上のことから，時点 n でのプレイヤーA の期待利得は

$$\beta_2 y(n)x(n)(x(n)-1)/2+\beta_1 y(n)x(n)(2-x(n))+(-1)y(n)(x(n)-1)(x(n)-2)/2$$

とまとめて書ける．したがって，全期間における期待支払 $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は次式で求められ，これがプレイヤーA が純粋戦略 $\mathbf{x}=\{x(i),i\in\mathbf{T}\}$ を，プレイヤーB が純粋戦略 $\mathbf{y}=\{y(i),i\in\mathbf{T}\}$ を採った場合のゲームの支払関数となる．

$$\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathbf{N}} y(n)\{\beta_2 x(n)(x(n)-1)+2\beta_1 x(n)(2-x(n))-(x(n)-1)(x(n)-2)\}(1-p_2)^{\gamma_2(n)}(1-p_1)^{\gamma_1(n)}. \tag{2}$$

3　支払行列による数値解法

前章における定式化の結果，各プレイヤーは(1)式を満たす有限個の純粋戦略をもち，支払関数は(2)式で与えられることが分かった．したがって，各プレイヤーの純粋戦略を羅列して支払行列を作成し，これに線形計画法を適用することにより問題を解くことができる．しかし，プレイヤーA の純粋戦略の間には次のような支配関係が存在し，プレイヤーA は(1)式の制約条件を満たす全ての戦略を使う必要の無いことが分かる．

補題 1　プレイヤーA にとって，パトロールの許容出動延べ隻数 M を全て行使する戦略は，そうでない戦略を弱く支配する．

（証明）プレイヤーA の任意の純粋戦略 $\mathbf{x}$ に対し，ある時点での出動隻数を少なくした純粋戦略 $\mathbf{x}'$ は，プレイヤーB の任意の純粋戦略 $\mathbf{y}$ に対し $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\mathbf{R}(\mathbf{x}',\mathbf{y})$ となることから証明される．

ゲームの最適戦略を考える場合，プレイヤーB の純粋戦略としては N 日間で L 回以下の密輸を実行する総数 $\sum_{i=0}^{L} {}_N C_i$ 通りの純粋戦略を考える必要があるが，プレイヤーA については，補題 1 から N 日中に延べ M 隻分全てを出動させる純粋戦略のみを考えればよい．

4　動的計画法による解法

ここでは，動的計画法を用いて異なった観点からゲームの値について議論していく．前章で述べた線形計画法による均衡解の導出法は数値解法であり，これによって得られる数値解からゲームの性質を一般的に議論することは困難である．それを可能にするため，ここでは戦略を変数として取り扱い，解析的にゲームの値を求めることのできる動的計画法による解法を提案する．

4.1 節では，プレイヤーB の任意の混合戦略に対する取締側の最適戦略を導出する．これにより，プレイヤーA の戦略を最適化することによる期待支払の最大化が行われる．それに引き続いてプレイヤーB の混合戦略を変化させることにより，最大期待支払の最小化を行い，ミニマックス値，すなわちゲームの値を求める．4.2 節では，この動的計画法による手順を，簡単な具体例を用いて解説する．

4.1 ミニマックス値の導出と密輸者側の最適戦略

ここでは，プレイヤーB の任意の混合戦略に対するプレイヤーA の最適なパトロール計画の導出からゲームの値を求めていくが，まずは幾つかの記号を定義しよう．

前章における議論では，期間中の各日を時間の流れに沿った離散時点で表したが，ここでは残り時点数としてステージ番号を定義する．すなわち，時点 $n=1,2,\cdots,N$ をステージ $s=N,N-1,\cdots,1$ で再定義する．これに伴い，時点 $i\in\mathbf{T}$ におけるプレイヤーの戦略表現を，２章の $x(i)$，$y(i)$ からステージ t に対して定義される変数 $x_t=x(N-t+1)$，$y_t=y(N-t+1)$ を用いる．因みにプレイヤーA，B の純粋戦略は，それぞれ $\mathbf{x}=\{x_N,x_{N-1},\cdots,x_1\}$，$\mathbf{y}=\{y_N,y_{N-1},\cdots,y_1\}$ で表す．このとき，プレイヤーB の実行可能な純粋戦略の集合は $\mathbf{Y}=\left\{\mathbf{y}\in\{0,1\}^N \middle| \sum_{i=1}^N y_t\le L\right\}$ である．さらに，純粋戦略 $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ を選択する確率を $\pi(\mathbf{y})$ とし，プレイヤーB の混合戦略を $\pi=\{\pi(\mathbf{y}),\mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}$（ただし，$\pi(\mathbf{y})\ge 0$，$\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\pi(\mathbf{y})=1$）で定義する．その他，ステージ t で密輸を実行する純粋戦略の集合を $\mathbf{Z}_t$ と表す．すなわち $\mathbf{Z}_t=\{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}\mid y_t=1\}$ とする．このとき，ステージ t において密輸が実行される確率は $\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{y})$ である．

いま，ステージ t においてプレイヤーB の混合戦略 π が与えられ，残りのパトロール可能隻数が延べ m 隻分ある場合に，以後最適なパトロール戦略を採ることにより得られる期待利得の最大値を $f_t^m(\pi)$ とする．また，同じ状況にあるステージ t において２隻でパトロールを実施した場合に，ステージ t 以降に得られる期待利得の最大値を $d_t^m(\pi)$，同じく１隻で実施の場合を $g_t^m(\pi)$，パトロールを未実施とした場合を $h_t^m(\pi)$ とする．$d_t^m(\pi)$，$g_t^m(\pi)$ 及び $h_t^m(\pi)$ は，それぞれ以下の式を満たす．

$$d_t^m(\pi)=\beta_2\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{y})+\left(1-p_2\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{y})\right)f_{t-1}^{m-2}(\Lambda_t^2\pi), \tag{3}$$

$$g_t^m(\pi)=\beta_1\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{y})+\left(1-p_1\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{y})\right)f_{t-1}^{m-1}(\Lambda_t^1\pi), \tag{4}$$

$$h_t^m(\pi)=-\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{y})+f_{t-1}^m(\pi). \tag{5}$$

上記(3)～(5)式の右辺第１項はステージ t で発生する期待支払を表し，右辺第２項は，ステージ $t-1$ 以降での期待支払の最大値を表す．ただし，(3)式の $\Lambda_t^2\pi$ は，ステージ t での２隻のパトロールによって摘発が起こらなかったという条件のもとでの π の事後確率を意味し，

$$\Lambda_t^2\pi\,(\mathbf{y})=\begin{cases}\dfrac{\pi(\mathbf{y})(1-p_2)}{1-p_2\sum_{\mathbf{z}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{z})}, & y_t=1\text{ のとき}\\[2ex] \dfrac{\pi(\mathbf{y})}{1-p_2\sum_{\mathbf{z}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{z})}, & y_t=0\text{ のとき}\end{cases} \tag{6}$$

である．どちらの式も分母はステージ t での２隻によるパトロール実施によって摘発が起こらない確率を表しており，分子は２隻でのパトロールが実施され，かつ摘発が起こらない確率を表している．プレイヤーB が密輸を実行する上の式の分子には，摘発が起こらない確率 $1-p_2$ が掛けられており，密輸を実行しない下の式の分子には，摘発が起こらない確率１が掛けられている．(6)式は，$y_t=0,1$ のいずれの場合にも次式のように統一して書くことができる．

$$\Lambda_t^2\pi\,(\mathbf{y})=\frac{\pi(\mathbf{y})(1-p_2y_t)}{1-p_2\sum_{\mathbf{z}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{z})}. \tag{7}$$

(4)式の $\Lambda_t^1\pi$ については，ステージ t での取締艇1隻でのパトロールによって摘発が起こらなかったという条件のもとでの π の事後確率を意味している．これは，2隻での場合を考えた上記の議論を，2隻を1隻，摘発成功確率の p_2 を p_1 と読み替えることで，次のように導くことができる．

$$\Lambda_t^1\pi\ (\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y})(1-p_1 y_t)}{1-p_1\sum_{\mathbf{z}\in\mathbf{Z}_t}\pi(\mathbf{z})}. \tag{8}$$

これらの記号を用いると，プレイヤーA の最適な純粋戦略によるステージ t 以降での最大期待支払 $f_t^m(\pi)$ は次の漸化式で表される．

$m \geq 2$ のとき　$f_t^m(\pi) = \max\{d_t^m(\pi), g_t^m(\pi), h_t^m(\pi)\}$ (9)

$m = 1$ のとき　$f_t^m(\pi) = \max\{g_t^m(\pi), h_t^m(\pi)\}$ (10)

初期条件：$f_0^0(\pi) = 0$， (11)

境界条件：$f_t^0(\pi) = -\sum_{i=1}^{t}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_i}\pi(\mathbf{y})$， (12)

$f_1^1(\pi) = \beta_1\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_1}\pi(\mathbf{y})$， (13)

$f_t^{2t}(\pi) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\pi(\mathbf{y})\sum_{i=1}^{t} y_i\beta_2(1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^{t} y_j}$. (14)

$t=0$ の場合の(11)式は明らかである．$m=0$，すなわち残り出動可能隻数が0の場合は，ステージ t 以降で実行される密輸は確実に成功する．したがって，ステージ $i\in[1,t]$ において密輸を実行する確率に－1を掛けた期待支払 $-\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_i}\pi(\mathbf{y})$ を，ステージ1から t まで和をとった(12)式のように表される．$t=m=1$ の場合，補題1からステージ1では1隻でパトロールを実施することとなり，(13)式となる．また，$m=2t$，すなわち残りの全ステージにおいて2隻ずつの出動が可能な場合に関しては，補題1からプレイヤーA は全ステージで2隻ずつでのパトロールを実施する戦略を採ることとなり，(2)式に $x(i)=1$，$i=N-t+1,\cdots,N$ を適用させることで導出できるが，これは次のように導出することもできる．

2隻の取締艇でのパトロールが常に行われるとして，プレイヤーB の任意の純粋戦略 $\mathbf{y}$ に対する期待支払を求めよう．ステージ $i\in[1,t]$ における期待支払を考えると，ステージ t からステージ i の一つ前の時点であるステージ $i+1$ までに密輸が実行される回数は $\sum_{j=i+1}^{t} y_j$ であり，摘発が起こらずにステージ t からステージ i までゲームが続く確率は，$(1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^{t} y_j}$ と書ける．したがって，プレイヤーB の純粋戦略 $\mathbf{y}$ に対するステージ t 以降での期待支払は $\sum_{i=1}^{t} y_i\beta_2(1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^{t} y_j}$ となる．ところで，各純粋戦略 $\mathbf{y}$ を採る確率は $\pi(\mathbf{y})$ であるから，期待支払としては(14)式のように表される．

$f_t^m(\pi)$ は，(3)～(5)式を用いて，ステージ t においてパトロールを2隻で実施する場合，1隻で実施する場合，パトロールを未実施とする場合の期待支払をそれぞれ計算し，その中の最大値である．もし最大値が(3)式による $d_t^m(\pi)$ であれば，プレイヤーA はステージ t において2隻のパトロールを実施するのが最適であり，最大値が $g_t^m(\pi)$ であれば1隻でのパトロール実施が，$h_t^m(\pi)$ ならばパトロール未実施が最適となる．また，例えば最大値が $d_t^m(\pi)=g_t^m(\pi)$ であれば，出動隻数が2隻でも1隻でも期待支払は等しくなり，いずれの手も採ることができると解釈できる．

初期条件から(9)式または(10)式を用いて逐次計算していくことにより，プレイヤーB が初期時点の

ステージNで混合戦略πを採った場合の最大期待支払$f_N^M(\pi)$及びπに対するプレイヤーA の最適な純粋戦略が求められることになる.

プレイヤーB の混合戦略$\pi=\{\pi(\mathbf{y}),\mathbf{y}\in\mathbf{Y}\}$は$\pi(\mathbf{y})\geq 0$及び$\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\pi(\mathbf{y})=1$を満たすから，その実行可能領域は$|\mathbf{Y}|-1$次元の単位単体を構成する．この領域上で$f_N^M(\pi)$を最小にする点$\pi^*$を見つければ，そこでの$f_N^M(\pi)$の値がミニマックス値，すなわちゲームの値であり，$\pi^*$がプレイヤーB の最適混合戦略となる.

4.2 密輸者側の最適戦略の導出例

簡単な例として，$N=2$，$M=2$，$L=1$の場合に，前節で提案した動的計画法により均衡点を求めてみよう．このときのプレイヤーB の純粋戦略は，2日のうちの何れかの日に密輸を実行する2つの戦略と，密輸を一切行わない戦略の計3通りあり，それぞれを$\mathbf{y}^1=\{1,0\}$，$\mathbf{y}^2=\{0,1\}$，$\mathbf{y}^3=\{0,0\}$で表すことにする．ただし，時間の流れに沿って要素を並べた表記法$\mathbf{y}=\{y(1),y(2)\}=\{y_2,y_1\}$で表現している．このとき，ステージ1，2で密輸を実行する純粋戦略の集合は，それぞれ$\mathbf{Z}_1=\{y_2\}$，$\mathbf{Z}_2=\{y_1\}$である．純粋戦略$\mathbf{y}^1$，$\mathbf{y}^2$を採る確率$\pi(\mathbf{y}^1)$，$\pi(\mathbf{y}^2)$をそれぞれπ_1，π_2と簡略化して書くことにすると，純粋戦略$\mathbf{y}^3$を採る確率$\pi(\mathbf{y}^3)$は$1-\pi_1-\pi_2$と表される．したがって，$\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_1}\pi(\mathbf{y})=\pi_2$，$\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{Z}_2}\pi(\mathbf{y})=\pi_1$となる．(9)～(14)式を用いて逐次計算していくと，プレイヤーB の混合戦略πに対する最大期待支払$f_2^2(\pi)$は次のようになる.

$$f_2^2(\pi)=\begin{cases} d_2^2(\pi)=\beta_2\pi_1-\pi_2, & \pi_2<\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1+1}\pi_1 \text{ かつ } \pi_2<\pi_1 \text{ のとき } \left(x_2^*=2\right) \\ g_2^2(\pi)=\beta_1(\pi_1+\pi_2), & \dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1+1}\pi_1\leq\pi_2<\dfrac{\beta_1+1}{\beta_2-\beta_1}\pi_1 \text{ のとき } \left(x_2^*=1\right) \\ h_2^2(\pi)=-\pi_1+\beta_2\pi_2, & \pi_1\leq\pi_2 \text{ かつ } \dfrac{\beta_1+1}{\beta_2-\beta_1}\pi_1\leq\pi_2 \text{ のとき } \left(x_2^*=0\right) \end{cases} \tag{15}$$

(15)式右辺の3つの式において，プレイヤーA のステージ2における最適戦略$\mathbf{x}_2^*$は(9)式から分かる．ステージ1における最適戦略について考えると，(12)式の第1番目のケースでは，ステージ2で2隻を出動させ，ステージ1ではパトロールを実施しない純粋戦略を採った場合の期待支払を意味するから，$f_2^2(\pi)=d_2^2(\pi)$であるときのステージ1における最適戦略は$\mathbf{x}_1^*=0$である．また，2番目のケースはステージ1，2の両方で1隻ずつを出動させる場合の期待支払を，3番目のケースはステージ2でパトロールを実施せず，ステージ1で2隻を出動させる場合の期待支払を意味することから，$f_2^2(\pi)=g_2^2(\pi)$の場合は$\mathbf{x}_1^*=1$，$f_2^2(\pi)=h_2^2(\pi)$の場合には$\mathbf{x}_1^*=2$となる．すなわち，(15)式右辺の3つの式において，プレイヤーA の最適純粋戦略は，上から順に$\mathbf{x}^*=\{2,0\}$，$\{1,1\}$，$\{0,2\}$である．ただし，$\beta_2\geq 2\beta_1+1$の場合は次のように書ける.

$$f_2^2(\pi)=\begin{cases} d_2^2(\pi)=\beta_2\pi_1-\pi_2, & \pi_2<\pi_1 \text{ のとき } \left(x_2^*=2,\ x_1^*=0\right) \\ h_2^2(\pi)=-\pi_1+\beta_2\pi_2, & \pi_1\leq\pi_2 \text{ のとき } \left(x_2^*=0,\ x_1^*=2\right) \end{cases} \tag{16}$$

図1は，横軸にπ_1，縦軸にπ_2をとり，(15)式による$f_2^2(\pi)$の区分を表したものである．また，表1は区分された各領域に対するプレイヤーA の最適戦略$\mathbf{x}^*=\{x_2^*,x_1^*\}$及び$f_2^2(\pi)$の式を表す．プレイヤーB の混合戦略の実行可能領域は，$\pi_1\geq 0$，$\pi_2\geq 0$，$\pi_1+\pi_2\leq 1$を満たす2次元単位単体を構成する．ただし，上述したとおり3番目の純粋戦略$\mathbf{y}^3$を選択する確率π_3は，$\pi_3=1-\pi_1-\pi_2$である．上の結果から，

プレイヤーAの最適戦略は３つの領域で異なり，π_1とπ_2が大きく異なる場合には，密輸が実行される確率が高い方の日に２隻を出動させる戦略を採ることが最適となる．例えば，領域①の混合戦略は，２日目に密輸を実行する確率π_2に比べ１日目の実行確率π_1が高いが，この混合戦略に対するプレイヤーA の最適な戦略は，密輸実行確率の高い１日目に２隻でのパトロールを実施し，２日目を未実施とする戦略$\mathbf{x}^* = \{2,0\}$である．しかし，π_1とπ_2の差が比較的小さい領域③の混合戦略に対する最適なパトロール戦略は，各日に１隻ずつ取締艇を出動させる戦略$\mathbf{x}^* = \{1,1\}$である．

また，β_1に対して相対的にβ_2が大きくなれば，領域①及び②が拡大し，(16)式の最適解が成り立つ条件$\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$では，プレイヤーAの最適な純粋戦略は，密輸実行確率が高い方の日に２隻を出動させる$\mathbf{x}^* = \{2,0\}$又は$\{0,2\}$となることが分かる．図２は，横軸にπ_1，縦軸にπ_2をとり，(16)式による$f_2^2(\pi)$の区分を表したものであり，表２はこのときの各領域に対するプレイヤーAの最適戦略$\mathbf{x}^*$及び$f_2^2(\pi)$を表す．

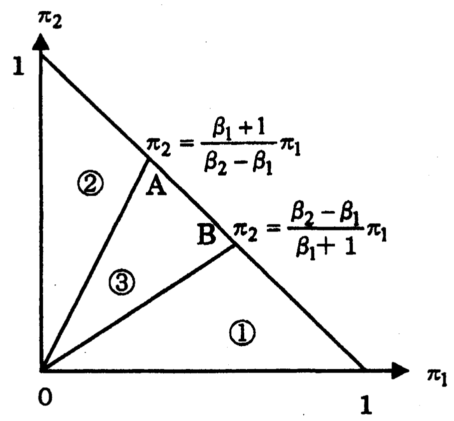

図１　プレイヤーAの最適戦略による区分
$(\beta_2 < 2\beta_1 + 1$の場合$)$

表１　最適なパトロール実施戦略と最小期待支払
$(\beta_2 < 2\beta_1 + 1$の場合$)$

領域	プレイヤーAの最適戦略	$f_2^2(\pi)$
①	$\mathbf{x}^* = \{2,0\}$	$\beta_2\pi_1 - \pi_2$
②	$\mathbf{x}^* = \{0,2\}$	$-\pi_1 + \beta_2\pi_2$
③	$\mathbf{x}^* = \{1,1\}$	$\beta_1(\pi_1 + \pi_2)$

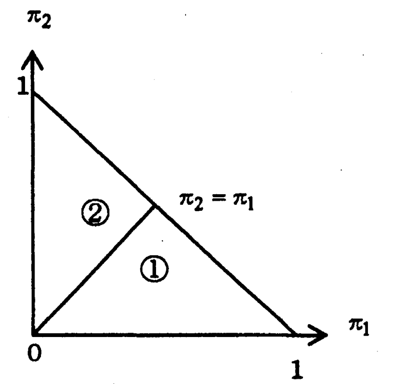

図２　プレイヤーAの最適戦略による区分
$(\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$の場合$)$

表２　最適なパトロール実施戦略と最小期待支払
$(\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$の場合$)$

領域	プレイヤーAの最適戦略	$f_2^2(\pi)$
①	$\mathbf{x}^* = \{2,0\}$	$\beta_2\pi_1 - \pi_2$
②	$\mathbf{x}^* = \{0,2\}$	$-\pi_1 + \beta_2\pi_2$

それでは具体的に$\alpha=2$，$p_2=0.5$，$q_2=0.3$，$p_1=0.3$，$q_1=0.7$と設定してゲームの値を求めてみよう．このとき，$\beta_2=0.7$，$\beta_1=-0.1$であり，図１のケースとなる．π_1-π_2平面の各点に対し，プレイヤーB の混合戦略に対する期待支払の最大値$f_2^2(\pi)$の大きさを３次元空間のｚ座標で表したものが図３であり，$z=0.7\pi_1-\pi_2$，$z=-0.1(\pi_1+\pi_2)$，　$z=-\pi_1+0.7\pi_2$の３つの平面から成る．この図から，図１の線分 AB に対応する部分が最小値を与えることが分かる．すなわち，$\pi_1+\pi_2=1$，$8/17\le\pi_1\le 9/17$上でミニマックス値が与えられ，その値は$\beta_1=-0.1$となる．

次に，取締艇１隻のみでのパトロール実施時における密輸の成功確率q_1のみを減少させ，$q_1=0.4$とした場合を図示したものが図４である．このとき$\beta_1=0.2$であり，$\beta_2<2\beta_1+1$が成り立つことから，プレイヤーA の最適戦略によるプレイヤーB の戦略の実行可能領域の区分は図１のケースに該当する．最大期待支払を表す平面の境界については図１から明らかであるが，q_1の減少はプレイヤーA にとって１隻の取締艇でのパトロール実施効果が増加することを意味するから，１隻ずつ２日間のパトロールが最適戦略である中央の領域③が拡大すると解釈できる．また，β_1の増加により，この領域内のプレイヤーB の混合戦略に対する最大期待支払が増加し，ミニマックス値を与える点π^*の座標は$(\pi_1,\pi_2)=(0,0)$となり，その値は０となる．このとき$\pi_3=1$であり，プレイヤーB の最適混合戦略は，密輸を行わない戦略$y^3=\{0,0\}$を確率１で採用して利得０を確保することであり，密輸を実行する戦略を採れば期待支払は正となり，プレイヤーA 側を利することとなる．以上の２つの具体例から分かるように，２隻でのパトロールによる効果が小さく，$\beta_2<2\beta_1+1$が成り立つ場合のゲームの値はβ_1の値に依存し，$\beta_1<0$のときゲームの値はβ_1，$\beta_1\ge 0$ならば０となる．

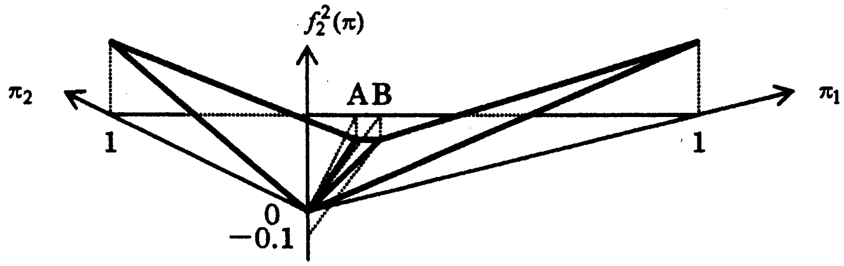

図３　最大期待支払$(q_1=0.7)$

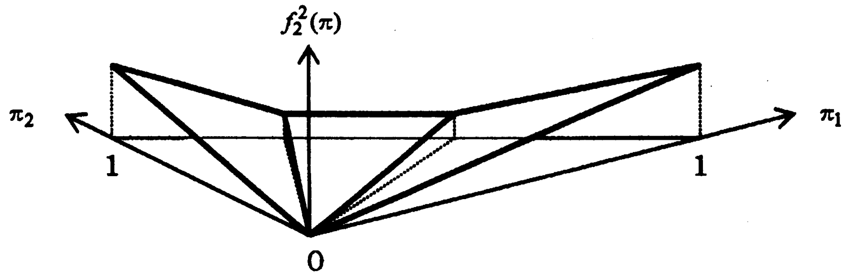

図４　最大期待支払$(q_1=0.4)$

図５及び６は，横軸にπ_1，縦軸にπ_2をとり，$\beta_2 \ge 2\beta_1 + 1$が成り立つ場合の(16)式による$f_2^2(\pi)$の大きさを３次元空間のｚ座標で表したものである．$\pi_1 = \pi_2$を境界として，$z = \beta_2\pi_1 - \pi_2$と$z = -\pi_1 + \beta_2\pi_2$の２つの平面が接する形となる．この最大期待支払を表す平面は，$(\pi_1,\pi_2) = (1,0)$及び$(0,1)$で$z = \beta_2 > 0$，$(\pi_1,\pi_2) = (0,0)$で$z = 0$，$(\pi_1,\pi_2) = (0.5,0.5)$で$z = 0.5(\beta_2 - 1)$の値をとるから，均衡点は$(\pi_1,\pi_2,\pi_3) = (0.5,0.5,0)$か$(0,0,1)$のどちらかであり，そのどちらになるかは$\beta_2$の値に依存する．$\beta_2 < 1$のとき，均衡点は$(\pi_1,\pi_2,\pi_3) = (0.5,0.5,0)$でゲームの値は$0.5(\beta_2 - 1)$，$\beta_2 \ge 1$ならば均衡点は$(\pi_1,\pi_2,\pi_3) = (0,0,1)$でゲームの値は０となる．

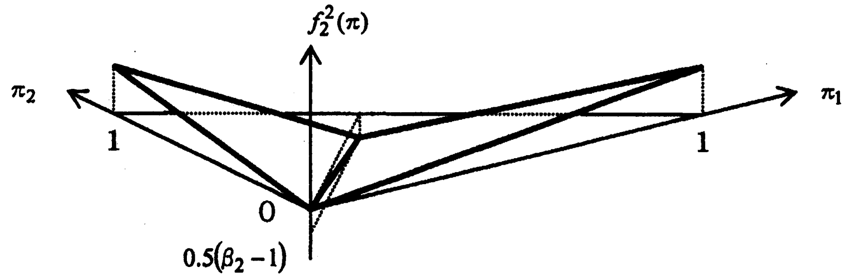

図５　最大期待支払$(\beta_2 \ge 2\beta_1 + 1, \beta_2 < 1)$

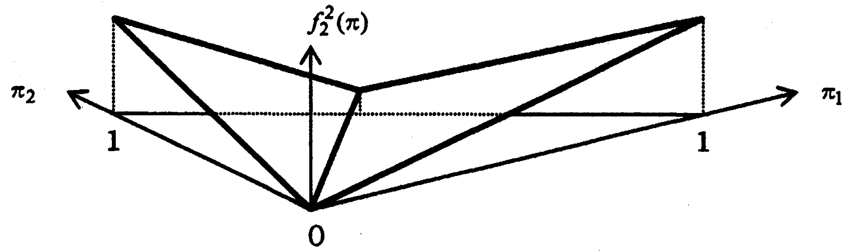

図６　最大期待支払$(\beta_2 \ge 2\beta_1 + 1, \beta_2 \ge 1)$

５　数値例

３章で提案した線形計画法による数値解法により，$N=7$，$M=4$，$L=4$のゲームについて，各プレイヤーの最適戦略を求めた．プレイヤーの最適混合戦略については，プレイヤーA，Bそれぞれの純粋戦略$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$に対する最適な選択確率として得られるが，その混合戦略の性質を見るために次のような処理を行った．まずプレイヤーBの最適混合戦略について，純粋戦略$\mathbf{y}$を選択する確率$\pi^*(\mathbf{y})$により，ステージtで密輸を実行する確率は$\sum_{\mathbf{y}\in \mathbf{Z}_t} \pi^*(\mathbf{y})$となり，時点毎の密輸を実行する確率を求めた．さらに，期間中の密輸予定回数の期待値が$\sum_{\mathbf{y}\in \mathbf{Y}} \pi^*(\mathbf{y}) \sum_{i=1}^{N} y(i)$により得られる．プレイヤーAについても，最適混合戦略から各時点における取締艇２隻でのパトロール実施確率及び１隻でのパトロール実施確率をそれぞれ求めた．

図７は，$N=7$，$M=4$，$L=4$，$\alpha=3$，$p_2=0.5$，$q_2=0.1$，$p_1=0.3$，$q_1=0.4$のゲームについて，各プレイヤーの最適戦略を求め，上の計算結果を横軸に時点，縦軸に実行確率をとって図示したものである．このとき$\beta_2=1.4$，$\beta_1=0.5$である．このときのプレイヤーAの最適戦略は，一度に２隻の出動を

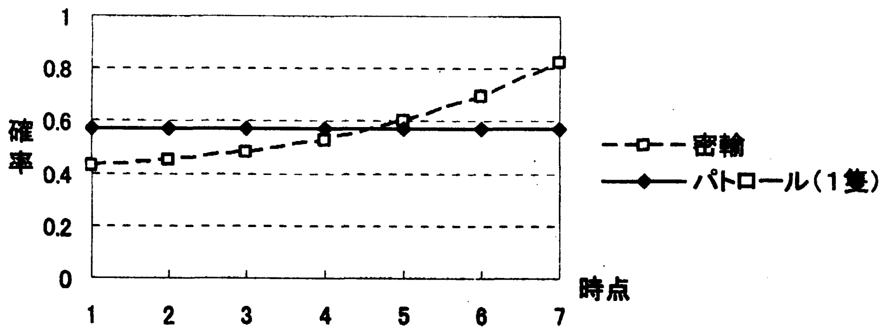

図7 各時点におけるパトロール及び密輸実施確率 ($p_2 = 0.5$)

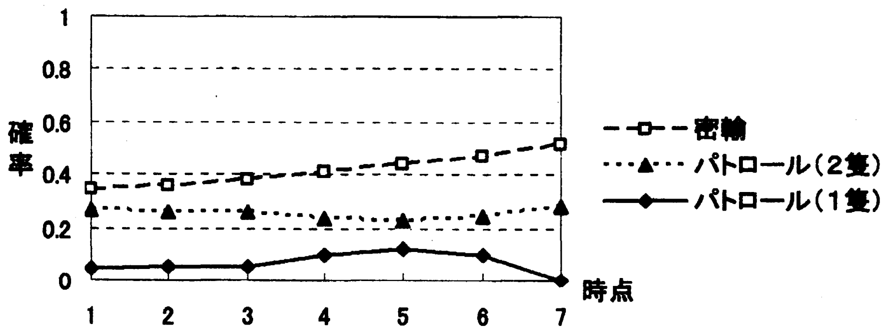

図8 各時点におけるパトロール及び密輸実施確率 ($p_2 = 0.65$)

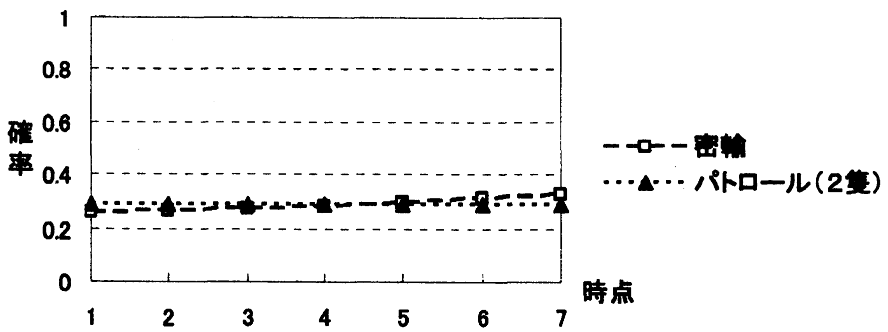

図9 各時点におけるパトロール及び密輸実施確率 ($p_2 = 0.7$)

含む純粋戦略は採用せず，１隻ずつ４日のパトロールを実施する純粋戦略のみを採用し，いずれの時点も１隻でのパトロール実施確率を 4/7 の等確率とするものである．パトロール日数を少なくしてまで一度に２隻を出動させるよりも，１隻ずつで摘発の機会を多く確保する戦略の方が有効であることが分かる．一方，プレイヤーB は実行可能な４回の密輸実行から成る戦略のみを採用する．密輸を実行したときに取締艇１隻によるパトロールが実施されていても，摘発される確率 p_1 が小さい，すなわ

ち摘発を逃れる確率が大きいということであるから，実行可能な４回全ての密輸実行を予定することができる．しかしながら，早い時点で摘発されれば，密輸可能回数を残したままゲームを終了することとなるから，早い時点では密輸の実行を控えるのが良いことが分かる．ちなみに，このときのゲームの値は－0.35 である．

次に，２隻でのパトロール時における摘発確率 p_2 のみを変化させ，$p_2=0.65$ としたときのパトロール及び密輸の実行確率を図示したのが図８である．$\beta_2=1.85$ と増加するのに伴い，プレイヤーA は一度に２隻を出動させる戦略も採用することになる．これに伴いプレイヤーB の密輸実行確率は下がり，密輸の予定実行回数は 2.9 回，ゲームの値は－0.28 に増加する．

さらに，$p_2=0.7$ としたときの実行確率を図示したのが図９である．このときのプレイヤーA は，２隻ずつ２日パトロールを実施する戦略のみを採用し，各時点で２隻によるパトロールを実施する確率は 2/7 となる．パトロールが実施される日数は高々２日であるが，密輸を試みた時点でパトロールも実施されていた場合に摘発される確率 p_2 が大きいため，プレイヤーB は密輸の実行機会を放棄せざるを得ない．このため，２回の密輸実行から成る戦略のみを採用し，ゲームの値は－0.19 となる．

6　おわりに

ここでは，期間中に相手の行動に関する情報が得られない場合の多時点取締ゲームに関し，一度に最大で２隻までパトロールに出動させることが可能な場合に拡張したモデルについて議論した．解法として，線形計画法を用いた一般的な解法に加え，ゲームの性質に関する一般的議論を可能にするため，動的計画法による解法も提案した．

ここで取り扱ったゲームは，プレイヤーの利得や任務の成功確率は期間を通じて一様であるとしたが，密輸や密漁といった洋上での取締活動を想定した場合，これらは海象による影響を大きく受けるため，時点毎に変化するものとするのが現実的であろう．また，密輸者は出来るだけ早いうちに密輸を成功させたいと考えるであろうから，この点を考慮に入れることも必要である．

殊に密輸のような重大犯罪に対する取締は，ここで取り上げたゲームのように，複数の取締艇を可能な限り出動させることにより行うのが一般的である．しかし，監視能力や速力等の異なる取締艇の運用によりパトロールを実施する場合が多いことから，性能の異なる複数の取締艇が使用可能な場合のゲームへと拡張すれば，より現実的な取締戦略計画の問題になると思われる．

参考文献

[1] M. Sakaguchi, A sequential game of multi-opportunity infiltration, *Mathematica Japonica*, 39, pp.157-166, 1994.

[2] R. Hohzaki, D. Kudoh and T. Komiya, An inspection game taking account of fulfillment probabilities of players, *Naval Research Logistics*, 53, pp.761-771, 2006.

[3] 前原裕樹，宝崎隆祐，多時点確率取締ゲームの一段階ゲーム戦略，京都大学数理解析研究所講究録 1548, pp.91-98, 2007.