

季節型を考慮した個体群動態:

— Hybrid ダイナミカルシステムを用いた解析 —¹⁾

Population Dynamics with the Seasonal Variation
: Exact Approach to Hybrid Dynamical System

* 吉川満・** 加藤直人・*** 浦田道夫・**** 坂戸克匡

* 関西学院大学大学院経済学研究科経済学専攻

** 横浜国立大学大学院環境情報学府環境リスクマネジメント専攻

*** 東京大学大学院数理科学研究科数学専攻 **** 龍谷大学大学院理工学研究科環境ソリューション専攻

*Mitsuru KIKKAWA, **Naoto KATO, ***Michio URATA ***Yoshikuni SAKATO

* *Department of Economics, Graduate School of Economics,
Kwansei Gakuin University, Nishinomiya 662-8501 JAPAN
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp*

** *Department of Risk Management and Environmental Sciences,
Graduate School of Environment and Information Sciences,
Yokohama National University, Yokohama 240-8501 JAPAN*

*** *Department of Mathematics, Graduate School of Mathematical Sciences,
Tokyo University, Tokyo 153-8914 JAPAN*

**** *Department of Environmental Solution Technology, Graduate School of Science and Technology,
Ryukoku University, Otsu 520-2194 JAPAN*

This paper examines the Population Dynamics, the main problem in Mathematical Biology, with Hybrid Dynamical System. In this paper, "Hybrid Dynamical System" says that Dynamical System is consisted of Differential Equation (Continuous Time) and Difference Equation (Discrete Time). When we examine this system, we aim at the Discrete Time. In detail, this paper examines Malthus growth model, Logistic growth model, Logistic growth model with Harvesting, and Amensalism model, hereafter "Basic Model", further, this paper transforms these Basic Model into Hybrid Dynamical System, hereafter "Hybrid Model". This paper examines the difference between Basic Model and Hybrid Model. This paper is found that Logistic growth model with Harvesting is consistent with the Basic Model by the "optimality" about harvesting. Furthermore, Amensalism model has no coexistence equilibrium, this paper proves the existence of coexistence equilibrium in Amensalism's Hybrid Model. This paper is prepared to basic mathematical principle to analysed more complexed Hybrid Dynamical System in future.

1 はじめに

本稿では季節的に起こる生物行動の変化を記述する数理モデルを考察した。伝統的には数理生物学では「季節」という概念を表すために出生率や死亡率を表す係数に時間変動, 例えば \sin 関数や \cos 関数などの関数を組み込むことにより季節性を表現していた。その結果全期間に季節の影響を導入していた。しかしすべてのパラメーターに常に時間変動が起こっているのは, 例えば冬眠する生物などを表すのに現実的ではない。そこである季節のみを単純な方程式で表すことにより, より現実的な数理モデルを作ることはできないだろうか。ここでは一時的な変化を表す概念として差分方程式を導入し, 微分方程式と差分方程式が混合しているシステムである Hybrid システムを考えた。またこの Hybrid システムにおいて, 離散時間が支配している期間が十分小さく, 「一時的」なときの Hybrid システムをインパルス微分方程式 (Impulsive Differential Equation) と呼ばれている²⁾。そしてこの Hybrid システムは様々な分野の研究に応用されている。例えばこの Hybrid システムを数学として記述した Guckenheimer and Johnson [7], Johnson [8] がある。これは連続時間力学系と離散時間力学系があり, 複数の連続時間力学系をスイッチングにより切り替えるもので, その

¹⁾ 本論文は『新しい生物数学の研究交流プロジェクト 2007』内で企画された数理モデリングコンテストで発表した内容を参加者, 特別講師の方々からのコメントを活かし, 大幅に拡張し, 書き直したものである。特に瀬野裕美先生には我々のグループの Mentor として様々なコメント頂いた。ただし本論文にあるすべての誤りは筆者らの責任である。またこのような研究会を通じて, 筆者らは大いに刺激を受けた, 改めてこの研究会を企画した瀬野裕美先生, 齋藤保久先生, 並びに京都大学数理解析研究所に感謝する。

²⁾ このインパルス微分方程式について解説した本として, Bainov and Simeonov [2], Lakshmikantham, Bainov and Simeonov [11] Bainov and Simeonov [3] などが挙げられる。

切り替えが離散時間力学系で記述される。このような Hybrid なシステムを考えることで、個々の方程式の挙動は単純なものでも、全体の挙動は予期しないほど複雑になりうる可能性を示している。

この Hybrid システムは複雑なシステムをモデリングする際に非常に自然な枠組みを提供する。例えばこの季節性の問題では元来 1 年を通じて、動物の季節型に起因する行動は一時的である³⁾。この季節型の概念を応用させると次のような例を考えることができる。例えば「繁殖行動 (mating)」の問題では哺乳類の出産シーズンを考えると、親個体の行動範囲が狭まり、多種との関係性が著しく弱くなる時期が存在する。「栄養繁殖」の問題ではササに見られ、一斉枯死という突発的な変化の現象が知られている。「資源管理」の問題では常に資源を管理していることはできず、資源の季節に合わせ、人間は資源を管理し、共存を計っている。そのため人間の行動は突発的な・非連続な行動となる。「感染症」の問題では潜伏期間があり、突発的な再発が起こる。このようにこの Hybrid システムを用いると、今まで説明し辛かった多くの非連続的な変化の現象をうまく説明することができる。

Hybrid システムではこの一時的な変化を差分方程式を用いて記述する。具体的にはある時間 $t = n + T_{start}$ から $n + T_{end}$ 、ただし $n = 1, 2, \dots$ を連続時間に支配され、 $t = n + T_{end}$ から $(n + 1) + T_{start}$ までが離散時間体系に支配されていると考える。またその期間では種間相互作用がなく、非連続的な変化が起こっているとす。特に本稿では $F((n + 1) + T_{start}) = \alpha F(n + T_{end})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, F は個体数密度とした。そこでこの Hybrid システムの $t = n + T_{end}$ に着目し、全体を離散時間体系として分析する。よってその結果微分方程式体系は差分方程式体系に変更し、分析した。

また川澤 [10] は先駆的にキツネの疥癬への感染とその伝播に関して Hybrid システムを用いて分析している。ここではキツネは 3 つの状態, S:未感染, H:未発症, I:発病個体があり、ある一定の関係があり、そのもとのダイナミクスを記述している。特に未感染のキツネの出産を差分方程式系で記述し、Hybrid システムとしている。その結果安定した個体数密度を保っていたキツネ集団に微小の感染個体が侵入すると、カオスの状態となる場合の存在をシミュレーションを用いて、見出している。しかし Hybrid システムの数理的な構造の特徴を限定的に使用し、シミュレーションを用いた分析となっているために、Hybrid システムとの数理的な因果関係が分かりづらい。

そこで本稿では基本的な 1 本の連続時間力学系に離散時間力学系がある一定の時間 (τ) で含まれている Hybrid システムを考え、単純なモデルから Hybrid システムの数理構造を明らかにすることを目標とする。具体的には最も単純なモデルである、Malthus 型、Logistic 型微分方程式に Hybrid システムを用いて、Hybrid システムの影響を分析した。また Logistic 型微分方程式に収穫の項を導入し、伝統的な連続的な収穫から Hybrid システムの場合やその特殊ケースである、一時的な収穫 (impulsive harvesting) に変更し、この収穫の仕方の違いを考察した。さらに周期的に変動する Logistic 型微分方程式を取り上げ、ここでも一時的な季節変動に変更し、これらの違いを考察した。次に 2 種系、偏害モデルを分析した。ここでは両種が Hybrid システムの場合や一方の種のみが Hybrid システムの場合を考察した。

この論文は次のように構成されている。第 2, 3 節では、それぞれ最も簡単な 1 種系の Malthus 型成長モデル、Logistic 型成長モデルを取り上げ、Hybrid システムがどのように通常の微分方程式に影響を与えるのかを考える。第 4 節では、第 3 節で議論した Logistic 方程式に収穫の項を導入した。この「収穫」のモデルを Hybrid システムやインパルスシステムに拡張し、これらのモデルにおける結果を見比べた。第 5 節では、2 種系で最も簡単な偏害モデルを取り上げ、Hybrid システムにすることによって、内部平衡点の存在を導いた。第 6 節では、まとめを行い、Hybrid システムの今後の方向性や課題を述べる。

³⁾特にこの一時的な季節的な変化は一般に「季節型 (seasonal variation)」と呼ばれている。この季節型は同一種の生物の形態や色彩などが季節によって異なる時、それぞれの型をいう。年二世代以上繰り返すチョウなどの春型と夏型、ライチョウやウサギなどの色彩はその例であることが知られている。

2 Malthus 型成長 (1 種系)

2.1 基本モデル

この節で最も単純な Malthus 型の Hybrid システムを分析する。まず一般的な Malthus 型の微分方程式は次のような方程式である。

$$(2.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t),$$

ただし、 $r(\neq 0)$ は増殖率とする。この解は $x(t) = x(0) \exp[rt]$ である。よって x は $r < 0$ ならば 0 に収束し、 $r > 0$ ならば発散する。

2.2 Hybrid システム

次に Malthus 型の Hybrid システムを定義する。ここでは 1 年 (単位時間) のうちの殆どを Malthus 型で増殖し、ある期間で一斉に変化するような生物を考える。よってこの場合次のように定式化することができる。

$$(2.2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(2.3) \quad x((n+1) + T_{start}) = \alpha x(n + T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

ただし r は増殖率、 α はある期間限定の個体数密度の変化率を表す。さらに $\tau = T_{end} - T_{start}$, $\tau \in [0, 1]$ とする。またこれを図示すると、図 1 のようになる。

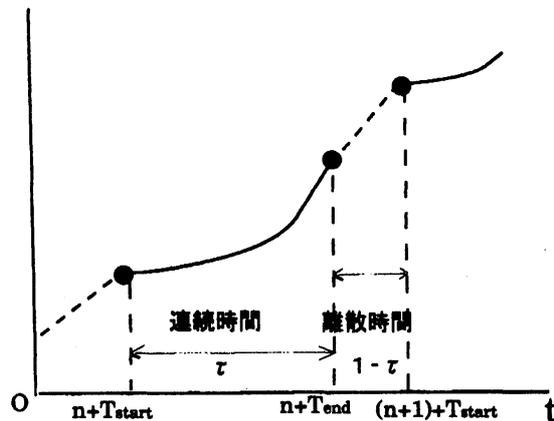


図 1: Hybrid システムのイメージ (例: Malthus 型)

この方程式を毎期の T_{end} に着目した差分方程式と考えて解くと、

$$(2.4) \quad x(n + T_{end}) = x(0 + T_{end}) \alpha^n \exp[r\tau n]$$

となる。よって次のことが分かる。

$$(2.5) \quad \alpha \exp[r\tau] > 1 \text{ のとき発散し, } \alpha \exp[r\tau] < 1 \text{ のとき 0 に収束する.}$$

上記のことをまとめると次のような命題となる。

命題 1. Malthus 型微分方程式 (2.2), 差分方程式 (2.3) からなる Hybrid システムにおいて、 $\alpha \exp[r\tau] > 1$ のとき X は発散し、 $\alpha \exp[r\tau] < 1$ のとき 0 に収束する。さらに $\alpha \exp[r\tau] = 1$ の場合 X は初期値と同じ値を取る周期解となる。

この $\alpha \exp[r\tau]$ の項は Malthus 成長の項と離散時間で変化する割合との掛け算となっている。よって x はある離散時間での変化の割合 α が大きく、Malthus 成長の項も大きければ発散する。逆に小さい場合は 0 に収束するということが分かる。

3 Logistic 型成長 (1 種系)

3.1 基本モデル

この節で Logistic 型の Hybrid システムを分析する。まず一般的な Logistic 型の微分方程式は次のような方程式である。

$$(3.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right).$$

ここで $X = \frac{x}{K}$ と置く。 X は環境収容力に対する個体数密度の割合を表す。すると次のように変形することができる。

$$(3.1)' \quad \frac{dX(t)}{dt} = rX(t)(1 - X(t)).$$

このときの解は $X(t) = \frac{X(0)}{X(0)\exp[-rt]}$ である。初期値が環境収容力 1 よりも大きい場合には時間と共に単調に減少し、環境収容力 1 に近づく。逆に環境収容力 1 よりも小さい場合には単調に増加し、環境収容力 1 に近づく。

またここで種の個体数密度の変化に関する関数を導入する。 T 期後の (3.1) の解を $x(T, y)$ とし、そのときの種の個体数密度の変化を $f(y) = x(T, y) - y$ とすると、次のようになる。

$$(3.2) \quad f(y) = x(T, y) - y = \frac{y(K - y)(\exp[rT] - 1)}{(\exp[rT] - 1)y + K}.$$

この関数を最大にするような y を求めると次のようになる。

$$y_1 = \frac{(-1 + \sqrt{\exp[rT]})K}{\exp[rT] - 1}, \quad y_2 = -\frac{(-1 + \sqrt{\exp[rT]})K}{\exp[rT] - 1}.$$

このときの最大増加密度 $f(y_1)$ の値は次のようになる。

$$(3.3) \quad \omega = \max f(y) = f(y_1) = \frac{(\exp[rT/2] - 1)^2 K}{\exp[rT] - 1}.$$

よって単位時間辺りの最大増加密度は次のようになる。

$$(3.4) \quad \max \frac{f(y)}{T} = \frac{(\exp[rT/2] - 1)^2 K}{(\exp[rT] - 1)T}.$$

3.2 Hybrid システム

次に Logistic 型の Hybrid システムを定義する。

$$(3.5) \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(3.6) \quad x((n + 1) + T_{start}) = \alpha x(n + T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

先ほどと同様に $X = \frac{x}{K}$ と置くと、(3.5), (3.6) は次のようになる。

$$(3.5)' \quad \frac{dX(t)}{dt} = rX(t)(1 - X(t)), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(3.6)' \quad X((n + 1) + T_{start}) = \alpha X(n + T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

(3.5)' を解くと、次のようになる。

$$(3.7) \quad \frac{1}{X(n + T_{end})} = \frac{\exp[-r\tau]}{X(n + T_{start})} - \exp[-r\tau] + 1.$$

さらにこの漸化式を解くと、次のようになる。

$$(3.8) \quad X(n + T_{end}) = \frac{1}{\left[\frac{1}{X(0 + T_{end})} - \frac{1 - \exp[-r\tau]}{1 - \exp[-r\tau]} \right] (\alpha \exp[r\tau])^{-n} + \frac{1 - \exp[-r\tau]}{1 - \exp[-r\tau]}}.$$

次に方程式の平衡状態を求める。

$$(3.9) \quad \alpha \exp[r\tau] < 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n + T_{end}) = 0.$$

$$(3.10) \quad \alpha \exp[r\tau] = 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n + T_{end}) = X(0 + T_{end}) \text{ (周期解).}$$

$$(3.11) \quad \alpha \exp[r\tau] > 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n + T_{end}) = \frac{1 - \exp[-r\tau]}{1 - \exp[-r\tau]} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{\exp[r\tau] - 1}.$$

特に $\tau \rightarrow 1$ の場合 $X(n + T_{end}) \rightarrow 1$ (環境収容力).

特に $\tau \rightarrow 0$ の場合 $X(n + T_{end}) \rightarrow \infty$.

以上のことをまとめると次のような命題となる.

命題 2. Logistic 型微分方程式 (3.5), 差分方程式 (3.6) からなる Hybrid システムにおいて, $\alpha \exp[r\tau] > 1$ の場合 X は $1 + \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{\exp[r\tau] - 1}$ に収束する. 特に $\tau \rightarrow 1$ のとき $X(n + T_{end}) \rightarrow 1$, $\tau \rightarrow 0$ のとき, $X(n + T_{end}) \rightarrow \infty$ となる. また $\alpha \exp[r\tau] < 1$ の場合 X は 0 に収束する. さらに $\alpha \exp[r\tau] = 1$ の場合 X は初期値と同じ値を取る周期解となる.

よってこの Hybrid システムは $\alpha \exp[r\tau] > 1$ の場合ある値に収束する. ただし $\tau \rightarrow 1$ の場合は Logistic 型微分方程式のみとなるので, 環境収容力 1 へ収束し, $\tau \rightarrow 0$ の場合は差分方程式のみとなり, ∞ へ発散する.

次節で考察する収穫による影響を考える際, ここでは $E(1 > E > 0)$ を収穫に関する努力量とし, $\alpha \rightarrow (1 - E)$ とすれば, 所望のモデルとなる. よって連続時間が支配しているときは, Logistic 方程式によって成長し, 離散時間が支配しているときには収穫を行うというモデルになる. このとき努力量に着目した命題 2 は次のように変更することができる.

命題 2'. Logistic 型微分方程式 (3.5), 差分方程式 (3.6) からなる Hybrid システムにおいて, $0 < E < 1 - \exp[-r\tau]$ の場合, X は $1 - \frac{E}{1 - \exp[-r\tau]}$ に収束する. また $E > 1 - \exp[-r\tau]$ の場合 X は 0 に収束する. さらに $E = 1 - \exp[-r\tau]$ の場合 X は初期値と同じ値を取る周期解となる.

この命題 2' から努力量が多い場合資源は枯渇し, そうでない場合, 資源はある値に収束するということを表している.

4 収穫による影響

4.1 基本モデル

ここでは人間が生物資源として利用する生物の捕獲 (capture) あるいは収穫 (harvesting) の影響を考える. この影響は生物集団に大きな影響を与え, 場合によっては種の絶滅をもたらす可能性のある重要な問題である. 特に Clark [5], 寺本 [15] に従い, 基本モデルを記す.

$$(4.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(t).$$

まず単位時間での収穫量 $h(t)$ が一定 $h(t) = h (> 0)$ で行われる場合を考える. この場合は直接解を求めることもできるが, 図を用いると, 容易に解の定性的な振る舞いを知ることができる⁴⁾.

図 2 左のように, 横軸に x の値をとり, (4.1) 式の右辺第 1 項で与えられる放物線と縦座標の値が h の水平線を描く. この放物線は $x = \frac{K}{2}$ で最大値, 最大持続収穫量 (MSY, maximum sustainable yield) $\frac{rK}{4}$ をとる. したがって水平線はその高さ h が $\frac{rK}{4}$ よりも小さいときには, 放物線と 2 点 x_- と x^* で交わる. そして x が x_- と x^* の間の値をもつときには, 右辺の第 1 項 (放物線) が第 2 項 (水平線) より大きく (4.1) 式

⁴⁾ この問題を収穫資源の最大化の問題として捉えると次の通りになる.

$$\max_h \sum_{t=1}^{\infty} h, \quad \text{subject to } \frac{dx}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h$$

このときの Hamilton 関数は

$$H = h + \mu(rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h)$$

これから,

$$(F.1) \quad \frac{\partial H}{\partial h} = 1 - \mu = 0, \quad (F.2) \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu r \left(1 - \frac{2x}{K}\right) = 0,$$

(F.1), (F.2) から $x^* = \frac{K}{2}$ が得られる. またこれと制約条件から $h^* = \frac{rK}{4}$ が得られる.

は正になって個体数密度 x は増加し、逆にその外側では負で個体数密度 x は減少することがわかる。このようにして、この生物の個体数密度は捕獲・収穫が行われなときの定常値である環境収容力よりはもちろん減少するが、定常な値 x^* を保つことになる。しかしまだ充分存在しているからという理由で収穫量を増やしていくと、収穫量が $\frac{rK}{4}$ 、したがって残存個体数密度が $\frac{K}{2}$ を境にして急に 0 に収束することが分かる。

次に単位時間での収穫量 $h(t)$ が比例的 $h(t) = amx(t)$ (例えば m は漁船の数) で行われる場合を考える⁵⁾。すると (4.1) は次のようになる。

$$(4.1)' \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - amx(t).$$

先ほどと同様に図を用いた分析を行うと、放物線と $h(t)$ との交点は次のように求めることができる。

$$x^* = K\left(1 - \frac{am}{r}\right).$$

ここで m を増やしていくと、個体数密度が徐々に減少し、 $m = \frac{r}{a}$ でその個体数密度は 0 に収束する (図 2 右)。

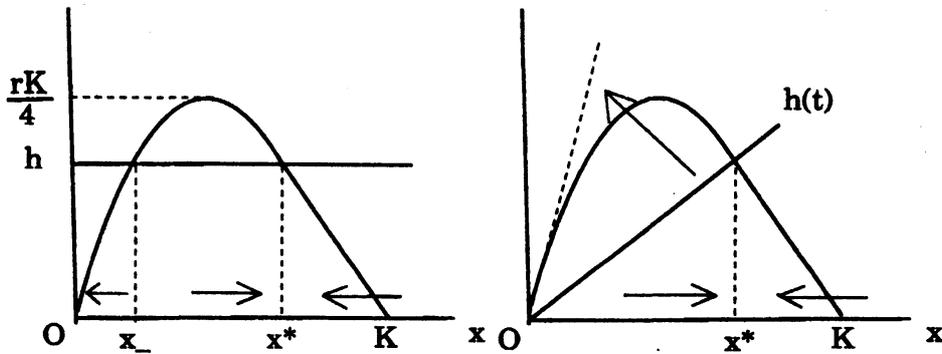


図 2: 左: (4.1) で h が一定の場合: x_- は不安定平衡点で、 $0, x^*$ が安定平衡点。右: (4.1)' による個体数の平衡値。

4.2 Hybrid システム

4.2.1 収穫量が一定の場合

ここでは収穫量が一定な場合のモデルを考察する。ここでは次のような連続時間が支配しているときは Logistic 成長をし、離散時間が支配しているとき、一定の収穫を行うというモデルである。

$$(3.5)' \quad \frac{dX(t)}{dt} = rX(t)\left(1 - X(t)\right), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(3.6)' \quad X((n + 1) + T_{start}) = X(n + T_{end}) - E, \quad \text{それ以外.}$$

このモデルは解析的に解く事ができない。

4.2.2 収穫量が比例的な場合

ここでは収穫量が努力 E に比例的な場合のモデルを考察する。ここでは次のような連続時間が支配しているときは Logistic 成長をし、離散時間が支配しているときその種の個体数密度に比例して、収穫を行うと

⁵⁾この問題も収穫資源の最大化の問題として捉えると次の通りになる。

$$\max_h \sum_{t=1}^{\infty} amx, \quad \text{subject to } \frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - amx$$

同様にして解くと、 $x^* = \frac{K}{2}$ が得られる。またこれと制約条件から $am = \frac{r}{2}$ が得られ、 $h^* = amx^* = \frac{rK}{4}$ となる。

いうモデルである。前述したように第3節の内容を $\alpha \rightarrow (1-E)$ にすることによって、収穫量が比例的な場合に適用できる。

$$(3.5)' \quad \frac{dX(t)}{dt} = rX(t)(1-X(t)), \quad t \in [n+T_{start}, n+T_{end}].$$

$$(3.6)' \quad X((n+1)+T_{start}) = (1-E)X(n+T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

このときは次の命題が成立した。

命題 2'. Logistic 型微分方程式 (3.5), 差分方程式 (3.6) からなる Hybrid システムにおいて, $0 < E < 1 - \exp[-r\tau]$ の場合, X は $1 - \frac{E}{\exp[r\tau] - 1}$ に収束する。また $E > 1 - \exp[-r\tau]$ の場合 X は 0 に収束する。さらに $E = 1 - \exp[-r\tau]$ の場合 X は初期値と同じ値を取る周期解となる。

またここで離散時間と連続時間が支配している期間の比である τ に着目する。 $\tau = 0$ の場合は離散時間のみ支配し、収穫しか行われぬ。また $\tau = 1$ の場合は連続時間のみが支配し、収穫が行われぬ。よって $\tau \approx 1$ の場合に種の個体数密度 X が最大となる。

次に収穫量に関する最適化問題を考える、

$$\begin{aligned} \max_E E \sum_{t=1}^{\infty} X(t), \\ \text{subject to } X((t+1)+T_{end}) = \frac{1}{\left[\frac{1}{X(t+T_{end})} - \frac{1 - \exp[-r\tau]}{\exp[-r\tau]} \right] \{(1-E) \exp[-r\tau]\}^{-1} + \frac{1 - \exp[-r\tau]}{1 - \frac{\exp[-r\tau]}{1-E}}}. \end{aligned}$$

この問題は動的計画法や最適制御理論を用いて、直接人間の手を用いて解く事はもはや不可能である。そこで前節の結果を用いてこの最適性について分析する。今までの議論により、時間を無限大にしたとき、 $(1-E) \exp[-r\tau] < 1$ の場合は種 X の個体数密度は 0 に収束した。よってこの条件を満たす時は、どのように E を用いて、制御・管理したとしても、個体数密度は 0 に収束する。よってこの問題が生じるのは、 $(1-E) \exp[-r\tau] > 1$ の条件を満たす場合である。この条件を満たす時は、 X は $1 + \frac{1 - \frac{1}{1-E}}{\exp[r\tau] - 1}$ に収束した。先ほどの問題を平衡状態における最適化問題と考えると、次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \max_E E \sum_{t=1}^{\infty} X(t) \\ \text{subject to } X(t) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{1-E}}{\exp[r\tau] - 1} \end{aligned}$$

これを求めると、 $E^* = 1 \pm \sqrt{\exp[-r\tau]}$ 、ただし、 $0 < E < 1$ から、 $E^* = 1 - \sqrt{\exp[-r\tau]}$ である。またこの関数は $\tau \rightarrow \infty$ とすると、 $E \rightarrow 1$ となる。このときの種の個体数密度は $X^* = \frac{1 - \sqrt{\exp[-r\tau]}}{\sqrt{\exp[r\tau]} - \sqrt{\exp[-r\tau]}}$ であり、最適持続可能な成長経路 (maximal sustainable growth path) が導出された。

次節ではこの $\tau \approx 1$ のみしか考慮に入れない、一時的な収穫 (Impulsive Harvesting) を取り上げ、この場合と比較する。

4.3 一時的な収穫 (Impulsive Harvesting)

上記の基本モデルでは逐次収穫を行うモデル、また Hybrid システムの収穫のモデルは離散時間が支配しているときのみ収穫を行うというモデルであったが、ここでは Zhang, et al. [19], Bai and Wang [1] に従い⁶⁾、上記で展開した収穫による影響を一時的な収穫 (impulsive harvesting) の問題を取り上げる。よってこの「一時的」ということをこの時にのみ「収穫」を行うと考え、方程式に非連続的な関数を組み入れる。つ

⁶⁾ さらにこのモデルの Dirac 関数を n 個の要素に依存するとした研究として、Shuai, et al. [14] もある。

まり上述の Hybrid システムでは $\tau \approx 1$ の場合に対応している. 具体的には次のような方程式系を考える.

$$(4.2) \quad \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \delta(s(t))Eh(N(t)), \quad N(t_0) = N_0.$$

ただし δ は Dirac 関数⁷⁾ またここで Heaviside 関数 $\theta(t)$ を導入する. つまり次の条件を満たす関数である.

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } s(t) \geq 0, \\ 0, & \text{if } s(t) < 0. \end{cases}$$

よって $t \neq nT$ のとき $s(t) = -1$ であり, $\theta(s(t)) = 0$ となることから, 収穫は行わないとする. また $t = nT$ のとき $s(t) = 0$ であり, $\theta(s(t)) = 1$ となることから, 収穫を行うとする. このことを図示すると, 図 3 のような構造となっている. よって $t = nT$ のときの収穫量 $Q(nT)$ は次を満たす.

$$Q(nT) = \int_{-\infty}^{nT} \delta(s(t))Eh(N(t))dt - \int_{-\infty}^{(n-1)T} \delta(s(t))Eh(N(t))dt = Eh(N(nT)).$$



図 3: インパルス微分方程式の時間構造: 時間 T 毎に収穫が行われる.

4.3.1 h が一定の場合

ここでは一時的な収穫は一定量収穫, $h(N(t)) = 1$ とする. すると (4.2) は次のように変形することができる.

$$(4.3) \quad \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \delta(s(t))E, \quad N(t_0) = N_0.$$

この解を $N(t, t_0, N_0)$ とし, 収穫の影響がない場合の方程式 (3.1) の解を $x(t, t_0, x_0)$ とする. このとき次の命題が導かれる.

命題 3. (Zhang, et al. [19]) (i) $0 < E < \omega$ のとき, (4.3) には 2 つの正のインパルス周期解 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ が存在し, 次に関係を満たす.

$$\begin{aligned} \xi_1(nT) &= \frac{1}{2} \left(K - E - \sqrt{(K - E)^2 - \frac{4EK}{\exp[rT] - 1}} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \xi_2(nT) &= \frac{1}{2} \left(K - E + \sqrt{(K - E)^2 - \frac{4EK}{\exp[rT] - 1}} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(ii) $E = \omega$ のとき (4.3) には唯一の正のインパルス周期解 $\xi(t)$ が存在し, $\xi(nT) = \frac{1}{2}(K - E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ を満たす.

証明 ここで (3.2) を用いて, 種の個体数密度から収穫量を引いたものを次のような関数とする.

$$F(y) := f(y) - E = \frac{(\exp[rT] - 1)y(K - y)}{(\exp[rT] - 1)y + K} - E,$$

ここで $F(y) = 0$ となる平衡点 y^* は

$$y^* = \frac{(K - E) \pm \sqrt{(K - E)^2 - \frac{4EK}{\exp[rT] - 1}}}{2},$$

である. また $0 < E < \omega$ の場合, 平方根の中は $E = \omega$ のとき, 0 となるので, この場合は正となる. また $F(y) = 0$ となる y^* をそれぞれ y_1, y_2 とする. すると

$$\begin{aligned} N(T, 0, y_1) &= x(T, y_1) - E = x(T, y_1) - y_1 - E + y_1 = f(y_1) - E + y_1 \\ &= F(y_1) + y_1 = y_1 = N(0, 0, y_1), \end{aligned}$$

となる. また

⁷⁾ $\delta(0) = \infty$, $s \neq 0$ のとき $\delta(s) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)ds = 1$, また

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t = nT, n \in \mathbb{N}, \\ -1, & t \neq nT, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \text{ である.}$$

$$\begin{aligned} N(2T, 0, y_1) &= N(2T, T, N(T, 0, y_1)) = N(2T, T, y_1) = x(2T, T, y_1) - E \\ &= x(T, y_1) - E = y_1, \end{aligned}$$

となるので, $N(nT, 0, y_1) = y_1, \forall n \in \mathbb{N}$ であることが分かる. よって $N(nT, 0, y_2) = y_2 = N(0, 0, y_2), \forall n \in \mathbb{N}$ であることも分かる. それゆえ $\xi_1(t) = N(t, 0, y_1), \xi_2(t) = N(t, 0, y_2)$ は $\xi_1(nT) = y_1, \xi_2(nT) = y_2, \forall n \in \mathbb{N}$ となる, (4.3) のインパルス周期解である.

$E = \omega$ のとき, $F(y) = 0$ の解は重解 $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}(K - E)$ となる. よって (4.3) は $\xi(t), \xi(nT) = \frac{1}{2}(K - E), \forall n \in \mathbb{N}$ となるような唯一のインパルス周期解を持つ. (証終)

命題 4. (Zhang, et al. [19]) (i) $E < \omega$ であり, $N_0 > y_1$ のとき, $t \rightarrow +\infty$ となるにつれて, $N(t, 0, N_0) \rightarrow \xi_2(t)$ となり, $0 < N_0 < y_1$ のときは, $N(t, 0, N_0) \rightarrow 0$ となる. (ii) $E = \omega$ であり, $N_0 > \frac{1}{2}(K - E)$ のとき, $t \rightarrow +\infty$ となるにつれて, $N(t, 0, N_0) \rightarrow \xi(t)$ となり, $N_0 < \frac{1}{2}(K - E)$ のときは, $N(t, 0, N_0) \rightarrow 0$ となる. (iii) $E > \omega$ であり, $\forall N_0 \geq 0$ のとき, $t \rightarrow +\infty$ となるにつれて, $N(t, 0, N_0) \rightarrow 0$ となる.

証明 $y < \bar{y}$ のとき, $dF(y)/dy = f'(y) > 0$ となり, $y > \bar{y}$ のとき, $dF(y)/dy = f'(y) < 0$ となる. 中間値の定理によって, $y_2 > \bar{y} > y_1$ となるものが存在することが分かる. よって次の等式も成り立つことが分かる,

$$K > K - E > y_2 > \bar{y} > y_1 > 0.$$

そして $y_1 < y < y_2$ のときは, $F(y) > 0$ であり, $0 < y < y_1$, または $y > y_2$ のときは $F(y) < 0$ である.

ここで $E < \omega$ のときを考える. 任意の $N_0 > y_2$ で, $N_n = N(nT, 0, N_0)$ とする. すると

$$N_1 = x(T, N_0) - E = f(N_0) + N_0 - E = F(N_0) + N_0 < N_0.$$

であり, また $N_0 > y_2$ のときは

$$N_1 = x(T, N_0) - E > x(T, y_2) - E = N(T, 0, y_2) = \xi_2(T) = y_2.$$

となる. 同様にして,

$$N_2 = N(2T, 0, N_0) = N(2T, T, N_1) = x(2T, N_1) - E = F(N_1) + N_1 < N_1$$

であり, $N_2 = x(2T, N_1) - E > x(2T, y_2) - E = \xi_2(2T) = y_2$ である. これを再帰的に行うことによって, $\{N_n\}$ は下限 y_2 まで減少し, 下極限を持つということが分かる. ここでその下極限を $\beta \in \{N_n\}$ とすると, 明らかに $\beta \geq y_2$ である. ここで仮に $\beta > y_2$ とすると,

$$N_{n+1} - N_n = N((n+1)T, nT, N_n) - N_n = x((n+1)T, N_n) - E - N_n = F(N_n),$$

であり, $n \rightarrow \infty$ とすると, $0 = F(\beta)$ となる. これは $F(y) = 0$ は 2 解を持つので, 矛盾. よって $\beta = y_2$ であることが分かる.

任意の $\varepsilon > 0$ で $t \in [0, T)$, $|x_0 - y_2| < \delta$ のとき, $|x(t, x_0) - x(t, y_2)| < \varepsilon$ となるような $\delta \in (0, \varepsilon)$ が存在する. また任意の $n \geq \bar{N}$, で $t \in [nT, (n+1)T)$ のとき, $0 < N_n - y_2 < \delta$ となるような \bar{N} が存在する. よって次の関係を得ることができる.

$$\begin{aligned} |N(t, 0, N_0) - \xi_2(t)| &= |N(t, nT, N_n) - N(t, nT, y_2)| \\ &= |x(t, nT, N_n) - x(t, nT, y_2)| < |x(t - nT, 0, N_n) - x(t - nT, 0, y_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

このようにして次の関係を得る.

$$|N(t, 0, N_0) - \xi_2(t)| < \varepsilon \quad \text{ただし } t \geq \bar{N}T$$

よって $E < \omega, N_0 > y_2$ のとき, $t \rightarrow \infty$ とすると, $N(t, 0, N_0) \rightarrow \xi_2(t)$ となる. また $y_1 < N_0 < y_2$ の場合も同様に行うと, $t \rightarrow \infty$ とすると, $N(t, 0, N_0) \rightarrow \xi_2(t)$ となる. つまり $N_0 > y_1$ のとき, $t \rightarrow \infty$ とすると, $N(t, 0, N_0) \rightarrow \xi_2(t)$ となる. さらに $0 < N_0 < y_1$ のときは同様の方法を用いることによって, $t \rightarrow \infty$ とすると, $N(t, 0, N_0) \rightarrow 0$ となる.

残りの (ii) $E = \omega$, (iii) $E > \omega$ の場合も同様にするによって分かる. (証終)

命題 3, 4 から, (i) $0 < E < \omega = \max f(y)$, のとき (4.3) は 2 つの正のインパルス周期解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ が存在し, $\xi_2(t)$ は安定であり, $\xi_1(t)$ は不安定である. もし初期値が $\xi_1(t)$ よりも小さい場合, $N(t)$ は有限時間で 0 に収束し, 大きい場合には, $\xi_2(t)$ に収束する.

(ii) $E = \omega$ の場合, (4.3) は唯一の正のインパルス周期解 $\xi(T)$, $\xi(nT) = \frac{1}{2}(K - E)$ を持ち, その解は $N_0 > \xi(T)$ のとき, $N(t) \rightarrow \xi(t)$ であり, 双安定 (semistable) である. また $N_0 < \xi(T)$ のとき, $N(t) \rightarrow 0$ となる.

(iii) $E > \omega$ の場合, 有限時間ですべての初期値に対して 0 に収束する.

以上より最適な一時的な収穫は基本モデルにおける解構造と整合的な結論を得た.

4.3.2 h が比例的な場合

今までは h が一定の場合であったが, ここでは $h(N) = EN$, ただし例えば E は努力度合いを表し, $0 < E < 1$ とする. つまり時刻 $t = nT$ のときの収穫量は $Q(nT) = EN(nT)$ となる.

$$(4.4) \quad \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \delta(s(t))EN, \quad N(t_0) = N_0.$$

ここでも, (4.4) の解を $N(t, t_0, N_0)$ によって定義する. ここで次のように解概念を定義する.

定義 1. (Yoshizawa [18]) (4.4) の解 $\xi(t)$ は正の初期値 $N_0 > 0$ が次の条件を満たすとき, 大域的に吸収的 (globally attractive) と呼ばれる.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |N(t, 0, N_0) - \xi(t)| = 0.$$

すると次のような命題を得る.

命題 5. (Zhang, et al. [19]) $0 < E < 1 - \exp[-rT]$ のとき, (4.4) は唯一の正のインパルス周期解 $\xi(t)$ が存在し,

$$\xi(nT) = \bar{y} = \frac{(\exp[rT](1 - E))K}{\exp[rT] - 1}$$

を満たす. また $\xi(t)$ は全ての正の初期値に対して, 大域的に吸収的である.

さらに $E \geq 1 - \exp[-rT]$ のとき, $N(t)$ は 0 に収束する.

証明 ここで

$$(4.5) \quad \begin{aligned} G(y) &= x(T, y) - Ex(T, y) - y = (1 - E)(f(y) + y) - y = (1 - E)f(y) - Ey \\ &= \frac{(1 - E)(\exp[rT] - 1)(K - y)}{(\exp[rT] - 1)y + K} - Ey. \end{aligned}$$

と置く. $0 < E < 1 - \exp[-rT]$ のとき, $G(y) = 0$ は次のようにな唯一正の解を持つ.

$$(4.6) \quad \bar{y} = \frac{(\exp[rT](1 - E) - 1)K}{\exp[rT] - 1},$$

また $0 < y < \bar{y}$ のとき, $G(y) > 0$ であり, $y > \bar{y}$ のとき $G(y) < 0$ である. また $y = \bar{y}$ においては次の関係式を得る.

$$N(T, 0, \bar{y}) = x(T, \bar{y}) - Ex(T, \bar{y}) = G(\bar{y}) + \bar{y} = \bar{y},$$

また

$$N(2T, 0, \bar{y}) = N(2T, T, N(T, \bar{y})) = (1 - E)x(2T, T, \bar{y}) = (1 - E)x(T, \bar{y}) = G(\bar{y}) + \bar{y} = \bar{y}.$$

このことを再帰的に行うことによって, 次の関係を得ることができる.

$$(4.7) \quad N(nT, 0, \bar{y}) = \bar{y}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

それゆえ (4.4) は $\xi(nT) = \bar{y}$ となる唯一のインパルス周期解 $\xi(t) := N(t, 0, \bar{y}), \forall t \in \mathbb{N}$ を持つ.

命題 4 の証明と同様にまず $N_0 > \bar{y} > 0$ の場合を考える. ここで $N_n := N(nT, 0, N_0), n \in \mathbb{N}$ とする. すると, $N_1 < N_0$ であり, $N_1 = \bar{y}$ であることが分かる. また下極限の一意性も成立する. つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \bar{y}$ が成り立つ.

任意の $\varepsilon > 0$ において, $|x_0 - \bar{y}| < \delta$ が成り立つときはいつでも, $t \in [0, T]$ で $|x(t, x_0) - x(t, \bar{y})| < \varepsilon$ となるような $\delta \in (0, \varepsilon)$ が存在する. そして $n \geq \tilde{N}$ で $0 < N_n - \bar{y} < \delta$ となるような \tilde{N} が存在する. $n \geq \tilde{N}$, $t \in [nT, (n+1)T]$ のとき

$$|N(t, 0, N_0) - \xi(t)| = |(1 - E)(x(t, nT, N_n) - x(t, nT, \bar{y}))|$$

$$= |1 - E| \cdot |x(t - nT, N_n) - x(t - nT, \bar{y})| < (1 - E)\varepsilon.$$

よって $N_0 > \bar{y}$ の場合

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |N(t, 0, N_0) - \xi(t)| = 0$$

となる。また同様の議論によつて、 $0 < N_0 < \bar{y}$ の場合は

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |N(t, 0, N_0) - \xi(t)| = 0$$

となる。このようにインパルス周期解 $\xi(t)$ は正のある値に大域的に吸収する。

また $E = 1 - \exp[-rT]$ のときは

$$\xi(nT) = \frac{(\exp[rT](1 - E) - 1)K}{\exp[rT] - 1} = 0$$

となるので、 $E \geq 1 - \exp[-rT]$ の場合は 0 に収束する。(証 終)

以上の命題 4.,5 から一時的に収穫する場合の解の存在, さらには安定性を議論した。その結果 Clark [5], 寺本 [15] で議論されている内容と整合的である。また Hybrid システムの命題 2.2' と同様の結論を得ている。

4.4 周期性の導入

4.4.1 基本モデル

上記のモデルまでは増殖率 r や環境収容力 K は時間 t に依存していなかったが, ここでは時間に依存するモデルを考察する。特にここでは「季節性 (seasonality)」を考慮に入れ, 周期関数とする (Fan and Wang [6]).

$$(4.8) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)}\right).$$

ここで $r(t), K(t)$ は周期 1 の連続関数とする。また (4.8) 式は Bernoulli タイプの方程式であることが知られている。ここで $K \neq 0$, 初期値 $x(t_0) = x_0 (x_0 \neq 0)$ とすると, 解は次のように得られる。

$$(4.9) \quad x(t) = \left(\frac{1}{x_0} \exp \left[-\int_{t_0}^t r(s) ds\right] + \int_{t_0}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[-\int_s^t r(\tau) d\tau\right] ds\right)^{-1}$$

このとき次の命題を得ることができる。

命題 6. (Fan and Wang [6]) $K(t) > 0, \int_0^1 r(s) ds > 0$ のとき, 次の唯一の正の周期 1 の解 $x^P(t)$ を得ることができる。

$$(4.10) \quad x^P(t) = \left(\exp \left[\int_0^1 r(s) ds\right] - 1\right) \left(\int_t^{t+1} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[-\int_s^t r(\tau) d\tau\right] ds\right)^{-1}.$$

さらに, $x^P(t)$ は正の初期値 $x(t_0) = x_0 (> 0)$ を持つ, $x(t)$ に対して大域的に漸近安定である。つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^P(t)| = 0.$$

である。

証明 (4.9) で $t \rightarrow \infty$ にすると,

$$\frac{1}{x_0} \exp \left[-\int_{t_0}^t r(s) ds\right] \rightarrow 0$$

となる。よつて $t \rightarrow \infty$ のとき, 次のことのみを確かめればよい。

$$(4.11) \quad \int_{t_0}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[-\int_s^t r(\tau) d\tau\right] ds - \frac{1}{A-1} \int_t^{t+1} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[-\int_s^t r(\tau) d\tau\right] ds \rightarrow 0,$$

ただし $A = \exp \int_0^1 r(s) ds$ とする。そしてこの (4.11) は定積分の公式を用いることによって次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} & \exp \left[-\int_{t_0}^t r(s) ds\right] \left(\int_{t_0}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau\right] - \frac{1}{A-1} \int_t^{t+1} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[\int_s^t r(\tau) d\tau\right] ds\right) \\ & := \exp \left[-\int_{t_0}^t r(s) ds\right] F(t) \quad (\rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{r(t)}{K(t)} \exp \left[\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right] - \frac{1}{A-1} \left(\frac{r(t+1)}{K(t+1)} \exp \left[\int_{t_0}^{t+1} r(\tau) d\tau \right] - \frac{r(t)}{K(t)} \exp \left[\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right] \right) \\ &= \frac{r(t)}{K(t)} \exp \left[\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \right] - \frac{1}{A-1} \frac{r(t)}{K(t)} \left(\exp \left[\int_t^{t+1} r(\tau) d\tau \right] - 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

となり、仮定から $r(t)$ は周期 1 の関数であり、 $F(t)$ は定数であるので、解は周期 1 の解である。またこの解は唯一であるので、大域的に漸近安定である。(証 終)

4.4.2 努力が一定な場合

ここでは収穫の影響を考慮に入れるが、次で定式化できるような努力が一定な場合を考える。つまり (4.1)' 式に係数の周期性を考慮したモデルである。

$$(4.12) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right) - Ex(t).$$

ここで $r(t), K(t)$ は周期 1 の連続関数とする。また $K(t)$ は正であり、次を満たす。

$$(4.13) \quad \int_0^1 r(t) dt > E > 0.$$

また (4.12) は初期値 $x_E(t_0) = x_0 (x_0 \neq 0)$ とすると、解は次のように得られる。

$$(4.14) \quad x_E(t) = \left(\frac{1}{x_0} \exp \left[- \int_{t_0}^t (r(s) - E) ds \right] + \int_{t_0}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^t (r(\tau) - E) d\tau \right] ds \right)^{-1}$$

このとき次の命題を得ることができる。

命題 7. (Fan and Wang [6]) $K(t) > 0$, (4.13) を満たすのとき、次の唯一の正の周期 1 の解 $x^P(t)$ を得ることができる。

$$(4.15) \quad x_E^P(t) = \left(\exp \left[\int_0^1 (r(s) - E) ds \right] - 1 \right) \left(\int_t^{t+1} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^t (r(\tau) - E) d\tau \right] ds \right)^{-1}.$$

さらに、 $x_E^P(t)$ は正の初期値 $x_E(t_0) = x_0 (> 0)$ を持つ、 $x_E(t)$ に対して大域的に漸近安定である。つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_E(t) - x_E^P(t)| = 0.$$

である。

証明 命題 6 の証明方法を用いればよい。

4.4.3 努力が周期的な場合

ここで先ほどのモデルを努力が時間 t に依存する場合を考える。よってこの場合は次のようなモデルとなる。

$$(4.16) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right) - E(t)x(t).$$

ここで $r(t), K(t)$ は周期 1 の連続関数とする。また $K(t)$ は正であり、次を満たす。

$$\int_0^1 (r(t) - E(t)) dt > 0.$$

$E(t)$ は非負であるから、次の関係を満たす。

$$(4.17) \quad \int_0^1 r(t) dt > \int_0^1 E(t) dt > 0.$$

また (4.16) は初期値 $x_E(t_0) = x_0 (x_0 \neq 0)$ とすると、解は次のように得られる。

$$(4.18) \quad x_E(t) = \left(\frac{1}{x_0} \exp \left[- \int_{t_0}^t (r(s) - E(s)) ds \right] + \int_{t_0}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^t (r(\tau) - E(\tau)) d\tau \right] ds \right)^{-1}$$

このとき次の命題を得ることができる。

命題 8. (Fan and Wang [6]) $K(t) > 0$, (4.17) を満たすのとき, 次の唯一の正の周期 1 の解 $x_E^P(t)$ を得ることができる.

$$(4.19) \quad x_E^P(t) = \left(\exp \left[\int_0^1 (r(s) - E(s)) ds \right] - 1 \right) \left(\int_t^{t+1} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^t (r(\tau) - E(\tau)) d\tau \right] ds \right)^{-1}.$$

さらに $x_E^P(t)$ は正の初期値 $x_E(t_0) = x_0 (> 0)$ を持つ, $x_E(t)$ に対して大域的に漸近安定である. つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_E(t) - x_E^P(t)| = 0.$$

である.

証明 命題 6 の証明方法を用いればよい..

次にこのシステムの最適性に関する事項を考察する. まず 1 周期辺りの収穫量を次のように表すことができる.

$$Y(E(t)) = \int_0^1 E(t) x_E^P(t) dt = \int_0^1 \frac{E(t) \left(\exp \left[\int_0^1 (r(s) - E(s)) ds \right] \right)}{\int_t^{t+1} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^t (r(\tau) - E(\tau)) d\tau \right] ds} dt.$$

よってここでは次の最適化問題を考察する.

$$(4.20) \quad Y(E^*(t)) = \max_{E(t)} Y(E(t)).$$

すると次の命題が得られる.

命題 9. (Fan and Wang [6]) $r(t) \geq \frac{2K'(t)}{K(t)}$ のとき, (4.20) の解となる唯一な最適な収穫努力, $E^* = \frac{r(t)}{2} - \frac{K'(t)}{K(t)}$ が存在する. ただし時間に依存している最適な収穫 $E^*(t)$ は次のように与えられる,

$$\bar{E}^*(t) = \frac{E^*(t)}{\int_0^1 E^*(t) dt}.$$

このときに対応する個体数密度は

$$x^*(t) = \frac{K(t)}{2}.$$

である. このときの 1 周期辺りの最大収穫量は次のように与えられる

$$Y(E^*(t)) = \frac{1}{4} \int_0^1 r(t) K(t) dt.$$

証明 Fan and Wang [6] を参照されたい.

この結果を $r(t) = r, K(t) = K$ とし, それぞれを正の定数とすると, $E^* = \frac{r}{2}, x^* = \frac{K}{2}, Y^* = \frac{rK}{4}$ となり, 脚注 5, Clark [5], 寺本 [15] で議論されている内容と整合的である.

4.4.4 Hybrid システム

ここでは r, K が時間に依存するとすると, 次の Hybrid システムを考えることとなる.

$$(4.21) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(4.22) \quad x((n+1) + T_{start}) = \alpha x(n + T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

これも (3.5) から (3.5)' に変形したようにすると, 前節で導いた結論において $r\tau$ を $\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt$ と変形したのみとなる.

よってこの方程式の平衡状態は次のようになることが分かる.

$$\alpha \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] < 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n + T_{end}) = 0.$$

$$\alpha \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] = 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n + T_{end}) = X(0 + T_{end}) \text{ (周期解).}$$

$$\alpha \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] > 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} X(n+T_{end}) = \frac{1 - \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] / \alpha}{1 - \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right]} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{\exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] - 1}.$$

特に $\tau \rightarrow 1$ の場合 $X(n+T_{end}) \rightarrow 1$ (環境収容力).

特に $\tau \rightarrow 0$ の場合 $X(n+T_{end}) \rightarrow \infty$.

以上のことをまとめると次のような命題となる.

命題 10. Logistic 型微分方程式 (4.21), 差分方程式 (4.22) からなる Hybrid システムにおいて, $\alpha \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] >$

1 の場合 X は $1 + \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{\exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] - 1}$ に収束する. $\alpha \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] < 1$ の場合 X は 0 に収束し,

$\alpha \exp \left[\int_{T_s}^{T_e} r(t) dt \right] = 1$ の場合 X は初期値と同じ値を取る周期解となる.

4.4.5 インパルス微分方程式

Bainov and Simeonov [3], Liu and Chen [12] は次のようなインパルス微分方程式を考えた⁸⁾.

$$(4.23) \quad \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(r(t) - a(t)x(t)), \quad t \neq t_k, k \in \mathbb{N},$$

$$(4.24) \quad \Delta x(t_k) = b_k x(t_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

ただし

$$(4.25) \quad r(t + \omega) = r(t), a(t + \omega) = a(t), t \in \mathbb{R}, t_{k+l} = t_k + T, b_{k+l} = b_k, k \in \mathbb{N},$$

$$(4.26) \quad r(t) > 0, a(t) > 0, t \in \mathbb{R}_+, 1 + b_k > 0, b_k \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

このとき次の命題を得ることができる.

命題 11. (Bainov and Simeonov [3], Liu and Chen [12]) $T = \omega$ であり, (4.25)-(4.26),

$$(4.27) \quad \mu = \prod_{k=1}^l \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_0^T r(\tau) d\tau \right] < 1^9$$

を満たす時, Hybrid システム (4.23), (4.24) は唯一の正の T 周期解 $x^*(t, x_0^*)$ を持つ. また (4.27) を満たさないとき, $x(t)$ は 0 に収束する.

さらに, $x^P(t)$ は正の初期値 $x(t_0) = x_0 (> 0)$ を持つ, $x(t)$ に対して大域的に漸近安定である. つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^P(t)| = 0.$$

である.

証明 まず正の周期解を唯一持つことを示す. (4.23), (4.24) を $x = 1/z$ として変数変換すると, 次の式が得られる.

$$(4.28) \quad z'(t) = -r(t)z(t) + a(t), \quad t \neq t_k, k \in \mathbb{N},$$

$$(4.29) \quad z(t_k^+) = \frac{1}{1 + b_k} z(t_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

またこのとき初期値 $x(0) = x_0$ に対する (4.23), (4.24) の解を $x(t) = x(t, x_0)$ とすると, 初期値 $z(0) = z_0 = 1/x_0$ に対する (4.28), (4.29) の解は $z(t) = z(t, z_0)$ となる. ここで

⁸⁾Berezansky and Braverman [4] は次のようなインパルス微分方程式を考察した.

$$\dot{x}(t) = x(t)(r(t) - a(t)x(t)), \quad x(\tau_k) = b_k x(\tau_k^-) - d_k.$$

特にこの研究は Logistic 方程式と同様に環境収容力に飽和する微分方程式として知られている Beverton-Holt 方程式に一時的な収束項を導入し, これらの解の性質を比較している.

⁹⁾より一般的な T, ω の周期比 γ が有理数の場合は以下の μ の条件によって,

$$\mu = \prod_{k=1}^l \left(\frac{1}{1 + b_k} \right)^\gamma \exp \left[- \int_0^T r(\tau) d\tau \right]$$

x^* , または 0 に収束するののかということを調べている. さらに γ が無理数の場合も調べている.

$$W(t, s) = \prod_{s \leq t_k < t} \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_s^t r(\tau) d\tau \right]$$

を置く。このとき解は次のように変形することができる。

$$(4.30) \quad z(t) = W(t, 0)z(0) + \int_0^t W(t, s)a(s)ds$$

ここでこの解が $z(T) = z(0)$ を満たすならば、 T -周期解である。よってこのとき (4.30) は次のように変形することができる。

$$(1 - W(t, 0))z(0) = \int_0^t W(t, s)a(s)ds.$$

ここで

$$\int_0^t W(t, s)a(s)ds > 0$$

であるので、 $\mu < 1$ のとき、(4.30) は正の周期解を唯一持つことが分かる。よってこの (4.23), (4.24) においても正の周期解を唯一持つことが分かる。また (4.27) を満たさない場合、 $z(t) \rightarrow \infty$ となるので、 $x(t)$ は 0 に収束する。

次にこの解 $x^*(t, x_0^*)$ が大域的に漸近安定であることを示す。ここで証明するのは、次の関係である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t) - z^*(t)| = 0,$$

ただし $z^*(t)$ は (4.28), (4.29) の周期解とする。よってこれを $W(t, s)$ の関数を用いると、次の関係を得ることができる。

$$(4.31) \quad |z(t) - z^*(t)| = W(t, 0)|z(0) - z^*(0)|.$$

ここで $t \rightarrow \infty$ とすると、 $W(t, 0) \rightarrow 0$ となることを言えばよい。また $t \in (nT, (n+1)T]$, $b = \max_{s \in [0, T]} \prod_{0 \leq t_k < s} \frac{1}{1 + b_k}$

とすると

$$\begin{aligned} W(t, 0) &= \prod_{0 < t_k < 1} \frac{1}{1 + b_k} \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_0^t r(\tau) d\tau \right] = \prod_{0 < t_k < nT} \frac{1}{1 + b_k} \prod_{nT \leq t_k < 1} \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_0^t r(\tau) d\tau \right] \\ &= \left(\prod_{0 < t_k < T} \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_0^T r(\tau) d\tau \right] \right)^n \prod_{0 \leq t_k < t - nT} \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_{nT}^t r(\tau) d\tau \right] \\ &\leq \left(\prod_{0 < t_k < T} \frac{1}{1 + b_k} \exp \left[- \int_0^T r(\tau) d\tau \right] \right)^n = b\mu^n. \end{aligned}$$

このように $\mu < 1$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu^n = 0$ となるので、 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, 0) = 0$ となる。(証終)

4.4.6 最適性

次に周期性のある Logistic 型方程式に一時的に収穫を行うという、次の Hybrid システムを考える (Xiao, et al. [17]).

$$(4.32) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right], \quad t \neq \tau_k, k \in \mathbb{N},$$

$$(4.33) \quad x(\tau_k^+) = x(\tau_k)(1 - E_k), \quad t = \tau_k, k \in \mathbb{N},$$

ただし、 $r(t), K(t)$ は連続関数であり、次を満たす。

$$(4.34) \quad r(t+T) = r(t), K(t+T) = K(t), \tau_{k+q} = \tau_k + T, E_{k+q} = E_k, 0 < E_k < 1.$$

ここで E_k は一時的な収穫努力 (impulse harvesting effort) と呼ぶ。また次も仮定する。

$$(4.35) \quad \left[\prod_{k=1}^q (1 - E_k) \right] \exp \left[\int_0^T r(\tau) d\tau \right] > 1$$

ここで次のような最適化問題を考える。

$$(4.36) \quad Y_{\{E_k^*\}_{k=1}^q} = \max_{E_k} Y_{\{E_k\}_{k=1}^q},$$

制約条件:

$$(4.37) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right], \quad t \neq \tau_k, k \in \mathbb{N},$$

$$(4.38) \quad x(\tau_k^+) = x(\tau_k)(1 - E_k), \quad t = \tau_k, k \in \mathbb{N}.$$

この問題は次のように変形することができる¹⁰⁾.

$$(4.39) \quad Y_{\{E_k^*\}_{k=1}^q} = \max_{E_k} Y_{\{E_k\}_{k=1}^q} = \sum_{k=1}^q E_k x(k),$$

制約条件:

$$(4.40) \quad x(k+1) = \left[\frac{1}{(1-E_k)x(k)} \exp \left[- \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r(\tau) d\tau \right] + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r(\tau) d\tau \right] \right]^{-1},$$

これを解くと次の命題を得る.

命題 12. (Xiao, et al. [17]) 動的最適化問題 (4.34), (4.35), (4.36) を解くと, 次の関係をみたすとき, 唯一の最適なインパルス収穫努力 $\{E_k^*\}_{k=1}^q$ を得る.

$$\frac{D^{1/2}(\tau_{k+1})(1-D^{1/2}(\tau_{k+1}))}{1-D^{1/2}(\tau_k)} \frac{B(\tau_k)}{B(\tau_{k+1})} \leq 1,$$

ただし

$$B(\tau_k) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^{\tau_k} r(\tau) ds \right], \quad D(\tau_k) = \exp \left[- \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} r(\tau) d\tau \right],$$

$$E_k^* = 1 - \frac{D^{1/2}(\tau_{k+1})(1-D^{1/2}(\tau_{k+1}))}{1-D^{1/2}(\tau_k)} \frac{B(\tau_k)}{B(\tau_{k+1})},$$

とする. さらにこのとき種の個体数密度は

$$x^{*P}(t) = \left[\exp \left[- \int_{\tau_k}^t r(\tau) d\tau \right] B(\tau_{k+1}) [D^{1/2}(\tau_{k+1}) - D(\tau_{k+1})]^{-1} + \int_{\tau_k}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp \left[- \int_s^t r(\tau) d\tau \right] ds \right]^{-1},$$

となる. ただし $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, q$ とする.

またこのときの単位辺り最大収穫率は

$$Y_{\{E_k^*\}_{k=1}^q} = \sum_{k=1}^q \frac{(1-D^{1/2}(\tau_k))^2}{B(\tau_k)}$$

となり, このときの単位辺り最大持続可能な水準となっている.

証明 ここでは離散時間体系の動的最適化問題を最適制御理論を用いる. よって次の関数の最小化問題と考える.

$$\bar{Y}_{\{E_k\}_{k=1}^q} = - \sum_{k=1}^q E_k x(k).$$

よって (4.36)-(4.38) は次の方程式を解くことを等しいこととなる.

$$\bar{Y}_{\{E_k^*\}_{k=1}^q} = \min_{E_k} \bar{Y}_{\{E_k\}_{k=1}^q}.$$

このとき Hamilton 関数は次のようになる.

$$H(x(k), E_k, \lambda(k+1), \tau_k) = -E_k x(k) + \lambda(k+1) \left[\frac{D(\tau_{k+1})}{(1-E_k)x(k)} + B(\tau_{k+1}) \right]^{-1}.$$

ただし $\lambda(k+1)$ は共役変数である.

$\{E_k^*, k = 1, 2, \dots, q\}$ が最適な制御列であり, $\{x_k^*, k = 1, 2, \dots, q\}$ がそれに対応する最適な軌跡 (ここでは最適個体数密度レベル) とする. このとき最適性への必要条件

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x^*(k)}, \quad \frac{\partial H}{\partial E^*(k)} = 0,$$

から次を導出する.

$$(4.41) \quad \begin{aligned} \lambda(k) &= -E_k^* + \lambda(k+1) \left[\frac{D(\tau_{k+1})}{(1-E_k^*)x^*(k)} + B(\tau_{k+1}) \right]^{-2} D(\tau_{k+1}) [(1-E_k^*)(x^*(k))^2]^{-1}, \\ x^*(k) &= -\lambda(k+1) \left[\frac{D(\tau_{k+1})}{(1-E_k^*)x^*(k)} + B(\tau_{k+1}) \right]^{-2} D(\tau_{k+1}) [x^*(k)(1-E_k^*)^2]^{-1}. \end{aligned}$$

また (4.41) は次のように変形することができる.

$$\lambda(k+1) = - \left[\frac{D(\tau_{k+1})}{(1-E_k^*)x^*(k)} + B(\tau_{k+1}) \right]^2 D(\tau_{k+1}) [x^*(k)(1-E_k^*)^2].$$

これを $\lambda(k)$ の方程式に代入すると, $\lambda(k) = -1$ ということが分かる. またこれとこの問題の制約条件 (4.38) から

$$(4.42) \quad \frac{(1-E_k^*)x^*(k)}{x^*(k+1)} = \exp \left[- \frac{1}{2} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r(\tau) d\tau \right] = D^{1/2}(\tau_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

¹⁰⁾最適制御問題が定常割引動的計画法 (SDDP: Stationary Discounted Dynamic Programming) となった.

となる。(4.40)は

$$\frac{1}{x^*(k+1)} = \frac{D(\tau_{k+1})}{(1 - E_k^* x^*(k))} + B(\tau_{k+1}).$$

となるから、この2つの式から次が得られる。

$$(4.43) \quad x^*(k) = \frac{1 - D^{1/2}(\tau_k)}{B(\tau_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

これを(4.42)から

$$E_k^* = 1 - D^{1/2}(\tau_{k+1}) \frac{x^*(k+1)}{x^*(k)} = 1 - \frac{D^{1/2}(\tau_{k+1})(1 - D^{1/2}(\tau_{k+1}))}{D^{1/2}(\tau_k)} \frac{B(\tau_k)}{B(\tau_{k+1})}, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

が導け、 E_k^* は唯一で、1より小さいと分かる。また仮定から $E_k^* \geq 0$ であった。

以上からこの条件を満たすとき、 E_k^* は唯一の最適なインパルス収穫努力が存在する。

次にこのときの最適個体数密度レベルを求める。(4.42),(4.43)から

$$(1 - E_k^*)x^*(k) = D^{1/2}(\tau_{k+1})x^*(k+1) = \frac{D^{1/2}(\tau_{k+1})(1 - D^{1/2}(\tau_{k+1}))}{B(\tau_{k+1})}.$$

が得られる。また任意の $t > 0$ で $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ のとき、(4.37)の解は次のように得られた。

$$x^*(t) = \left[\frac{\exp\left[-\int_s^t r(\tau)d\tau\right]}{(1 - E_k^*)x^*(k)} + \int_{\tau_k}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp\left[-\int_s^t r(\tau)d\tau\right] ds \right]^{-1}.$$

よってこれらから最適な個体数密度レベルは次のように得られる。

$$x^*(t) = \left[\exp\left[-\int_s^t r(\tau)d\tau\right] B(\tau_{k+1}) [D^{1/2}(\tau_{k+1}) - D(\tau_{k+1})]^{-1} + \int_{\tau_k}^t \frac{r(s)}{K(s)} \exp\left[-\int_s^t r(\tau)d\tau\right] ds \right]^{-1},$$

$$t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

ここで容易に分かるように任意の τ_k において、 $B(\tau_k + 1) = B(\tau_k)$, $D(\tau_k + 1) = D(\tau_k)$ ということが分かる。よって一般的に次のことが分かる。

$$D(\tau_{q+1}) = D(\tau_1 + 1) = D(\tau_1). \quad B(\tau_{q+1}) = B(\tau_1 + 1) = B(\tau_1).$$

以上からこのときの最大単位時間辺りの収穫量は

$$Y_{\{E_k^*\}_{k=1}^q} = \sum_{k=1}^q E_k^* x^*(k) = \sum_{k=1}^q \left[\frac{1 - D^{1/2}(\tau_k)}{B(\tau_k)} - \frac{D^{1/2}(\tau_{k+1})(1 - D^{1/2}(\tau_{k+1}))}{B(\tau_{k+1})} \right] = \sum_{k=1}^q \frac{(1 - D^{1/2}(\tau_k))^2}{B(\tau_k)}.$$

となる。加えて $x^*(t)$ が周期1の周期関数であることも示すことができる。詳しくは(Xiao, et al. [17])を参照されたい。(証終)

さらにXiao, et al. [17], 第4節では次のものを定義し、インパルス微分方程式ではない場合の最適性に関する命題9との関連を調べている。

$$\Delta\tau = \max \{ \Delta\tau_k : \Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k, k = 0, 1, 2, \dots, q \}$$

そこで $\Delta\tau_k \rightarrow 0$ の場合に限り、命題9と命題12と一致する。

以上のように最も単純なMalthus型微分方程式、Logistic型微分方程式に差分方程式体系を組み合わせたHybridシステムにおいて本来の微分方程式の性質自体を変化させるような影響はない。しかし連続時間で記述していた項を離散時間の項で記述すると、「最適性」を介して等しくなるということが分かった。よって連続時間で収穫するという行為は、現実に社会において最適に収穫しているということと同値であることが分かった。

5 偏害モデル

5.1 基本モデル

今までは1種系を様々な視点で取り上げてきた。インパルスシステムでは周期解を性質を用いて分析していたが、しかし2種系では相互作用があるので、この周期性利用することができない¹¹⁾。よってHybridシステムで用いた方法で分析する。そこで2種系で解析的に分析することができる最も単純な連立方程式体

¹¹⁾例えば多種系のインパルス微分方程式を用いて研究した Wang, et al. [16] では平衡点の不安定、カオスとなることを導いている。

系である次のような偏害モデルを考える.

$$(5.1) \quad \frac{dx}{dt} = x(r_x - a_{12}y),$$

$$(5.2) \quad \frac{dy}{dt} = y(r_y - a_{22}y).$$

ただし $r_i, i = \{x, y\}$ は各種の自然増殖率である. a_{12} は種間競争係数, a_{22} は種内競争係数を表している.

この連立方程式体系は最大 2 つ平衡点 $(x^*, y^*) = (0, 0), (0, \frac{r_y}{a_{22}})$ が存在する. よってこの連立方程式体系は内部平衡点を持たない. 種 y は種 x から影響を受けないために, 環境収容量に達し, 種 x は種 y の環境収容量と種 x の内的自然増加率 r_x との大小で発散するか 0 に収束するのか決まる. またそれぞれの平衡点の安定性は次の固有値から分かる. 平衡点 $(0, 0)$ の場合の固有値は r_x, r_y , 平衡点 $(0, \frac{r_y}{a_{22}})$ の場合の固有値は $r_x - \frac{a_{12}}{a_{22}}r_y, -r_y$ となる.

5.2 Hybrid システム : 両種に

次にここで前節と同様に差分方程式体系を導入するが, ここでは種 x と種 y に離散時間体系を導入する. よって次のような Hybrid システムを考える. (5.3), (5.4) は連続時間に支配されているときの力学系であり, (5.5), (5.6) は離散時間に支配されているときの力学系である. 例えばこの Hybrid システムは次のようなことを想定している. Malthus 型で増殖する被食者とそれを利用し, Logistic 増殖する捕食者の系があり, それぞれ別々の所に生息し, ある時期のみ相互作用し, 被食-捕食関係にある. しかしある時期になると, 相互作用をせず, 個体数はそれぞれ α_1 倍, α_2 倍に変化する.

$$(5.3) \quad \frac{dx}{dt} = x(r_x - a_{12}y), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}],$$

$$(5.4) \quad \frac{dy}{dt} = y(r_y - a_{22}y), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}],$$

$$(5.5) \quad x((n+1) + T_{start}) = \alpha_1 x(n + T_{end}), \quad \text{それ以外},$$

$$(5.6) \quad y((n+1) + T_{start}) = \alpha_2 y(n + T_{end}), \quad \text{それ以外}.$$

まず (3.1), $Y(t) = \frac{a_{22}}{r_y} y(t)$ より種 y に関しては次の方程式によって変化することができる.

$$(5.7) \quad y(n + T_{end}) = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{y(0+T_{end})} - U \right\} (\alpha_2 \exp[r\tau])^{-n} + U}, \quad \text{ただし } U = \frac{a_{22}(1 - \exp[-r_y\tau])}{r_y(1 - \frac{1}{\alpha_2} \exp[-r_y\tau])}.$$

次に種 x について考える. (5.3), (5.4) から連続時間部分についての種 x の変化を表す漸化式は次のようになる.

$$(5.8) \quad x(n + T_{end}) = x(n + T_{start}) \left[\exp[r_x - \frac{a_{12}}{a_{22}}r_y] \tau \left\{ \frac{y(n + T_{end})}{y(n + T_{start})} \right\}^{\frac{a_{12}}{a_{22}}} \right].$$

また離散時間では種 x は種 y との相互作用がないので (5.5) に従う. また種 y は種 x と相互作用がないので, 種 x の変化を表す漸化式は次のようになる.

$$(5.9) \quad x(n + T_{start}) = \alpha_1^n x(0 + T_{end}) \exp[nz] \left(\frac{y(n + T_{end})}{\alpha_2^n y(0 + T_{end})} \right)^{\frac{a_{12}}{a_{22}}}, \quad \text{ただし } z = (r_x - \frac{a_{12}}{a_{22}}r_y)\tau.$$

よって (5.7), (5.9) から時間 T_{end} に着目した種 x の漸化式は次のようになる.

$$(5.10) \quad x(n + T_{end}) = x(0 + T_{end}) \frac{A^n}{[y(0 + T_{end}) \left\{ \frac{1}{y(0+T_{end})} - U \right\} + B^n U]^{\frac{a_{12}}{a_{22}}}},$$

$$\text{ただし } A = \alpha_1^{\frac{a_{22}}{a_{12}}} \exp \left[(r_x - (1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}r_y)\tau) \frac{a_{22}}{a_{12}} \right], B = \exp[r_y\tau], U = \frac{a_{22}(1 - \exp[-r_y\tau])}{r_y(1 - \frac{1}{\alpha_2} \exp[-r_y\tau])}.$$

(5.10) で n に依存しているのは, A, B のみである. よって A, B の 1 との大小によっては x の値が収束または発散する. よってその場合分けを行うと次の 9 通りとなる (表 5.1).

| Case | A | B | $x(n + T_{end})$ |
|------|-------|-------|---|
| I | 1 | 1 | $x(0 + T_{end})$ |
| II | 1 | < 1 | $\frac{x(0 + T_{end})}{[1 - Uy(0 + T_{end})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}$ |
| III | 1 | > 1 | 0 |
| IV | < 1 | 1 | 0 |
| V | < 1 | > 1 | 0 |
| VI | > 1 | 1 | ∞ |
| VII | > 1 | < 1 | ∞ |
| VIII | < 1 | < 1 | 不定形 (0 or ∞) |
| IX | > 1 | > 1 | 不定形 (0 or ∞) |

表 5.1

以上のことをまとめると次のような命題となる。

命題 13. 連続時間に支配されている連立微分方程式 (5.3), (5.4), 離散時間に支配されている方程式 (5.5), (5.6) からなる Hybrid システムに内部平衡点を持つのは次の 2 つの場合がある. (I) $A = 1, B = 1$ の場合, (II) $A = 1, B < 1$ の場合である.

(I) $A = 1, B = 1$ を満たす場合は, $x(n + T_{end}), y(n + T_{end})$ はそれぞれ $x(0 + T_{end}), y(0 + T_{end})$ に等しい場合のみである. よって n 期と $n + 1$ 期の間に変動があってもよいが, それぞれ $x((n + 1) + T_{end}) = x(n + T_{end})$ となることを示している. つまり周期解となる条件でもある. また (II) の場合, X の平衡点は α_1 の値によらない. 例えば次のような種 X に関する収穫の最適性の問題を考察したとしても, 平衡点は収穫の努力にはよらない.

$$\begin{aligned} & \max_E \sum_{t=1}^{\infty} EX(t), \\ & \text{subject to 種 } X \text{ に関する方程式} \\ & \quad \quad \quad \text{種 } Y \text{ に関する方程式.} \end{aligned}$$

よってこの偏害モデルにおいては人間が管理することができないということが分かる.

5.3 Hybrid システム : 種 y にのみ

種 y にのみ離散時間体系を導入する. そのため種 y に関しては, 前節分析した (3.1)' と同じ方程式である. よって次のような Hybrid システムを考える. (5.11), (5.12) は連続時間に支配されているときの力学系であり, (5.13), (5.14) は離散時間に支配されているときの力学系である. 例えばこの Hybrid システムは次のようなようなことを想定している. Malthus 型で増殖する被食者とそれを利用し, Logistic 増殖する捕食者の系があり, 捕食者は出産シーズンに入ると被食者を利用しなくなり, 出産シーズンを経過すると α 倍に増えているということを想定している.

$$(5.11) \quad \frac{dx}{dt} = x(r_x - a_{12}y),$$

$$(5.12) \quad \frac{dy}{dt} = y(r_y - a_{22}y), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(5.13) \quad \frac{dx}{dt} = r_x x(t),$$

$$(5.14) \quad y((n + 1) + T_{start}) = \alpha y(n + T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

まず前節と同様に種 y に関しては次の関係式を得ることができる.

$$(5.15) \quad y(n+T_{end}) = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{y(0+T_{end})} - U \right\} (\alpha \exp[r\tau])^{-n} + U}, \quad \text{ただし } U = \frac{a_{22}(1 - \exp[-r_y\tau])}{r_y(1 - \frac{1}{\alpha} \exp[-r_y\tau])}.$$

また種 x についても前節と同様に次の関係式を得ることができる。

$$(5.16) \quad x(n+T_{end}) = x(n+T_{start}) \left[\exp[r_x - \frac{a_{12}}{a_{22}}\tau] \left\{ \frac{y(n+T_{end})}{y(n+T_{start})} \right\}^{\frac{a_{12}}{a_{22}}} \right].$$

また離散時間では種 y との相互作用がないので, (5.13) に従う。そのためそのときの種 x の変化を表す漸化式は次のようになる。

$$(5.17) \quad x(n+T_{start}) = x((n-1)+T_{end}) \exp[r_x(1-\tau)].$$

よって (5.16), (5.17) から時間 T_{end} に着目した種 x の漸化式は次のようになる。

$$(5.18) \quad x(n+T_{end}) = x(0+T_{end}) \exp[nz] \alpha^{-n \frac{a_{12}}{a_{22}}} \left(\frac{y(n+T_{end})}{y(0+T_{end})} \right)^{\frac{a_{12}}{a_{22}}},$$

$$\text{ただし } z = r_x(1-\tau) + (r_x - \frac{a_{12}}{a_{22}}r_y)\tau.$$

さらにこの (5.18) と (5.15) から計算すると, 漸化式は次のようになる。

$$(5.19) \quad x(n+T_{end}) = x(0+T_{end}) \frac{A^n}{\left[y(0+T_{end}) \left\{ \frac{1}{y(0+T_{end})} - U \right\} + B^n U \right]^{\frac{a_{12}}{a_{22}}}},$$

$$\text{ただし } A = \alpha^{(1-\frac{a_{12}}{a_{22}})} \exp \left[(1-\tau) \left(r_x + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) + r_x \right], \quad B = \alpha \exp[r_y\tau], \quad U = \frac{a_{22}(1 - \exp[-r_y\tau])}{r_y(1 - \frac{1}{\alpha} \exp[-r_y\tau])}.$$

前節と同様に分析すると, 次の 9 通りが考えることができる。また B は命題 2 の収束条件 $\alpha \exp[r_y\tau]$ と同じである。またこれを分類すると, 前節の結果と同様になる (表 5.1)。

特にここでは表 5.1 の Case II の場合を取り上げる。このとき $x(n+T_{end})$ の値は次のようになる。

$$(5.20) \quad x(n+T_{end}) = \frac{x(0+T_{end})}{\left[1 - \frac{a_{22}(1 - \exp[-r_y\tau])}{r_y(1 - \frac{1}{\alpha} \exp[-r_y\tau])} y(0+T_{end}) \right]^{\frac{a_{12}}{a_{22}}}}.$$

ただし $B < 1$, 3 節の議論から $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n+T_{end}) = 0$ であった。その結果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n+T_{end}) = 0$ or ∞ 以上のことをまとめると次のような命題となる。

命題 14. 連続時間に支配されている連立微分方程式 (5.3), (5.4), 離散時間に支配されている方程式 (5.5), (5.6) からなる Hybrid システムに内部平衡点を持つのは, $A = 1, B = 1$ のときの初期値を常にとるような場合である。

よって前節と同様に収穫の影響を分析すると, $A = 1, B = 1$ となるように管理する以外内部平衡点を得ることはない。さらに種 x にのみ差分方程式体系を導入したものやこの偏害モデルを拡張した密度効果のある偏害モデル¹²⁾ ではもはや解析的には分析できなくなる。

6 終わりに

以上のように Hybrid システムを有するモデルを解析的に分析した。1 種系では基本的には基本モデルと一致した。この Hybrid システムが威力を発揮するのは, 2 種系であった。なぜなら 1 種系ならば仮に収穫したとしても, 時間が経てば, 元の状態に戻ることができるが, 2 種系では相互作用があるためにこの周期条件が使うことができない。よって連続時間体系を離散時間体系にすることによって分析する以外になくなる。ただしこの Hybrid システムは漸化式によって表され, この漸化式が解ける場合はよいが, 解けない場合が多い。よってこの場合はシミュレーションなどを分析するしかなくなる ([10])。解析的に解ける範囲内のモデルとして偏害モデルを取り上げた。そこでは両種, また一方の種 y のみに Hybrid システムを導入した。特に両種に Hybrid システムが存在する場合, 基本モデルでは共存平衡点が存在しなかったが, Hybrid システ

¹²⁾例) 密度効果のある偏害モデル:

$$\frac{dx}{dt} = x(r_x - a_{11}x - a_{12}y), \quad \frac{dy}{dt} = y(r_y - a_{22}y), \quad t \in [n+T_{start}, n+T_{end}].$$

$$\frac{dx}{dt} = x(t)(r_x - a_{11}x), \quad y((n+1)+T_{start}) = \alpha y(n+T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

ただし $r_{i,i} = \{x, y\}$ は各種の自然増殖率である。 a_{12} は種間競争係数, a_{11}, a_{22} は種内競争係数を表している。

ムにすると、ある条件の下で共存平衡点が存在することが分かった。

さらにこの Hybrid システムでは最適な収穫を行う場合、基本モデルの結果を整合的になった。この Hybrid システムは基本モデルの 24 時間、365 日収穫を行うモデルと比べ、現実により近いモデルとなっている。よってこの事実から基本モデルは主体の最適な行動の場合を取り上げているということが分かった。よってこの Hybrid システム (インパルス微分方程式) はモデルの構造が容易に図示できないような複雑なモデルにおいて、非最適な主体の行動を分析する際に有効であるということが分かった。

今後の課題として 5 節で考えた次にある種 y のみに Hybrid が存在する場合、

$$(5.11) \quad \frac{dx}{dt} = x(r_x - a_{12}y),$$

$$(5.12) \quad \frac{dy}{dt} = y(r_y - a_{22}y), \quad t \in [n + T_{start}, n + T_{end}].$$

$$(5.13) \quad \frac{dx}{dt} = r_x x(t),$$

$$(5.14) \quad y((n+1) + T_{start}) = \alpha y(n + T_{end}), \quad \text{それ以外.}$$

このモデルで離散時間が支配しているとき、つまり x と y が相互作用がないとき、果たして $y = 0$ とし、種 x は Malthus 的成長をすると考えていた。しかし本来は相互作用がないときは別の成長プロセス、別の関数系が支配しているのではないかと考えることができる。このような問題に向き合うために本来の Hybrid システムで分析する意味があるのであろう (Guckenheimer and Johnson[7], Johnson[8])。本稿がその序として位置づけることができれば、筆者らの目標が達成されたことになるであろう。

参考文献

- [1] Bai, Ling and Wang, Ke (2003): "Optimal Impulsive Harvest Policy for Time Dependent Logistic Equation with Periodic Coefficients," *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol.2003, No.121, pp.1-9.
- [2] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1982): *Systems with Impulse Effect*, Ellis Horwood, Chichester.
- [3] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993): *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*, Longman.
- [4] Berezansky, Leonid and Braverman, Elena (2004): "On Impulsive Beverton-Holt Difference Equations and their Applications," *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 10, Issue 9, pp. 851-868.
- [5] Clark, Colin W. (1976): *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, John Wiley and Sons. (邦訳):竹内啓, 柳田英二 (訳) 『生物経済学 - 生きた資源の最適管理の数理 -』啓明社, 1983 年.
- [6] Fan, Meng and Wang, Ke (1998): "Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients," *Mathematical Biosciences*, Vol.152, pp. 165-177.
- [7] Guckenheimer, John and Johnson, Stewart (1995): "Planar Hybrid Systems," P.Antsaklis et al., eds. in *Hybrid Systems Lecture Notes in Computer Science*, Vol.999, Springer, pp.202-225.
- [8] Johnson, Stewart (1994): "Simple Hybrid Systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.4, No.6, pp.1655-1665.
- [9] 巖佐庸 (1998): 「数理生物学入門」共立出版.
- [10] 川澤園子 (2003): 「北海道根室半島におけるキツネ疥癬のダイナミクスと伝播に関する数理的研究」奈良女子大学理学部情報科学科 卒業論文.

- [11] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D., and Simeonov, P.S. (1989): *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore.
- [12] Liu, Xianning and Chen, Lansun (2004): "Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.289, pp. 279-291.
- [13] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.S., Gamkrelidze, R.V. and Mishchenko, E.F. (1962): *The Mathematical Theory of Optimal Process*, Wiley-Interscience, New York, 邦訳：関根智明(訳)『最適過程の数学』総合図書, 1967年.
- [14] Shuai, Zhisheng, Bai, Ling and Wang, Ke (2007): "Optimization problems for general simple population with n -impulsive harvest," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.329, pp. 634-646.
- [15] 寺本英 (1997): 「数理生態学」朝倉書店.
- [16] Wang, Fengyan, Pang, Guoping and Hui, Jin (2008): "Analysis of a Monod-Haldene type food chain chemostat with seasonally variably pulsed input and washout," *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 43, Number 2, pp. 601-619.
- [17] Xiao, Yanni, Cheng, Daizhan and Qin, Huasu (2006): "Optimal impulsive control in periodic ecosystem," *Systems & Control Letters*, Vol.55, pp. 558-565.
- [18] Yoshizawa, Taro (1975): "Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions," Springer, Inc., New York, pp. 210-223.
- [19] Zhang, Xiaoying, Shuai, Zhisheng and Wang, Ke (2003): "Optimal impulsive harvesting policy for single population," *Nonlinear Analysis: Real World Applications* Vol. 4, pp. 639-651.