数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 170-177

A counterexample to the subalgebra conjecture

芦原　崇裕

筑波大学大学院　数理物質科学研究科

1　序文

本稿ではD型の単純ジョルダン代数をグライス代数としてもつ頂点作用素代数 (以下VOA) の構成を考察し、その結果からある予想の反例が得られた事を報告する。

一般的に VOA $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V_n$ が

$$\dim V_1=1,\ \dim V_0=0$$

を満たせば、V_2 に 1-積で可換代数の構造が入る。この可換代数はグライス代数と呼ばれている。どの様な代数がグライス代数として実現されるのかという問題は興味深い事であり、今回重要なのはジョルダン代数と呼ばれる可換代数に対してそれらをグライス代数として持つようなVOA が構成できるかという問題である。ここでジョルダン代数の定義を紹介する。

Definition 1 $\mathbb{C}$-代数 J が次を満たす時、J をジョルダン代数と言う：

$$ab=ba$$
$$a^2(ab)=a(a^2b)\ for\ a,b\in J.$$

∎

例として、任意の結合代数 A に対して積を $a*b:=\frac{1}{2}(ab+ba)$ で定義すれば $(A,*)$ はジョルダン代数となる。$\mathbb{C}$ 上の単純ジョルダン代数は既に次のタイプ A からタイプ E までの五つに分類されいる。その分類の詳細は [1] を参照されたい。

A 型：$\mathbb{C}$ 上の $n\times n$ 行列全体 $M_n(\mathbb{C})$。積を $A*B:=\frac{1}{2}(AB+BA)$ で定義すれば $(M_n(\mathbb{C}),*)$ は単純ジョルダン代数となる。

B 型：$\mathbb{C}$ 上の $n\times n$ 対称行列全体 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$。積を $A*B:=\frac{1}{2}(AB+BA)$ で定義すれば $(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C}),*)$ は単純ジョルダン代数となる。

C 型：$Q \in M_{2m}(\mathbb{C})$ を

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

とし、$X \in M_{2m}(\mathbb{C})$ に対して、$X^j := Q^{-1}X^tQ$ とする（X^t は X の転置行列）。この時、$\{X \in M_{2m}(\mathbb{C}) \mid X^j = X\}$ は積 $A * B := \frac{1}{2}(AB + BA)$ により単純ジョルダン代数となる。

D 型：ベクトル空間 $J_{h+1} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{s_0, s_1, \ldots, s_h\}$ が次の関係式を満たせば J_{h+1} は単純ジョルダン代数となる：

$$\begin{aligned} &s_0 \cdot s_i = s_i, \\ &s_i \cdot s_i = s_0 \text{ and} \\ &s_i \cdot s_j = 0 \ \text{ if } 1 \leq i, j \text{ with } i \neq j. \end{aligned}$$

E 型：ケーリー数を成分に持つ 3×3 行列全体。積を $A * B := \frac{1}{2}(AB + BA)$ で定義すれば単純ジョルダン代数となる。

これらに対して、C.H.Lam により A 型から C 型の単純ジョルダン代数をグライス代数として持つ VOA が存在する事が知られている [6]。D 型と E 型の単純ジョルダン代数をグライス代数として持つ VOA の存在は全く知られていない。D 型の単純ジョルダン代数 J_{h+1} と同型なグライス代数を持つ VOA の構成についての考察を行う事が本稿の目的の一つである。

我々が行う構成では J_{h+1} をランクが $2^k (k \in \mathbb{N})$ の対称行列として表現する。つまり、B 型のジョルダン代数 $\mathrm{Sym}(2^k, \mathbb{C})$ への埋め込みを考える。$\mathrm{Sym}(2^k, \mathbb{C})$ をグライス代数として持つ VOA は既に知られているので、J_{h+1} と同型な部分代数を持つグライス代数を持つ VOA が存在する事になる。そして、その部分代数で生成される部分 VOA のグライス代数がまたもとの J_{h+1} と同型な部分代数と一致すれば目的は達成されるのだが、一般的にはそうはなっていない。この事実が次の予想の反例を与える。これが本稿で述べる主結果である。

Subalgebra Conjecture. V を $\dim V_0 = 1, \dim V_1 = 0$ を満たす VOA とし、R をグライス代数 V_2 の部分代数とする。この時

$$(V(R))_2 = R$$

が成立する ($V(R)$ は R で生成される V の部分 VOA)。 ∎

一般的に不変対称形式を持つ (有限次元) 可換代数 A 与えらたら、A をグライス代数として持つような VOA の存在を考える事は自然な事である：

予想. 任意に与えられた不変対称形式を持つ (有限次元) 可換代数 A に対して、A をグライス代数として持つ VOA が存在する。 ∎

この予想に対して M. Roitman によって次が示された。

Theorem 2 (M. Roitman [8]) 任意に与えられた不変対称形式を持つ(有限次元)可換代数 A に対して、A を含むグライス代数を持つ VOA が存在する。 ∎

もし、Subalgebra Conjecture が正しければ Theorem 2 から上の予想の主張がただちに成立する事が容易に解る。しかし、$A = J_{h+1} (h \geq 4)$ の時に Subalgebra Conjecture に対する反例が見つかった。

2 頂点作用素代数 $M(1)^+$

$H := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} u_i$ を $|I|-$ 次元ベクトル空間とする (I は有限集合)。H を可換なリー代数とみなしてそのアフィンリー代数

$$\hat{H} := H \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}l$$

を構成する。$\hat{H}$ のリー積は、$u_i \otimes t^m := u_i(m),\ u_j \otimes t^n := u_j(n)\ (i, j \in I,\ m, n \in \mathbb{Z})$ として、

$$[u_i(m), u_j(n)] := m\delta_{i,j}\delta_{m+n,0} l$$
$$[\hat{H}, l\,] := \{0\}$$

で与えられる。次に、

$$\hat{H}^+ := H \otimes t\mathbb{C}[t],\ \hat{H}^0 := H \oplus \mathbb{C}l,\ \hat{H}^- := H \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$$

とおけば、$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hat{H}^+ \oplus \hat{H}^0 \oplus \hat{H}^-$$

と分解でき、その普遍包絡環は

$$U(\hat{H}) = U(\hat{H}^+) \otimes U(\hat{H}^0) \otimes U(\hat{H}^-)$$

となる。そして、$\mathbb{C}\mathbf{1}$ に H と $\hat{H}^+$ は自明に作用させ、l を 1 倍で作用させれば $\mathbb{C}\mathbf{1}$ は 1 次元 $\hat{H}^+ \oplus \hat{H}^0$-加群とみなす事ができ、これを用いてヴァーマ加群

$$M(1) := \hat{H} \otimes_{U(\hat{H}^+)\otimes U(\hat{H}^0)} \mathbb{C}\mathbf{1}$$

を構成する。$M(1)$ の基底は

$$\{u_{i_1}(-m_1) \cdots u_{i_k}(-m_k)\mathbf{1} \mid i_1, \ldots, i_k \in I,\ m_1, \ldots, m_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\}$$

となっており、これを用いて次数を

$$\deg\ u_{i_1}(-m_1) \cdots u_{i_k}(-m_k)\mathbf{1} := m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$
$$\deg \mathbf{1} := 0$$

と定義し、次数 n の空間を $(M(1))_n$ と表記する。そして、頂点作用素を正規積を用いて帰納的に $(a(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)z^{-m-1},\ a \in H$ とする。)

$$
\begin{aligned}
&Y(\mathbf{1}, z); = id\\
&Y(a(-1)\mathbf{1}, z) := a(z)\\
&Y(a(n)v, z) := Res_w\{(z-w)^n a(w)Y(v,z) - (-w+z)^n Y(v,z)a(w)\}
\end{aligned}
$$

と定義すれば、$M(1)$ に VOA の構造が入り、ヴィラソロ元は

$$\omega := \frac{1}{2}\sum_{i\in I} u_i(-1)u_i(-1)\mathbf{1}$$

となる。次に、H から H への写像 τ を次の様に定義する：

$$\tau(a) := -a \quad \text{for } a \in H.$$

τ はリー代数としての自己同型となる。さらに τ は M の VOA としての自己同型写像に拡張できる事が知られており、τ の固定点全体にも VOA の構造が入る事が知られている。その $M(1)$ の部分代数を $M(1)^+$ とおく。

$$\tau(u_{i_1}(m_1)\cdots u_{i_k}(m_k)\mathbf{1}) = (-1)^k u_{i_1}(m_1)\cdots u_{i_k}(m_k)\mathbf{1}$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&(M(1)^+)_0 = \mathbb{C}\mathbf{1},\\
&(M(1)^+)_1 = \{0\},\\
&(M(1)^+)_2 = \bigoplus_{i,j\in I} \mathbb{C}u_i(-1)u_j(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

となる。$M(1)^+$ のグライス代数 $(M(1)^+)_2$ は $\mathrm{Sym}(|I|, \mathbb{C})$ と同型になり、その同型対応は $i,j \in I$ に対して

$$\frac{1}{2}u_i(-1)u_j(-1)\mathbf{1} \longleftrightarrow E^{ij} + E^{ji}$$

(E^{ij} は行列単位) で与えられる事が知られている [6]。

3 ジョルダン代数 $\mathcal{J}_C$

ここでは J_{h+1} と同型な代数を 2^k-次元ベクトル空間 $(k \in \mathbb{N})$ から構成される $M(1)^+$ のグライス代数の部分代数として構成する。その構成において二進線型符号が重要な役割を担う。まず、若干の準備を行う。

$\mathbb{F} := \{0,1\}$ を二元体とし、$\mathbb{F}_2^k$ を $\mathbb{F}$ 上の k 次元ベクトル空間とし、$\{e_i\}_{1\le i\le k}$ を $\mathbb{F}_2^k$ の標準基底、e_0 を $\mathbb{F}_2^k$ のゼロベクトル、そして、$\alpha = (\alpha_i)_{1\le i\le k}, \beta = (\beta_j)_{1\le j\le k} \in \mathbb{F}_2^k$ に対して、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_{1\le i\le k}\alpha_i\beta_i$ で定義される対称な双線型形式とする。$\mathbb{F}_2^k$ の部分集合を二

進線型符号と言う (ここでは単に符号と呼ぶ)。さらに線型写像 $^-: \mathbb{F}_2^k \longrightarrow \mathbb{F}_2^k$ を次で定義する：

$$\bar{e}_i := \sum_{1\leq l\leq i-1} e_l \text{ if } 2 \leq i \leq k,$$
$$\bar{e}_1 := e_0.$$

Lemma 3 $wt(\alpha)$ を α の 1 の成分の個数とする。この時、$\langle\bar{\alpha},\alpha\rangle = 0$ (resp. $\langle\bar{\alpha},\alpha\rangle = 1$) である事と $wt(\alpha) \equiv 0,1 \bmod 4$ (resp. $\mathrm{wt}(\alpha) \equiv 2,3 \bmod 4$) である事は同値である。 ∎

ここで、前章のベクトル空間の添え字集合 I を $\mathbb{F}_2^k$ とする (つまり、$H = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{F}_2^k} u_\alpha$)。以下 $I = \mathbb{F}_2^k$ として得られる VOA を単に $M(1)^+$ と書く。すると、$M(1)^+$ のグライス代数 $(M(1)^+)_2$ は $\mathrm{Sym}(2^k,\mathbb{C})$ と同型である。

ここまで準備して、$\alpha \in \mathbb{F}_2^k$, $m,n \in \mathbb{Z}$ に対して $M(1)^+$ 上の作用素を

$$S_\alpha(m,n) := \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_2^k} (-1)^{\langle\bar{\alpha},\gamma\rangle} u_\gamma(m) u_{\gamma+\alpha}(n)$$

で定義する。ここで作用素 $S_\alpha(m,n)$ の性質を少し紹介する。

Lemma 4 $\alpha \in \mathbb{F}_2^k$, $m,n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$S_\alpha(m,n) = m\delta_{\alpha,e_0}\delta_{m+n,0}2^k + (-1)^{\langle\bar{\alpha},\alpha\rangle} S_\alpha(n,m)$$

が成立する。 ∎

Lemma 3 と Lemma 4 から次が言える。

Corollary 5 $wt(\alpha) \equiv 2,3 \bmod 4$ とする。この時、$m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$S_\alpha(m,m) = 0$$

が成立。 ∎

$Y(S_\alpha(-1,-1)\mathbf{1},z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} (S_\alpha(-1,-1)\mathbf{1})_m z^{-m-1}$ とする。

Lemma 6 $\alpha,\beta \in \mathbb{F}_2^k$, $p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。 この時

$$\begin{aligned}
&(S_\alpha(-1,-1)\mathbf{1})_l(S_\beta(-p,-q)\mathbf{1}) \\
&= (-1)^{\langle\bar{\beta},\alpha\rangle}(\delta_{l\leq p} + (-1)^{\langle\bar{\alpha},\alpha\rangle})pS_{\alpha+\beta}(l-p-1,-q)\mathbf{1} \\
&+ (-1)^{w(\beta)+\langle\bar{\beta},\alpha\rangle}(\delta_{l\leq q} + (-1)^{\langle\bar{\alpha},\alpha\rangle})qS_{\alpha+\beta}(l-q-1,-p)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

が成立。ここで

$$\delta_{a\le b} = \begin{cases} 1 & \textit{if } a \le b \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

とする。 ∎

ここから J_{h+1} と同型な代数を $(M(1)^+)_2$ の部分代数として構成する。$C \subseteq \mathbb{F}_2^k \setminus \{e_0\}$ に対して $(M(1)^+)_2$ の部分空間 $\mathcal{J}_C$ を

$$\mathcal{J}_C := \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{S_\alpha(-1,-1)\mathbf{1} \mid \alpha \in C \cup \{e_0\}\}$$

で定義する。Corollary 5 から

$$\mathcal{J}_C = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{S_\alpha(-1,-1)\mathbf{1} \mid \alpha \in C \cup \{e_0\}, wt(\alpha) \equiv 0, 1 \bmod 4\}$$

となる。

Remark 7 $\{S_\alpha(-1,-1)\mathbf{1} \mid \alpha \in \mathbb{F}_2^k, wt(\alpha) \equiv 0, 1 \bmod 4\}$ は一次独立である。 ∎

Proposition 8 $k, h \in \mathbf{N}$ とする。$C \subseteq \mathbb{F}_2^k \setminus \{e_0\}$ が次を満たせば $\mathcal{J}_C \cong J_{h+1}$ となる：

(a) $|C| = h$

(b) $\alpha \in C$ に対して

$$\mathrm{wt}(\alpha) \equiv 0 \text{ or } 1 \bmod 4$$

を満たしかつ、$\alpha, \beta \in C (\alpha \ne \beta)$ に対して

$$\mathrm{wt}(\alpha + \beta) \equiv 2 \text{ or } 3 \bmod 4$$

を満たす。 ∎

任意の $h \in \mathbf{N}$ に対して、Proposition 8 の (a), (b) を満たす符号は常にとる事ができる。$h = k$ として $C = \{e_i\}_{1\le i\le h}$ とすればよい。実際 Lemma 6 を使って計算してみれば、

$$(\frac{1}{4}S_{e_i}(-1,-1)\mathbf{1})_1(\frac{1}{4}S_{e_i}(-1,-1)\mathbf{1}) = \frac{1}{4}S_{e_0}(-1,-1)\mathbf{1},$$
$$(\frac{1}{4}S_{e_0}(-1,-1)\mathbf{1})_1(\frac{1}{4}S_{e_i}(-1,-1)\mathbf{1}) = \frac{1}{4}S_{e_i}(-1,-1)\mathbf{1}$$

となり、さらに Corollary 5 を使って

$$(\frac{1}{4}S_{e_i}(-1,-1)\mathbf{1})_1(\frac{1}{4}S_{e_j}(-1,-1)\mathbf{1}) = \frac{1}{4}S_{e_i+e_j}(-1,-1)\mathbf{1} = 0 \quad (i \neq j)$$

となる。よって $J_{h+1} \cong \mathcal{J}_C$ となる。その同型対応は

$$\frac{1}{4}S_{e_i}(-1,-1)\mathbf{1} \longleftrightarrow s_i \quad (0 \leq i \leq h)$$

で与えられる。

C が (a), (b) を満たすと仮定して、$\mathcal{J}_C$ をグライス代数として持つ VOA を構成する為には $\mathcal{J}_C$ で生成される $M(1)^+$ の部分 VOA $V(\mathcal{J}_C)$ ($\mathcal{J}_C$ を含む最小の VOA) を考える事が一番自然である。$(V(\mathcal{J}_C))_2 = \mathcal{J}_C$ となっていれば目的は達成されるが、そうなる為には C に条件を加えなければならない。

Theorem 9 $k, h \in \mathbb{N}$ とし、$C \subseteq \mathbb{F}_2^k \setminus \{e_0\}$ が Proposition 8 の (a), (b) を満たすとする。この時 C が次を満たせば $(V(\mathcal{J}_C))_2 = \mathcal{J}_C$ が成立する：

(c) $c_1, c_2, \ldots, c_k \in C$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \in C \cup \{e_0\}$$

ならば

$$wt(\sum_{i=1}^{k} c_i) \equiv 2, 3 \ mod\ 4$$

が成立。 ∎

これらの事から我々の方法では D 型のジョルダン代数をグライス代数としてもつ VOA を構成するという問題は (a), (b), (c) を満たすような符号が存在するかという問題に言い換えられる。しかし、残念な事に (c) は非常に強い条件であり、任意の $h \in \mathbb{N}$ に対してこれらの条件を満たす符号の取り方は分かっていない。現段階では $h = 1, 2, 3, 5$ の時のみしか分かっていない。$h = 1, 2, 3$ の時は $C = \{e_i\}_{1 \leq i \leq h}$、$h = 5$ の時は

$$C = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$$

とすれば (a), (b), (c) を満たす。(c) より弱い $(V(\mathcal{J}_C))_2 = \mathcal{J}_C$ となる為の条件を見つける事が今後の課題の一つである。

4 Subalgebra Conjectureに対する反例

$h \geq 4$として$C = \{e_i\}_{1 \leq i \leq h}$とする。$C$は前章の条件のうち(a), (b)を満たすが(c)を満たさない。条件(c)は十分条件なのでCが$(V(\mathcal{J}_C))_2 = \mathcal{J}_C$を別に理由で成り立たせている可能性もあったが、そうはなっていないという事が今回分かった。その証明は簡単で次のpropositionを示せば$\mathcal{J}_C \subsetneq (V(\mathcal{J}_C))_2$である事がただちに分かる。

Proposition 10 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$が$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2$を満たすとする。この時

$$\begin{aligned}&[(S_{e_4}(-1,-1)\mathbf{1})_{k_4}, [(S_{e_3}(-1,-1)\mathbf{1})_{k_3}, [(S_{e_2}(-1,-1)\mathbf{1})_{k_2}, (S_{e_1}(-1,-1)\mathbf{1})_{k_1}]]]\mathbf{1}\\ &= 96\left(\binom{k_4}{3} + k_3\binom{k_4}{2}\right) S_{e_1+e_2+e_3+e_4}(-1,-1)\mathbf{1}.\end{aligned}$$

が成立。

この事から$S_{e_1+e_2+e_3+e_4}(-1,-1)\mathbf{1} \in (V(\mathcal{J}_C)_2$である事が分かる。しかし、Remark 7から$S_{e_1+e_2+e_3+e_4}(-1,-1)\mathbf{1} \notin \mathcal{J}_C$であるので、$\dim(V(\mathcal{J}_C))_2 > \dim \mathcal{J}_C$となる。よって$\mathcal{J}_C \subsetneq (V(\mathcal{J}_C))_2$となり、Subalgebra Conjectureに対する反例が得られた。

References

[1] A. A. Albert, A structure theory for Jordan algebra, *Ann. of Math.* **48** (1947), 546-567.

[2] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the monster, *Proc. Nalt. Acad. Sci. USA.* **83** (1986), 3068-3071.

[3] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, "Vertex operator algebras and the Monster", Pure and Applied Mathematics, 134. Academic Press, 1988.

[4] I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.* **66** (1992), no. 1, 123-168.

[5] C. H. Lam, Construction of vertex operator algebras from commutative associative algebras. *Comm. algebra.* **24** (1996), no. 14, 4339-4360.

[6] C. H. Lam, On VOA associated with special Jordan algebras. *Comm. Algebra.* **27** (1999), no. 4, 1665-1681.

[7] J. Lepowsky and H. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Progress in Mathematics Vol.227 Birkhäuser, 2004.

[8] M. Roitman, On Griess algebras, arXiv:math/0302021v6.