

## 均質化の基本的なアイデアと不均質媒体中のフロント伝播への応用

中村 健一 (電気通信大学)

KEN-ICHI NAKAMURA

University of Electro-Communications

Chofu, Tokyo 182-8585, Japan

nakamura@im.ucc.ac.jp

### 1 均質化 (homogenization)

複合材料においては、導電率や弾性係数などの物理パラメータが異なる材料間で不連続に変化している。その結合がミクロスケールであればパラメータの値は激しく変動し、材料の局所構造は複雑になる。一方で、そのような複合材料のミクロな構造が材料全体の物理的特性に影響することはよく知られており、単一の材料では得られない優れた特性を持つ複合材料の開発が各方面で行われている。

均質化法とは、端的に言えば、上記のような細かいミクロ構造 (その細かさをパラメータ  $\varepsilon$  で表すとする) を持つ材質において物理現象を考察するとき、支配する方程式に含まれているパラメータ  $\varepsilon$  を 0 に近づける極限操作である。これは物理的には、マクロな特性がもとの複合材料のものとはほぼ「等価」な均質材料を求めることを意味しており、複合材料の微視 / 巨視解析に盛んに利用されている。また、数学的には、空間的に激しく振動する係数を持つ (偏) 微分作用素を何らかの意味で近似する空間一様な係数を持つ (偏) 微分作用素を求めることに対応しており、J. L. Lions, Murat, Tartar らによって応用数学における理論体系の 1 つとして展開されてきた。

まず、かんたんな例を使って均質化の考え方を説明する。図 1 のような 2 種類の金属  $P$  (長さ  $\varepsilon_1$ ),  $Q$  (長さ  $\varepsilon_2$ ) を交互に多数つなげた長さ  $l$  の細長い棒状の複合材料を考える。金属  $P, Q$  の熱拡散率 (= 熱伝

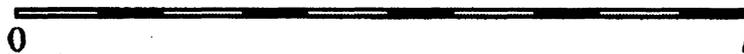


図 1: 2 種類の金属が交互に結合された複合材料の概念図

導率/(比熱容量 × 密度)) をそれぞれ  $d_P, d_Q$  とする。このとき、両端が一定温度 (0 とする) に保たれた長さ  $l$  の棒における熱伝導方程式の定常問題は

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( D \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

で表される。ただし、 $u(x)$  は位置  $x$  における棒の温度を表し、 $f(x)$  は熱の供給を表す。また、 $D(\xi)$  は  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  に対して

$$D(\xi) = \begin{cases} d_P, & \text{if } \varepsilon\xi \in P, \\ d_Q, & \text{if } \varepsilon\xi \in Q, \end{cases} \quad (1.2)$$

をみたす周期 1 の周期関数である。複合材料が非常に細かい構造を持っているとき (すなわち、 $\varepsilon$  が非常に小さいとき)、材料全体の熱拡散に対する特性はどうなるだろうか? (1.1) において単純に  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考えようとしても、係数  $D(x/\varepsilon)$  は  $\varepsilon$  が小さくなるにつれて激しく振動するため、通常の意味で極限を考えることはできない<sup>1</sup>。また、数値計算により適切な初期条件の下で (1.1) の解を求めようとしても、やはり  $D(x/\varepsilon)$  の振動のため空間メッシュを非常に細かくする必要があるため、コストがかかってしまう。

<sup>1</sup>  $D(x/\varepsilon)$  が  $D$  の平均  $\langle D \rangle_A := \int_0^1 D(\xi) d\xi$  に  $L^\infty$  の位相で汎弱収束することは言える。

そこで、複合材料を「等価」な均質材料で置き換えることを考える。すなわち、空間的に一様な熱拡散率の場合の問題

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(D_0 \frac{du}{dx}\right) = f(x), & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

を代わりに考え、 $\varepsilon \rightarrow 0$  のときに、(1.1) の解  $u^\varepsilon$  が (1.3) の解  $u^0$  に (何らかの意味で) 収束するような  $D_0$  を求める手法が均質化法の理論である。ちなみに、上記の問題の場合は、 $D_0$  として  $D(\xi)$  の調和平均

$$\langle D \rangle_H := \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{D(\xi)} \right)^{-1} = \left\langle \frac{1}{D} \right\rangle_A \quad (1.4)$$

をとればよいことが知られており、適切な条件の下で、(1.1) の弱解  $u^\varepsilon \in H_0^1(0, l)$  が (1.3) の弱解  $u^0 \in H_0^1(0, l)$  に弱収束することが知られている ([5] などを参照)。

## 2 不均質な環境における生物伝播

次に、生物の分野において「不均質性」が重要な役割を果たす問題として、不均質な環境における生物伝播を取り上げる。Shigesada-Kawasaki-Teramoto [10] は、生物にとって好適な場所 ( $F$ , 長さ  $\varepsilon_1$ ) と不適な場所 ( $U$ , 長さ  $\varepsilon_2$ ) が図 2 のようにパッチ状に交互に分布している不均質な環境への生物種の侵入が成功するかどうかを、空間非一様な係数を持つ Fisher モデル

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( d(x) \frac{\partial n}{\partial x} \right) + (b(x) - n)n, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \quad (2.1)$$

を用いて考察した。ここで、 $n(x, t)$  は位置  $x$ , 時刻  $t$  における生物の個体数密度であり、拡散係数  $d(x)$  お

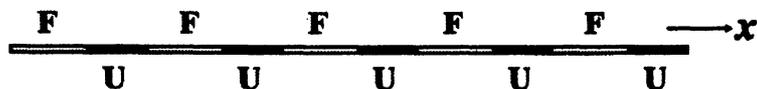


図 2: 規則的なパッチ状環境. 好適なパッチと不適なパッチが交互に並んでいる。

よび増殖率  $b(x)$  は

$$d(x) = \begin{cases} d_1 & \text{in } F, \\ d_2 & \text{in } U, \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} b_1 & \text{in } F, \\ b_2 (< b_1) & \text{in } U. \end{cases} \quad (2.2)$$

のように、各パッチ上で定数であるような周期  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  の周期関数とする。Shigesada らは、上記のような規則的な構造をしている環境に生物種が侵入したときに、侵入に成功して分布域が広がっていくための  $d_j, b_j, \varepsilon_j$  ( $j = 1, 2$ ) に対する条件を求めた。また、侵入が成功したときに分布の形が周期的に変動しながらつねに前方に広がっていくこと、より正確には、ある  $T > 0$  に対し

$$n(x, t + T) = n(x - \varepsilon, t) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R} \quad (2.3)$$

をみたす解が存在することを数値的に見出した。(2.3) をみたす解を周期的進行波 (あるいは脈動進行波) といい、 $c = \varepsilon/T$  をその平均速度 (実効速度) という。論文 [10] は空間周期的環境を伝播する周期的進行波の概念を導入した画期的な仕事であり、1990 年代に入って盛んになった数学的研究 (詳しくは、[2], [11] を参照) の先駆けとなるものである。(2.1) を含む、単安定型非線形項を持つ反応拡散方程式に対する周期的進行波の存在や (最小) 平均速度の導出は、1 次元の場合に Hudson-Zinner [4] により、高次元の場合は Berestycki-Hamel [2] により厳密に証明されている。

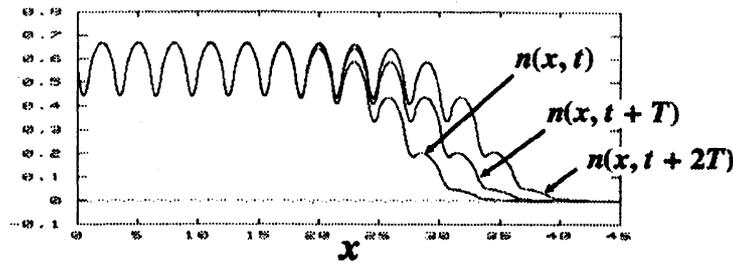


図 3: 周期的進行波の数値例 ( $d_1 = 1.0, d_2 = 0.5, b_1 = 1.0, b_2 = -0.5, \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 1$ ).

さらに [10] では, パッチ構造が非常に細かいときに, 周期的進行波の平均速度について

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c = 2 \sqrt{\langle b \rangle_A \langle d \rangle_H} \quad (2.4)$$

が成り立つことも形式的な議論により導いた。ただし,

$$\langle b \rangle_A := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon b(x) dx = \frac{b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \langle d \rangle_H := \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{d(x)} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_2}}$$

である。式 (2.4) の右辺は, 一様環境下 ( $d_1 = d_2 := d, b_1 = b_2 := b$ ) における進行波の伝播速度  $2\sqrt{bd}$  に対応したものとなっているが, なぜ拡散係数は調和平均  $\langle d \rangle_H$  で, 増殖率は算術平均  $\langle b \rangle_A$  で寄与するのだろうか。[10] においては,

- (1) 方程式 (2.1) を線形方程式で近似;
- (2) 解の遠方での decay rate ( $= e^{-\lambda x}$ ) を仮定して,  $\lambda$  と平均速度  $c$  との間の関係式 (分散関係式) を導出;
- (3) その分散関係式を  $\varepsilon$  が非常に小さいことを利用して近似し, 平均速度  $c$  を  $\lambda$  の式で表す;
- (4)  $\lambda > 0$  を動かしたときの  $c$  の最小値が求める伝播速度である;

として (2.4) を導いている<sup>2</sup>。また, [7] では,  $d(x)$  および  $b(x)$  が三角関数の場合に同様の議論を用いて, 環境の変化が伝播速度に与える影響を調べている。この考察は, 一様な場合から類推される不均質環境下の進行波の特徴を利用したものであり, [2] において数学的に正当化されているが, かなり複雑でたいへんな計算である。

### 3 均質化法による最小平均速度の導出 (1 次元)

本節では, 均質化法を用いて, 解の性質を (ほとんど) 利用することなく方程式 (2.1) の形だけから (2.4) を導出することを試みる。

$B(\xi) := b(\varepsilon\xi), D(\xi) := d(\varepsilon\xi)$  とおくと,  $B(\xi), D(\xi)$  は 1-周期関数であり,

$$\langle B \rangle_A := \int_0^1 B(\xi) d\xi = \langle b \rangle_A, \quad \langle D \rangle_H := \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{D(\xi)} \right)^{-1} = \langle d \rangle_H$$

が成り立つ (つまり, スケーリングにより平均は変化しない)。このとき, (2.1) は次のように表せる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \left( B \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - n \right) n, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.1)$$

ここで,  $s = x - ct$  (一定速度  $c$  で動く動座標),  $\xi = x/\varepsilon$  (ミクロ構造を記述する座標) とおき,

<sup>2</sup>講演中の説明は正確ではありませんでしたので, 修正しました。

- $n(x, t) = u_0(s, \xi) + \varepsilon u_1(s, \xi) + \varepsilon^2 u_2(s, \xi) + \dots$  ( $u_j(s, \xi)$  は  $\xi$  に関して 1-周期的).
- $c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$ <sup>3</sup>.
- $s$  と  $\xi$  は独立な変数であるとみなす (このとき,  $\partial_t = -c\partial_s$ ,  $\partial_x = \partial_s + \varepsilon^{-1}\partial_\xi$  となる).

を仮定する. 上記の漸近展開を方程式に代入すると, 次を得る.

$$-(c_0 + \varepsilon c_1 + \dots)\partial_s(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = (\partial_s + \varepsilon^{-1}\partial_\xi)(D(\xi)(\partial_s + \varepsilon^{-1}\partial_\xi)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)) + (B(\xi) - (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots))(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots). \quad (3.2)$$

これを展開し, 両辺の  $\varepsilon$  の次数が同じ項を等しいとおいて低次の項から順次係数を求めていく.

$O(\varepsilon^{-2})$

$$0 = \partial_\xi(D(\xi)\partial_\xi u_0)$$

より,

$$D(\xi)\partial_\xi u_0 = \exists p(s).$$

両辺を  $D(\xi)$  で割って  $\xi$  に関して積分平均をとると,  $\xi$  に関する周期性より  $p(s) \equiv 0$  を得るので,  $\partial_\xi u_0 = 0$ , すなわち

$$u_0 = u_0(s). \quad (3.3)$$

$O(\varepsilon^{-1})$

$$0 = \partial_\xi(D(\xi)(\partial_s u_0 + \partial_\xi u_1))$$

より,

$$D(\xi)(\partial_s u_0 + \partial_\xi u_1) = \exists q(s).$$

両辺を  $D(\xi)$  で割って  $\xi$  に関して積分平均をとると (3.3) より,  $\frac{du_0}{ds} = q(s)\langle 1/D \rangle_A$ , すなわち

$$q(s) = \langle D \rangle_H \frac{du_0}{ds}. \quad (3.4)$$

$O(1)$

$$-c_0\partial_s u_0 = \partial_s(D(\xi)(\partial_s u_0 + \partial_\xi u_1)) + \partial_\xi(D(\xi)(\partial_s u_1 + \partial_\xi u_2)) + (B(\xi) - u_0)u_0$$

の両辺の  $\xi$  に関する積分平均をとると, (3.3), (3.4) より,

$$\frac{d}{ds} \left( \langle D \rangle_H \frac{du_0}{ds} \right) + c_0 \frac{du_0}{ds} + (\langle B \rangle_A - u_0)u_0 = 0 \quad (3.5)$$

を得る. これは空間一様な係数を持つ Fisher 方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \langle D \rangle_H \frac{\partial n}{\partial x} \right) + (\langle B \rangle_A - n)n, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.6)$$

の進行波  $n(x, t) = u_0(x - c_0 t)$  がみたす方程式と同じであるから,

$$c_0 = 2\sqrt{\langle B \rangle_A \langle D \rangle_H} = 2\sqrt{\langle b \rangle_A \langle d \rangle_H}$$

であり,  $u_0$  は速度  $c_0$  を持つ (3.6) の進行波のプロファイルとなる.

上記の考察により, (3.1) (すなわち, (2.1)) の周期的進行波は,  $\varepsilon \rightarrow 0$  において (形式的には) (3.6) の速度  $c_0$  を持つ進行波に漸近することがわかる. ただし, あくまでも形式的な漸近展開である (しかも,  $s$  と  $\xi$  が独立変数であると仮定している) ことに注意する必要がある. 実際,  $u_1$  以降の項は変数  $\xi$  に依存し,  $\varepsilon \rightarrow 0$  のときに激しく振動することが予想される. したがって,  $\varepsilon$  が小さいとき (2.1) の周期的進行波  $n(x, t)$  が  $u_0(x - c_0 t)$  にどのような意味で近いかを議論しなければならないが, 時間発展かつ無限領域の問題なので数学的に難しい問題である (と私には思われる).

<sup>3</sup>講演時には  $c$  を展開していませんでした. 主要項に関しては結果は変わりません.

このように、均質化法により解の主要項を求めるためには、展開式 (3.2) において  $\varepsilon$  の次数の低い方から数えて最初の 3 項を計算する必要がある。問題によっては、環境の不均質性が解の性質に与える影響を調べるためにはより高次の項を求める必要が生じるが、次数が高くなるにつれて極めて困難な作業になることに注意されたい<sup>4</sup>。

なお、上記のように異なるスケールを導入して漸近展開を行う手法は、時間スケールに関しては、天体力学における永年項の問題を回避する手段として以前から用いられていた。1970 年代になって、このアイデアを空間スケールに対して適用すれば多孔質媒質中の液体の流れを平均化できるのではと考えたのが J. B. Keller であり、それが Papanicolaou を通じてフランスに話が伝わると J. L. Lions がたどるところに重要性を理解して、均質化法の理論構築を組織的に行ったというのが真相のようである ([8])。

#### 4 均質化法による最小平均速度の導出 (2 次元)

前節の問題を 2 次元に拡張すると、モザイク状に  $x$  方向、 $y$  方向に好適なパッチと不適なパッチが交互に並んでいる環境に侵入する生物のモデルとして、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \mathcal{D} \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \nabla n \right) + \left( B \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) - n \right) n, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (4.1)$$

を考えることになる。ただし、 $n(x, y, t)$  は位置  $(x, y)$ 、時刻  $t$  における生物の個体数密度を表し、また、

$$\mathcal{D}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} D_{11}(\xi, \eta) & D_{12}(\xi, \eta) \\ D_{21}(\xi, \eta) & D_{22}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

は楕円性の条件<sup>5</sup>をみたし、各成分  $D_{ij}(\xi, \eta)$  および  $B(\xi, \eta)$  は  $(\xi, \eta)$  に関して 1-周期的であるとする。2 次元の場合は、進行波の進む方向が 1 つでないので、以下では  $0 \leq \theta < 2\pi$  に対し、 $e_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$  方向に進む進行波について考察する<sup>6</sup>。前節を参考に、進行方向の動座標  $s = x \cos \theta + y \sin \theta - ct$  とマイクロ構造を記述する座標系  $\xi = x/\varepsilon, \eta = y/\varepsilon$  を導入し、

- $n(x, y, t) = u_0(s, \xi, \eta) + \varepsilon u_1(s, \xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(s, \xi, \eta) + \dots$  ( $u_j(s, \xi, \eta)$  は  $\xi, \eta$  に関して 1-周期的)。
- $c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$ 。
- $s, \xi, \eta$  は独立な変数であるとみなす (このとき、 $\partial_t = -c \partial_s, \partial_x = \cos \theta \partial_s + \varepsilon^{-1} \partial_\xi, \partial_y = \sin \theta \partial_s + \varepsilon^{-1} \partial_\eta$ )。

を仮定する。均質化法で  $\varepsilon$  の次数の低い最初の 3 項を計算すると、主要項  $u_0$  は  $s$  のみの関数で

$$\frac{d}{ds} \left( D_\theta \frac{du_0}{ds} \right) + c_0 \frac{du_0}{ds} + (\langle B \rangle_A - u_0) u_0 = 0 \quad (4.3)$$

をみたすことがわかる ( $\langle \cdot \rangle_A$  は  $T = [0, 1] \times [0, 1]$  における積分平均)。このとき、均質化された係数  $D_\theta$  は、最小周期セル  $T$  上の cell problem

$$\nabla \cdot (\mathcal{D}(\xi, \eta) \nabla N^k) = -\nabla \cdot (\mathcal{D}(\xi, \eta) e^k), \quad \langle N^k \rangle_A = 0, \quad N^k : 1\text{-periodic in } (\xi, \eta) \quad (4.4)$$

の (一意) 解  $N^k(\xi, \eta)$  ( $k = 1, 2$ ) を用いて (ただし、 $e^1 = (1, 0)^T, e^2 = (0, 1)^T$ )、

$$D_\theta = e_\theta^T \mathcal{D}^0 e_\theta \quad (4.5)$$

<sup>4</sup>例えば、(3.2) の  $O(\varepsilon)$  の項を計算して、 $c_1, u_1$  を求めてみよう。

<sup>5</sup> $\exists \alpha > 0$  が存在して、 $\forall (\xi, \eta), (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$  に対し  $\sum_{i,j=1}^2 D_{ij}(\xi, \eta) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$ 。

<sup>6</sup> $e_\theta$  方向の環境の変化は、 $\tan \theta$  が有理数のときは周期的だが、無理数のときは準周期的になることに注意。

により求めることができる。ただし、 $\mathcal{D}^0$  は行列  $\mathcal{D}(I + \nabla N)$  ( $I$  は単位行列、 $\nabla N$  は列ベクトル  $\nabla N^1, \nabla N^2$  を並べてできる行列) の各成分の  $\mathbf{T}$  における積分平均をとった  $2 \times 2$  の定数行列である。したがって、(4.1) の  $e_\theta$  方向に進む解の伝播速度は  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき、

$$c_0 = 2 \sqrt{\langle B \rangle_A D_\theta} \quad (4.6)$$

で与えられる。

一般の  $D_{ij}(\xi, \eta)$  ( $i, j = 1, 2$ ) に対しては、cell problem (4.4) の解を書き下すことができないので、 $D_\theta$  の値を具体的に計算することができない。紙数の都合により、以下では、計算できるいくつかの例を挙げておくとどめる。

### Case 1 $D_{ij} = d_{ij}(\xi)$ ( $1 \leq i, j \leq 2$ )

これは、図4のような  $y$  方向には一様な環境だが  $x$  方向には周期的に好適なパッチ ( $F$ ) と不適なパッチ ( $U$ ) が並んでいる領域で生物種の侵入を考えることに対応している。このときは、(4.4) を解くこと

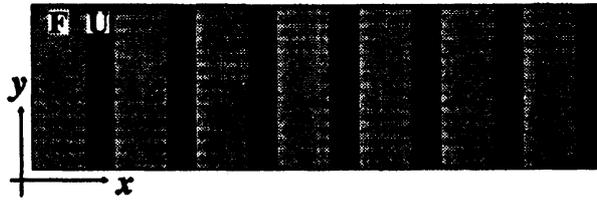


図4: 2次元パッチ状環境.  $y$  方向には一様だが、 $x$  方向には好適なパッチと不適なパッチが交互に並んでいる。

ができ、

$$\mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} D_{11}^0 & D_{12}^0 \\ D_{21}^0 & D_{22}^0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle d_{11} \rangle_H & \langle d_{11} \rangle_H \left\langle \frac{d_{12}}{d_{11}} \right\rangle_A \\ \langle d_{11} \rangle_H \left\langle \frac{d_{21}}{d_{11}} \right\rangle_A & \langle d_{22} \rangle_A + \langle d_{11} \rangle_H \left\langle \frac{d_{12}}{d_{11}} \right\rangle_A \left\langle \frac{d_{21}}{d_{11}} \right\rangle_A - \left\langle \frac{d_{12}d_{21}}{d_{11}} \right\rangle_A \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

となり、

$$D_\theta = D_{11}^0 \cos^2 \theta + (D_{12}^0 + D_{21}^0) \sin \theta \cos \theta + D_{22}^0 \sin^2 \theta \quad (4.8)$$

が得られる。特に、 $d_{11} = d_{22} = d(\xi)$ ,  $d_{12} = d_{21} = 0$  のときは、

$$\mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} \langle d \rangle_H & 0 \\ 0 & \langle d \rangle_A \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

すなわち、

$$D_\theta = \langle d \rangle_H \cos^2 \theta + \langle d \rangle_A \sin^2 \theta \quad (4.10)$$

となり、したがって、 $\varepsilon \rightarrow 0$  のときの  $e_\theta$  方向に進む進行波の速度は

$$c_0 = 2 \sqrt{\langle B \rangle_A (\langle d \rangle_H \cos^2 \theta + \langle d \rangle_A \sin^2 \theta)} \quad (4.11)$$

で与えられる。これは、Kinezaki らによって得られた結果 [6] と一致している。

### Case 2 $D_{11} = D_{22} = d_1(\xi)d_2(\eta)$ , $D_{12} = D_{21} = 0$ .

この場合も (4.4) を解くことができ、

$$\mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} \langle d_1 \rangle_H \langle d_2 \rangle_A & 0 \\ 0 & \langle d_1 \rangle_A \langle d_2 \rangle_H \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

すなわち、

$$D_\theta = \langle d_1 \rangle_H \langle d_2 \rangle_A \cos^2 \theta + \langle d_1 \rangle_A \langle d_2 \rangle_H \sin^2 \theta \quad (4.13)$$

を得る。

## 5 おわりに

近年、ミクロスケールの現象とマクロスケールの現象の相互作用が本質的な役割を果たすマルチスケール/マルチフィジックス現象がさまざまな分野で注目されている。生命現象においても、心臓の拍動リズムから個体の一生涯まで、あるいは1つの細胞から個体全体までというさまざまな時空間スケールが混在しており、複雑な現象の解明のためにはミクロとマクロの現象が連成した数理モデルが必要になると思われる。本稿で説明した均質化法は、そのようなマルチスケールの問題をミクロスケールの問題とマクロスケールの問題に分離し<sup>7</sup>、数学的な解析あるいは計算機シミュレーションによる解析を可能にする、極めて有効な手法の1つである。

均質化法の数学的な取り扱いやさまざまな問題への適用例については、[1], [9], [5], [3]などを参照されたい。

## 参考文献

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicoulau, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, 1978.
- [2] H. Berestycki and F. Hamel, *Front propagation in periodic excitable media*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **55** (2002), 949–1032.
- [3] U. Hornung (Ed.), *Homogenization and Porous Media*, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Vol. 6, Springer-Verlag, 1996.
- [4] W. Hudson and B. Zinner, *Existence of traveling waves of reaction diffusion equation of Fisher type in periodic media*, “Boundary value problems for functional differential equations”, World Scientific, River Edge, N. J., 1995, 187–199.
- [5] V. V. Jikov, S. M. Kozlov and O. A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, 1994.
- [6] N. Kinezaki, K. Kawasaki, F. Takasu and N. Shigesada, *Modeling biological invasions into periodically fragmented environments*, *Theor. Popul. Biol.*, **64** (2003), 291–302.
- [7] N. Kinezaki, K. Kawasaki and N. Shigesada, *Spatial dynamics of invasion in sinusoidally varying environments*, *Popul. Ecol.*, **48** (2006), 263–270.
- [8] J.-L. Lions, *Remarks on some asymptotic problems in composite materials and in perforated materials*, *Variational Methods in Mechanics of Solids* (Nemat-Nasser ed.), North-Holland, Pergman Press, 1979, 3–19.
- [9] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous Media and Vibration Theory*, *Lecture Notes in Physics* 127, Springer-Verlag, 1980.
- [10] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, *Theor. Popul. Biol.*, **30** (1986), 143–160.
- [11] J. Xin, *Front propagation in heterogeneous media*, *SIAM Review*, **42** (2000), 161–230.

---

<sup>7</sup>方程式 (4.1) の場合、ミクロスケールの問題 (4.4) を解くことでマクロスケールの問題 (4.3) の係数  $D_0$  が定まっている。