

# 量子論理ゲートによる計算回路の定式化について

東京理科大学 理工学研究科 情報科学専攻 林田 貴宏 (Takahiro Hayashida)  
東京理科大学 理工学部 情報科学科 渡邊 昇 (Noboru Watanabe)  
*Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,  
Tokyo University of Science*

## 1 はじめに

現在のコンピューターに用いられている論理ゲートは非可逆的であるため、計算過程において情報の損失を伴う。情報の損失は例えばプロセッサの消費電力や発熱といった形で表れ、コンピューターの計算速度の限界に影響を与える。このため情報の損失を伴わないゲートの研究が行われ、Fredkin と Toffoli[2] や, Feynman[1] などによる可逆なゲートが提案された。その後、Fredkin-Toffoli ゲート (以下 FT ゲート) について、G. J. Milburn による [3] 光学的モデルの提案など、様々な研究がなされており、Ohya, Watanabe は Fredkin-Toffoli-Milburn ゲート (以下 FTM ゲート) の量子チャネルによる再定式化を行っている [8]。本稿では、2つの FTM ゲートによる NAND 回路を量子チャネルを用いて定式化し、その有効性について論じる。

## 2 光学的量子ゲート

### 2.1 FT ゲート

Fredkin と Toffoli によって提案された保存論理的ゲートのモデルが FT ゲートである [2]。FT ゲートは 3 入力 3 出力のゲートで、入力側を Control, Input<sub>1</sub>, Input<sub>2</sub>, 出力側を Control, Output<sub>1</sub>, Output<sub>2</sub> とすると、その動作は Control の状態が 0 に相当する状態であれば Input<sub>1</sub>, Input<sub>2</sub> をそれぞれ Output<sub>1</sub>, Output<sub>2</sub> へ出力し、Control の状態が 1 に相当すれば、Input<sub>1</sub> を Output<sub>2</sub> へ出力し Input<sub>2</sub> を Output<sub>1</sub> へ出力する。Control の状態は入出力間で変化しない。FT ゲートの出力から入力を求める逆ゲートは FT ゲートそれ自身である。

FT ゲートは入力と出力を読み替えることにより AND, OR, NOT(COPY) といった基本論理演算の機能を果たすことができるため、ブール代数を基にした任意の論理回路は、FT ゲートの組み合わせることで構成可能である。

## 2.2 FTM ゲート

FT ゲートの光学的なモデルとして Milburn が考案したものが FTM ゲートである [3]. FTM ゲートは 2 つのミラーと 2 つのビームスプリッター, そして光 Kerr 媒質から構成される. 光 Kerr 媒質は制御光と被変調光を入射し, 電気光学効果により被変調光へ位相変化を引き起こすものである. この FTM ゲートの量子力学的チャネルによる再定式化とエントロピー保存性についての研究が Ohya, Watanabe により行われている [8].

## 3 量子論理ゲートの定式化

量子チャネルを用いた量子論理ゲートの定式化について説明する.

### 3.1 量子チャネル

量子チャネルは通信を表すので入力系と出力系を持つ. 量子系は複素ヒルベルト空間として表すことができるので, 入力系と出力系を複素ヒルベルト空間とし,  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  とする.  $\mathbb{B}(\mathcal{H}_k)$  を  $\mathcal{H}_k$  ( $k = 1, 2$ ) 上の有界線形作用素の全体とする,  $\mathcal{H}_k$  上の密度作用素の全体は

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k) = \{\rho \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_k) \mid \rho \geq 0, \text{tr}\rho = 1\} \quad (1)$$

と表わせ, 量子系における状態は  $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$  の元である. 量子系の状態を量子系の状態へ変換する写像  $\Lambda^* : \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$  を量子チャネルという.  $\Lambda^*$  がアフィン性を満たすとき, すなわち

$$\sum_n \lambda_n = 1 (\forall \lambda_n \geq 0) \quad (2)$$

であるとき,  $\forall \rho_n \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$  について

$$\Lambda^* \left( \sum_n \lambda_n \rho_n \right) = \sum_n \lambda_n \Lambda^*(\rho_n) \quad (3)$$

となるならば,  $\Lambda^*$  を線形な量子チャネルという. 写像  $\Lambda : \mathbb{B}(\mathcal{H}_2) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)$  が  $\forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1), \forall A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_2)$  について,

$$\text{tr}\Lambda^*(\rho) A = \text{tr}\rho \Lambda(A) \quad (4)$$

であるとき,  $\Lambda$  を  $\Lambda^*$  の共役写像 (dual map) であるという. さらに  $\Lambda$  が

$$\sum_{j,k=1}^n B_j^* \Lambda(A_j^* A_k) B_k \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall A_j \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_2), \forall B_k \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)) \quad (5)$$

を満たす場合,  $\Lambda$  は完全正写像 (complete positive map) といい, そのとき  $\Lambda$  の共益写像  $\Lambda^*$  を完全正チャネル (complete positive channel) と呼ぶ.

量子チャネルの研究 [4][5][11] に関連して, 量子相互エントロピーの定式化 [4] や量子チャネルの通信路容量などの重要な研究が行われている [7][10].

## 3.2 光の状態

FTM ゲートに用いる光の状態の定式化について [11] に従って説明する.

### 3.2.1 光子数確定状態

$a, a^*$  をそれぞれ光子の消滅作用素, 生成作用素とする.  $\hbar\omega = 1$  としたときに, 調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \left( a^*a + \frac{I}{2} \right) \quad (6)$$

で与えられる.  $H$  の固有ベクトル  $E_n$  に対応する固有ベクトルを  $x_n$  とすると

$$Hx_n = E_nx_n \quad (7)$$

$$E_n = n + \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

である. 各  $E_n$  に対応する固有ベクトル  $x_n$  の集合は CONS を成すので,  $|n\rangle = x_n$  として  $\text{CONS}\{|n\rangle : (n = 0, 1, 2, \dots)\}$  を作ることができ,  $|n\rangle$  を  $n$  光子数確定状態ベクトルと呼ぶ. 状態ベクトル  $|n\rangle$  を用いて

$$E_n = |n\rangle\langle n| \quad (9)$$

と表される状態を  $n$  光子数確定状態という.

### 3.2.2 コヒーレント状態

コヒーレント状態ベクトルは, 消滅作用素  $a$  の固有値  $\theta$  に関する固有状態ベクトルとして得ることができ

$$a|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle \quad (10)$$

なる固有ベクトル  $|\theta\rangle$  がコヒーレント状態ベクトルである.  $|\theta\rangle$  を光子数確定状態を含む  $\text{CONS}\{|n\rangle\}$  でフーリエ展開すると

$$|\theta\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\theta|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (11)$$

となる.  $|\theta\rangle$  を用いて

$$\rho = |\theta\rangle\langle\theta| \quad (12)$$

と表される状態が, コヒーレント状態である [12].

### 3.2.3 Schrödinger cat states

コヒーレント状態  $|\theta\rangle\langle\theta|$  と  $|\!-\theta\rangle\langle\!-\theta|$  により与えられる状態

$$\rho = \frac{1}{2} |\theta\rangle\langle\theta| + \frac{1}{2} |\!-\theta\rangle\langle\!-\theta| \quad (13)$$

のシャッテン分解は, 固有値

$$\mu_0 = \frac{1}{2} (1 + \exp(-2|\theta|^2)) \quad (14)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} (1 - \exp(-2|\theta|^2)) \quad (15)$$

と, 固有ベクトル

$$|s_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \exp(-2|\theta|^2))}} (|\theta\rangle + |\!-\theta\rangle) \quad (16)$$

$$|s_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \exp(-2|\theta|^2))}} (|\theta\rangle - |\!-\theta\rangle) \quad (17)$$

によって

$$\rho = \sum_{i=0}^1 \mu_i |s_i\rangle\langle s_i| \quad (18)$$

となる.

$$\langle s_i | s_j \rangle = \delta_{ij} \quad (19)$$

となるため,  $|s_0\rangle, |s_1\rangle$  は量子直交状態ベクトルであり, Schrödinger cat state ベクトルと呼ぶ. 状態

$$\Phi_0 = |s_0\rangle\langle s_0| \quad (20)$$

$$\Phi_1 = |s_1\rangle\langle s_1| \quad (21)$$

を Schrödinger cat states という.  $|s_0\rangle, |s_1\rangle$  を光子数確定状態を含む CONS  $\{|n\rangle\}$  でフーリエ展開すると

$$|s_0\rangle = \frac{\sqrt{2} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2)}{\sqrt{1 + \exp(-2|\theta|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{\sqrt{2n!}} |2n\rangle \quad (22)$$

$$|s_1\rangle = \frac{\sqrt{2} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2)}{\sqrt{1 + \exp(-2|\theta|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \quad (23)$$

となる. このことから  $|s_0\rangle$  は偶数の光子数確定状態ベクトルのみからなる重ね合わせ状態ベクトルで,  $|s_1\rangle$  は奇数の光子数確定状態ベクトルからなる重ね合わせ状態ベクトルであることがわかる.

### 3.3 光雑音チャンネルと一般化されたビームスプリッター

文献 [4][10][11] に従い, ビームスプリッターの定式化について説明する. 入力系を  $\mathcal{H}_1$ , 出力系を  $\mathcal{H}_2$ , 雑音系を  $\mathcal{K}_1$ , 損失系を  $\mathcal{K}_2$  とし,  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$  から  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2$  への線形変換  $V$  を次のように定める.

$$V(|n_1\rangle \otimes |m_1\rangle) = \sum_{j=0}^{n_1+m_1} C_j^{n_1 m_1} |j\rangle \otimes |n_1 + m_1 - j\rangle \quad (24)$$

ここに,

$$C_j^{n_1 m_1} \equiv \sum_{r=L}^K (-1)^{n_1-r} \frac{\sqrt{n_1! m_1! j! (n_1 + m_1 - j)!}}{r! (n_1 - r)! (j - r)! (m_1 - j + r)!} \alpha^{m_1 - j + 2r} (-\beta)^{n_1 + j - 2r} \quad (25)$$

$$(K = \min\{j, n_1\}, L = \max\{j - m_1, n_1\})$$

である.  $\mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$  から  $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$  への量子チャンネル

$$\Lambda^*(\cdot) = \text{tr}_{\mathcal{K}_2} V(\cdot) V^* \quad (26)$$

を光雑音チャンネル [11] といい, 特に雑音を真空状態, すなわち  $|0\rangle\langle 0|$  としたとき, これを減衰チャンネル [4] という. ここで  $\mathcal{G}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$  から  $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$  への完全正な量子チャンネル  $\Pi_{BS}^*$  が

$$\Pi_{BS}^*(\cdot) \equiv V(\cdot) V^* \quad (27)$$

と定められ, この  $\Pi_{BS}^*$  は一般化されたビームスプリッターを表すチャンネルであり,  $|\alpha|^2 = \eta$  とおくと,  $\eta$  はビームスプリッターの透過率と見なすことができる.

入力にコヒーレント状態ベクトル  $|\theta\rangle, |\theta'\rangle$  を用いたとき,

$$V(|\theta\rangle \otimes |\theta'\rangle) = |\alpha\theta + \beta\theta'\rangle \otimes |-\beta\theta + \alpha\theta'\rangle \quad (28)$$

となるので, ビームスプリッターは次のように動作する.

$$\Pi_{BS}^*(|\theta\rangle\langle\theta| \otimes |\theta'\rangle\langle\theta'|) = |\alpha\theta + \beta\theta'\rangle\langle\alpha\theta + \beta\theta'| \otimes |-\beta\theta + \alpha\theta'\rangle\langle-\beta\theta + \alpha\theta'| \quad (29)$$

### 3.4 光 Kerr 効果

光 Kerr 効果は制御光の強度によって屈折率が変化する相互位相変調である。光 Kerr 効果は複素ヒルベルト空間  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  をそれぞれ制御光の入力系, 出力系とし,  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  を変調を受ける光の入力系, 出力系としたとき,  $\mathcal{G}(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$  から  $\mathcal{G}(\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{H}_2)$  への量子チャネルとして記述できる。Kerr 効果を表す相互作用ハミルトニアンは次のように与えられる [3][8][12].

$$H_{int} = \hbar\chi (c_1^* c_1 \otimes a_1 a_1^*) = \hbar\chi (N_{c_1} \otimes N_{a_1}) \quad (30)$$

$c_1, c_1^*$  はそれぞれ  $\mathcal{L}_1$  における光子の消滅作用素, 生成作用素で,  $a_1, a_1^*$  はそれぞれ  $\mathcal{H}_1$  における光子の消滅作用素, 生成作用素である。  $N_{c_1}, N_{a_1}$  はそれぞれ  $\mathcal{L}_1, \mathcal{H}_1$  の光子数作用素であり,  $\chi$  は媒質の特性によって定まる相互作用の強さを表す定数である。相互作用を表すユニタリ作用素  $U$  は  $H_{int}$  を用いて

$$U = \exp \left\{ -i\sqrt{F} (N_{c_1} \otimes N_{a_1}) \right\} \quad (31)$$

と与えられる。ここに  $\sqrt{F} = \chi T$  であり,  $T$  は光が媒質を通過するのにかかる時間である。  $\sqrt{F}$  は光 Kerr 効果による相互作用の強さを表すパラメータとなる。  $U$  を用いて光 Kerr 効果を表す量子チャネルは

$$\Pi_K^*(\cdot) \equiv U(\cdot)U^* \quad (32)$$

と書ける。ここで,  $\mathcal{L}_1$  の入力として Schrödinger cat state ベクトル  $|s_0\rangle$  を使い,  $\mathcal{H}_1$  の入力としてコヒーレント状態ベクトル  $|\theta'\rangle$  を用いたとき

$$U(|s_0\rangle \otimes |\theta'\rangle) = \frac{\sqrt{2} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2)}{\sqrt{1 + \exp(-2|\theta|^2)}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta^{2l}}{\sqrt{2l!}} |2l\rangle \otimes \left| \exp(-i\sqrt{F}(2l)) \theta' \right\rangle$$

$\sqrt{F} = \pi$  とすると  $\exp(-i\sqrt{F}(2l)) = 1$  となるので

$$U(|s_0\rangle \otimes |\theta'\rangle) = |s_0\rangle \otimes |\theta'\rangle \quad (33)$$

よって Kerr 媒質での状態変化は次のようになる。

$$\Pi_K^*(|s_0\rangle\langle s_0| \otimes |\theta'\rangle\langle\theta'|) = |s_0\rangle\langle s_0| \otimes |\theta'\rangle\langle\theta'| \quad (34)$$

同様に制御光  $|s_1\rangle$  を用いた場合,

$$\begin{aligned} U(|s_1\rangle \otimes |\theta'\rangle) &= \frac{\sqrt{2} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2)}{\sqrt{1 - \exp(-2|\theta|^2)}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta^{2l+1}}{\sqrt{(2l+1)!}} |2l+1\rangle \otimes \left| \exp(-i\sqrt{F}(2l+1)) \theta' \right\rangle \\ &= |s_1\rangle \otimes |-\theta'\rangle \end{aligned} \quad (35)$$

とるので,

$$\Pi_K^* (|s_1\rangle\langle s_1| \otimes |\theta'\rangle\langle\theta'|) = |s_1\rangle\langle s_1| \otimes |-\theta'\rangle\langle-\theta'| \quad (36)$$

を得る.

### 3.5 FTM ゲートのチャネル表現

文献 [10][13] に従い, 3.3 及び 3.4 で定式化したビームスプリッターと光 Kerr 効果の量子チャネルを用いて, FTM ゲートを量子力学的チャネルとして定式化する. FTM ゲートの 3 つの入力について, 制御系を  $\mathcal{L}_1$ , 入力系 1 を  $\mathcal{H}_1$ , 入力系 2 を  $\mathcal{K}_1$  とすると, FTM ゲートは  $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$  から  $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_4 \otimes \mathcal{H}_4 \otimes \mathcal{K}_4)$  への写像

$$\Lambda_{FTM}^* (\cdot) = \Lambda_{BS2}^* \circ \Lambda_K^* \circ \Lambda_{BS1}^* (\cdot) \quad (37)$$

として記述される.  $\Lambda_{BSi}^* : \mathfrak{S}(\mathcal{L}_{2i-1} \otimes \mathcal{H}_{2i-1} \otimes \mathcal{K}_{2i-1}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{L}_{2i} \otimes \mathcal{H}_{2i} \otimes \mathcal{K}_{2i})$  であり,  $id(\mathcal{L}_{i,j})$  を  $\mathcal{L}_i$  から  $\mathcal{L}_j$  への恒等変換とすると

$$\Lambda_{BS2}^* (\cdot) = id(\mathcal{L}_{2i-1,2i}) \otimes \Pi_{BS} (\cdot) \quad (38)$$

$\Lambda_K^*$  は  $\Lambda_K^* : \mathfrak{S}(\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{L}_3 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{K}_3)$  であり

$$\Lambda_K^* (\cdot) = \Pi_K^* \otimes id(\mathcal{K}_{2,3}) (\cdot) \quad (39)$$

である.

## 4 NAND 回路

3.3 及び 3.4 で定式化したビームスプリッターと光 Kerr 効果の量子チャネル, 及び 3.5 の FTM ゲートのチャネル表現を基に, NAND 回路を定式化する. まず  $\mathcal{L}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i, \mathcal{H}'_i, \mathcal{K}'_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  を複素ヒルベルト空間とする. NAND 回路は AND ゲートとして働く FTM ゲートと NOT 回路として働く FTM ゲートを組み合わせることで構成できる. このため NAND 回路は 4 つのビームスプリッターと 2 つの Kerr 媒質からなるチャネルとして次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \Lambda_{NAND}^* : \mathfrak{S}(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{H}'_1 \otimes \mathcal{K}'_1) &\rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{L}_7 \otimes \mathcal{H}_7 \otimes \mathcal{K}_7 \otimes \mathcal{H}'_7 \otimes \mathcal{K}'_7) \\ \Lambda_{NAND}^* (\cdot) &= \Lambda_{BS4}^* \circ \Lambda_{K2}^* \circ \Lambda_{BS3}^* \circ \Lambda_{BS2}^* \circ \Lambda_{K1}^* \circ \Lambda_{BS1}^* (\cdot) \end{aligned} \quad (40)$$

複素ヒルベルト空間  $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j$  について  $id(\mathcal{H}_{i,j})$  を  $\mathcal{H}_i$  から  $\mathcal{H}_j$  への恒等写像とする.  $\Lambda_{BS1}^*$  と  $\Lambda_{BS2}^*$  は

$$\Lambda_{BSi}^* (\cdot) = id(\mathcal{L}_{2i-1,2i}) \otimes \Pi_{BS}^* \otimes id(\mathcal{H}'_{2i-1,2i}) \otimes id(\mathcal{K}'_{2i-1,2i}) \quad (i = 1, 2) \quad (41)$$

$\Lambda_{BS3}^*$  と  $\Lambda_{BS4}^*$  は

$$\Lambda_{BSi}^* (\cdot) = id(\mathcal{L}_{2i-2,2i-1}) \otimes id(\mathcal{H}_{2i-2,2i-1}) \otimes id(\mathcal{K}_{2i-2,2i-1}) \otimes \Pi_{BS}^* (\cdot) \quad (i = 3, 4) \quad (42)$$

$\Lambda_{K_1}^*$  と  $\Lambda_{K_2}^*$  は

$$\Lambda_{K_1}^* = \Pi_{K(\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{K}_2)}^* \otimes id(\mathcal{H}_{2,3}) \otimes id(\mathcal{K}'_{2,3}) \otimes id(\mathcal{H}'_{2,3}) \quad (43)$$

$$\Lambda_{K_2}^* = id(\mathcal{L}_{5,6}) \otimes id(\mathcal{H}_{5,6}) \otimes \Pi_{K(\mathcal{K}_5 \otimes \mathcal{K}'_5)}^* \otimes id(\mathcal{H}'_{5,6}) \quad (44)$$

ここで  $\Pi_{K(\mathcal{L} \otimes \mathcal{H})}^*$  は  $\mathcal{L}$  を制御光の系とし,  $\mathcal{H}$  をもう一方の系とする Kerr 効果を表す量子チャネルである.

NAND ゲートの入力は  $\mathcal{L}_1$  と  $\mathcal{H}_1$  であり,  $\mathcal{K}_1, \mathcal{H}'_1, \mathcal{K}'_1$  にはそれぞれ 0, 0, 1 に相当する状態が固定的に入力される. NAND 回路の出力は  $\mathcal{K}'_1$  から得られる.

Schrödinger cat state  $\Phi_0$  を 0 に,  $\Phi_1$  を 1 に対応させた場合の NAND 回路の動作を見てみよう.  $\sqrt{F} = \pi$ , 全てのビームスプリッターの透過率を  $\eta = \frac{1}{2}$  とする. 入力状態が  $\Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{H}'_1 \otimes \mathcal{K}'_1)$ , すなわち NAND 回路への 2 つの入力が (0,0) である場合, NAND 回路のチャネルを用いて

$$\begin{aligned} & \Lambda_{NAND}^*(\Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \Lambda_{BS4}^* \circ \Lambda_{K2}^* \circ \Lambda_{BS3}^* \circ \Lambda_{BS2}^* \circ \Lambda_{K1}^* \circ \Lambda_{BS1}^*(\Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \Lambda_{BS4}^* \circ \Lambda_{K2}^* \circ \Lambda_{BS3}^*(\Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= (\Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \end{aligned} \quad (45)$$

と求められる. NAND 回路の出力は

$$\rho = \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} \Lambda_{NAND}^*(\Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \quad (46)$$

として得ることができるので,  $\rho_{00} = \Phi_1$  であり, 入力 (0,0) に対して出力 1 が得られたことになる. 同様にして入力が (0,1), (1,0) の場合も求められ

$$\begin{aligned} \rho_{01} &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} \Lambda_{NAND}^*(\Phi_0 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} (\Phi_0 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \Phi_1 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \rho_{10} &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} \Lambda_{NAND}^*(\Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} (\Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \Phi_1 \end{aligned} \quad (48)$$

である. 入力が (1,1) の場合は

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} \Lambda_{NAND}^*(\Phi_1 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} \Lambda_{BS4}^* \circ \Lambda_{K2}^* \circ \Lambda_{BS3}^* \circ \Lambda_{BS2}^* \circ \Lambda_{K1}^* \circ \Lambda_{BS1}^*(\Phi_1 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} \Lambda_{BS4}^* \circ \Lambda_{K2}^* \circ \Lambda_{BS3}^*(\Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{L}_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{H}'_1} (\Phi_1 \otimes \Phi_0 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_0) \\ &= \Phi_0 \end{aligned} \quad (49)$$

となり, 入力 (1,1) に対して出力 0 が得られる. 以上から  $\Lambda_{NAND}^*$  によって目的とする NAND 回路の動作が得られることがわかる. ここで設定したパラメータ及び入力状態を用いる場合, 正しい出力を得る期待値は次のようになり, NAND 回路として極めて理想的な動作が期待できることが



わかる.

$$E_{00} = \text{tr} \rho_{00} \Phi_1 = 1$$

$$E_{01} = \text{tr} \rho_{01} \Phi_1 = 1$$

$$E_{10} = \text{tr} \rho_{10} \Phi_1 = 1$$

$$E_{11} = \text{tr} \rho_{11} \Phi_0 = 1$$

もちろんこれ以外のパラメータ設定や、入力状態についても  $\Lambda_{NAND}^*$  を用いて出力状態を計算することができる。図1は入力を(1,1)としたときに、2つの Kerr 媒質のパラメータ  $F$  を  $\pi$  の周囲で変動させたときの誤り確率 ( $p = 1 - E_{11}$ ) を数値計算により求めたグラフである。 $\sqrt{F}$  の値以外の条件は上と同じである。グラフより出力は  $\sqrt{F}$  の値に非常に敏感であることが見て取れ、 $\sqrt{F} = \pi$  の時は極めて理想的に振舞うが、 $\pi$  からずれると急激に誤り確率が大きくなることがわかる。

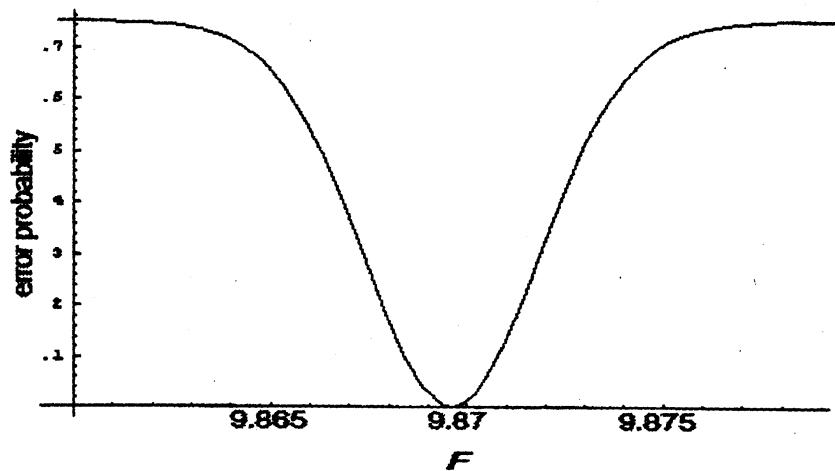


図1  $F$  を動かした場合の誤り確率

## 5 考察と課題

入力状態に Schrödinger cat states を用いると、FTM ゲートを組み合わせた NAND 回路は優れた動作が期待できる。また光 Kerr 媒質による位相変調の精度が出力の誤り確率に大きな影響をもたらすことがわかった。

今後の課題としては、量子チャネル表現をベースにして量子的重ね合わせ状態を入出力に用いるゲート、及び回路について研究を進めていきたいと考えている。

## 参考文献

- [1] R. P. Feynman, "Quantum Mechanical Computers", Optics News, Vol.11, pp.11-20.
- [2] E. Fredkin, T. Toffoli, "Conservative Logic", International Journal of Theoretical Physics, Vol.21, pp.219-253, 1982.

- [3] G. J. Milburn, "Quantum Optical Fredkin Gate", *Phys. Rev. Lett.*, Vol.62, pp.2124-2127, 1989.
- [4] M. Ohya, "On compound state and mutual information in quantum information theory", *IEEE Information Theory*, 29, 770-774, 1983.
- [5] M. Ohya, "Quantum ergodic channels in operator algebras", *J.Math.Anal.Appl.*, 84, No.2.318-327, 1981.
- [6] M. Ohya and D. Petz, "Quantum Entropy and its Use", Springer-Verlag, 1993.
- [7] M. Ohya, D. Petz and N. Watanabe, "On capacities of quantum channels", *Probability and Mathematical Statistics*, Vol.17, pp.179-196,1997.
- [8] M. Ohya and N. Watanabe, "On Mathematical Treatment of Fredkin-Toffoli-Milburn Gate", *Physica D*, 120, pp.206-213, 1998.
- [9] 大矢雅則, "量子コンピュータの数理", 丸善, 1999.
- [10] 大矢雅則, 渡邊昇, "量子論的通信過程における数理モデルの形成とその解析", *電子通信学会論文誌*, J67-A, No.6, 548-552, 1984.
- [11] 大矢雅則, 渡邊昇, "量子通信論の基礎", 牧野書店, 1998.
- [12] D. F. Walls, G. J. Milburn, "Quantum Optics", Springer-Verlag, 1994.
- [13] 渡邊昇, "チャンネル理論とその量子コンピュータへの応用", *数理科学* No.402, サイエンス社, 1996.