数理解析研究所講究録
第1587巻 2008年 125-134

Hilbert representations of quivers and extended Dynkin diagrams

綿谷 安男 (Watatani, Yasuo)
九州大学大学院数理学研究院
(Kyushu University, Department of Mathematical Sciences)

これは甲子園大の榎本氏との共同研究である。

0 はじめに

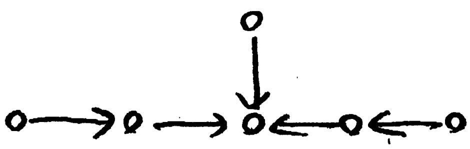
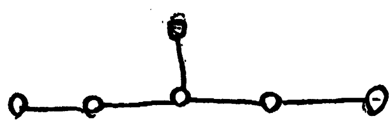
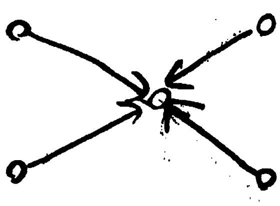
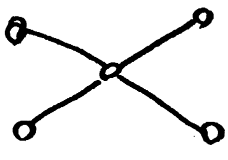
これまでの研究 [EW] で、ヒルベルト空間 H の部分空間 $E_1, E_2, \cdots, E_n \subset H$ の配置について研究してきた。これを quiver (有向グラフ) に沿った部分空間の配置と拡張し、それをさらに quiver の作用素による表現として統一して論じる。

Def quiver（箙 えびら）とは，有向グラフ $\Gamma=(V,E,s,r)$ のことである。ここで V は頂点の集合，E は辺の集合で $s:E\to V$ と $r:E\to V$ は辺 $\alpha\in E$ に対しその始点 $x=s(\alpha)$ と終点 $y=r(\alpha)$ を対応させるものである。

$$\underset{x=s(\alpha)}{\circ} \xrightarrow{\ \alpha\ } \underset{y=r(\alpha)}{\circ}$$

Def quiver $\Gamma=(V,E,s,r)$ に対しその「向きを忘れて」つくった無向グラフを $|\Gamma|$ とかく。

例

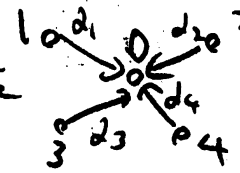
Γ quiver	$\lvert\Gamma\rvert$ 無向グラフ
	 Dynkin diagram E_6
	 拡大 Dynkin diagram $\tilde{D}_4$

Def quiver $\Gamma = (V, E, s, r)$ の表現 (H, f) とは、各頂点 $x \in V$ にベクトル空間 H_x、各辺 $\alpha \in E$ に linear operator f_α を付随させた組 $(H, f) = ((H_x)_{x \in V}, (f_\alpha)_{\alpha \in E})$ で

$$x \xrightarrow{\alpha} y \quad \text{の時に} \quad H_x \xrightarrow{f_\alpha} H_y$$

となるようになっているものをいう。特にすべての H_x が有限次元の時に (H, f) を有限次元表現という。またすべての H_x がヒルベルト空間ですべての f_α が bounded operator の時には Hilbert 表現とよぶ。

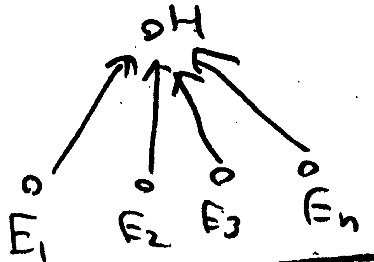
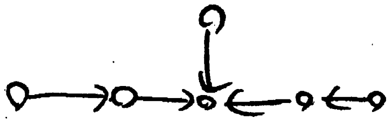
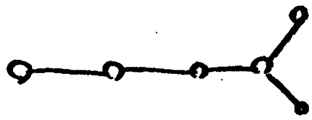
例 ヒルベルト空間 H の4つの部分空間 H_1, H_2, H_3, H_4 にたいし $H_0 = H$ とおく。Γ を



とする。

$f_{\alpha_i} : H_i \hookrightarrow H_0$ を inclusion map とおくと $((H_x)_{x \in V}, (f_\alpha)_{\alpha \in E})$ は Γ の Hilbert 表現になっている。

ヒルベルト空間にもその上の作用素にもそれらの集まった作用素環にも3つの階層の違うステージにquiverが出現するという不思議さを追求したいのがこの研究の目的である。

ヒルベルト空間	作用素	作用素環
nコの部分空間の相対的位置 $H \supset E_1, E_2, \dots, E_n$	quiver のヒルベルト表現 (H, f) $H_x \xrightarrow{f_\alpha} H_y$	Subfactor [J] 部分因子環の相対的位置 $N \subset M$
包含写像 	quiver 	Principal graph 
直既約表現が同型類を除いて有限個 ⇒ 部分空間の個数 $n = 1$か2か3 A_2　A_3　D_4 	(H, f)が有限表現型 ⇒ 元のquiver Γは Dynkin diagram A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 (Gabrielの定理)	$[M:N] < 4$ ⇒ Principal graphは Dynkin diagram A_n, D_n, E_6, E_7, E_8

1 ヒルベルト表現

Quiverの有限次元ベクトル空間とその間のlinear operatorsへの表現をヒルベルト空間とその間のbounded operatorsへの表現へと拡張する

$\boxed{\text{Def}}$ $\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限quiverとする。

(H, f)がΓの<u>ヒルベルト表現</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $H = (H_x)_{x \in V}$: ヒルベルト空間の族

$f = (f_\alpha)_{\alpha \in E}$: bounded operatorの族

s.t.

$$\overset{x}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{y}{\circ} \Longrightarrow H_x \xrightarrow{f_\alpha} H_y$$

$\boxed{\text{Def}}$ (H, f)と(K, g)をΓのヒルベルト表現

$(H, f) \cong (K, g)$: 同型

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in V$ $\exists \varphi_x : H_x \to K_x$: bounded invertible operator

s.t.

$$\overset{x}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{y}{\circ} \Longrightarrow \begin{tikzcd} H_x \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_y \arrow[d, "\varphi_y"] \\ K_x \arrow[r, "g_\alpha"'] & K_y \end{tikzcd}$$

$\boxed{2}$ 直既約表現

Quiver Γ の 2つのヒルベルト表現 (K, g) と (K', g') の

直和 $(K, g) \oplus (K', g') = (K \oplus K', g \oplus g')$ は次できめる

$$(K \oplus K')_x = K_x \oplus K'_x \qquad x \xrightarrow{\alpha} y$$

$$(f \oplus g)_\alpha = (f_\alpha, g_\alpha) : K_x \oplus K'_x \longrightarrow K_y \oplus K'_y$$

$\boxed{\text{Def}}$ Quiver Γ のヒルベルト表現 (H, f) が <u>直既約</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (H, f) はこれ以上更に直和に分解できない

つまり $(H, f) \cong (K, g) \oplus (K', g') \Longrightarrow (K, g) \cong 0$ か $(K', g') \cong 0$

$\boxed{例}$ Quiver Γ が $\circ\circlearrowleft$ の時 そのヒルベルト表現とは

ヒルベルト空間 H とその上の operator $T : H \to H$ を

与えることと同じ。つまりこれは「single operator theory」

$H \circlearrowleft T$ を similarity を除いて考えることと同じ。

H が有限次元の時は (H, T) が直既約であるとは

T が Jordan ブロックであることと同じ。

2つの表現 $(H_1, T_1) \cong (H_2, T_2)$

$\Longleftrightarrow \exists S : H_1 \to H_2$ s.t. $T_2 = S T_1 S^{-1}$

$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ on $\mathbb{C}^n$ で $\lambda \in \mathbb{C}$ と $n \in \mathbb{N}$ が動くので

$\therefore$ 有限次元直既約表現 $/\cong$ は無限コ

$\boxed{\text{例}}$ quiver Γ が $\underset{1}{\circ}\xrightarrow{\alpha}\underset{2}{\circ}$ の時，そのヒルベルト表現とは，
$H_1 \xrightarrow{T} H_2$ を与えることと同じ。この時2つの表現

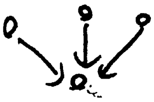
$(H_1\xrightarrow{T}H_2) \cong (H_1'\xrightarrow{T'}H_2')$

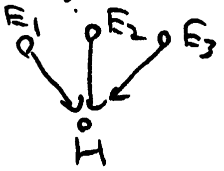
$\Leftrightarrow \exists S_1 : H_1 \to H_1'$ と $\exists S_2 : H_2 \to H_2'$

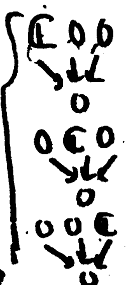
s.t. $T' = S_2 T S_1^{-1}$ （左と右で違うoperatorではさめる!）

この場合 {有限次元直既約表現}/≅ は たったの3個
つまり $\underset{\mathbb{C}}{\circ}\xrightarrow{0}\underset{0}{\circ}$, $\underset{0}{\circ}\xrightarrow{0}\underset{\mathbb{C}}{\circ}$, $\underset{\mathbb{C}}{\circ}\xrightarrow{1}\underset{\mathbb{C}}{\circ}$

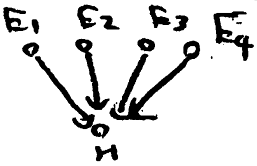
(注) $\circ\!\to\!\circ$ はDinkin diagram だけれど  は 拡大Dinkin diagram でこの違いが ∞個と3個に表われている

$\boxed{\text{例}}$ quiver Γ が  の時，{有限次元直既約表現}/≅ は12コあり，そのうち $9=2^3+1$ は3つの部分空間の配置で残り3コはそれ以外のもの。実際



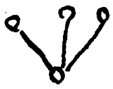
で $2^3 = \#\left\{\begin{matrix} H=\mathbb{C} \\ E_i = \mathbb{C} \text{ or } 0\end{matrix}\right\}$, $1 = \#\{ H=\mathbb{C}^2$  $\}$, $3 = \#\{$  $\}$

$\boxed{\text{例}}$ quiver Γ が  の時，{有限次元直既約表現}/≅ は無限にある。たとえば $K=\mathbb{C}^n$, $H = K\oplus K$, $(n\in\mathbb{N})$



$E_1 = K\oplus 0$, $E_3 = \operatorname{graph} A$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$, $(\lambda\in\mathbb{C})$

$E_2 = 0\oplus K$, $E_4 = \operatorname{graph} I$, $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

(注)  は Dynkin diagram D_4 で  は拡大 Dynkin diagram $\widetilde{D}_4$ で、この違いが 12コ と ∞コ に表われている。

[3] Gabrielの定理の無限次元版

前の[2]で示した色んな例の違いを次の定理が説明する。

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Gabriel [G])

Γを有限で連結な quiver とする。次は同値

① Γは有限表現型（つまり {有限次元直既約表現}/≅ が有限コ）

② |Γ|は Dynkin diagrams A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7, E_8 のどれかである。

これをどのように無限次元版に直すかが問題である。

《①と②をそれぞれの「否定もどき」におきかえよ》

①の「否定もどき」

⟺ Γは無限次元直既約ヒルベルト表現をもつ

（理由：例えば Γ =  の時は Jordan Block $T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ で $n \to \infty$ として T = unilateral shift におきかえることでうまく無限次元直既約表現がつくれる

② の否定（これはもどきではない）

⟺ |Γ|は拡大 Dynkin diagrams $\widehat{A}_n$ ($n \geq 0$), $\widehat{D}_n$ ($n \geq 4$), $\widehat{E}_6$, $\widehat{E}_7$, $\widehat{E}_8$ を含む

以上の準備から次の定理は予想できるでしょう。

$\boxed{\text{Theorem}}$ (榎本−W [EW2])

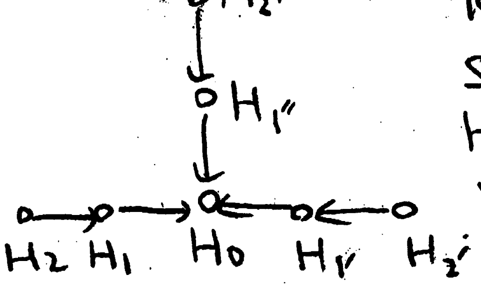
Γを有限で連結なquiverとする。Γの無向グラフ$|\Gamma|$がもし拡大Dinkin diagram $\widetilde{A}_n$ $(n \geq 0)$, $\widetilde{D}_n$ $(n \geq 4)$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$ のどれかを含むと仮定する

$\Longrightarrow$ Γの無限次元直既約ヒルベルト表現が存在する。

注 ① 逆が成立すれば Halmos による transitive lattice の未解決問題 [H] も解決する。

② 証明のアイデアは、Bernstein−Gelfand−Ponomarev [BGP] による鏡映関手とその双対性を使って向きづけに依らないことを示すことと、positive-unitary diagonal な場合の考察、strongly irreducible 作用素 [JW] の例をみることにある。

③ $|\Gamma| = \widetilde{E}_6$ の時の無限次元直既約ヒルベルト表現の構成



$K = \ell^2(\mathbb{N})$

S: unilateral shift on K

$H_0 = K \oplus K \oplus K$,

$H_1 = K \oplus 0 \oplus K$, $H_2 = 0 \oplus 0 \oplus K$

$H_{1'} = K \oplus K \oplus 0$, $H_{2'} = 0 \oplus K \oplus 0$

$H_{1''} = \{ (x, x, x) + (y, Sy, 0) \in K^3 \mid x, y \in K \}$

$H_{2''} = \{ (x, x, x) \in K^3 \mid x \in K \}$

References

[BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russian Math. Surveys, 28 (1973), 17–32.

[EW1] M. Enomoto and Y. Watatani, Relative position of four subspaces in a Hilbert space, Adv. Math. 201 (2006), 263–317

[EW2] M. Enomoto and Y. Watatani, Indecomposable representations of quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces, preprint

[G] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Math. 6 (1972), 71–103.

[H] P. R. Halmos, Ten problems in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 887–933.

[J] V. Jones, Index for subfactors, Inv. Math. 72 (1983), 1-25

[JW] C. Jiang and Z. Wang, Strongly Irreducible Operators on Hilbert space, Longman, 1998.