

時間相関関数の漸近形

九州大学応用力学研究所 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)[†], 森肇 (MORI Hazime)

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

概要

射影演算子法による定式化では、時間相関関数 $U_n(t)$ の時間発展は記憶関数 $\Gamma_n(t)$ を含んだ積分方程式で記述できる。 $U_n(t)$ と $\Gamma_n(t)$ の関係にある仮定をすると、 $U_n(t)$ についての閉じた方程式が導かれ、 $U_n(t)$ 、あるいは対応するパワースペクトル $I_n(\omega)$ を評価することができる。時間相関関数 $U_n(t)$ については、1) 相関時間の短いとき、 $1/(1+t^2)$ となる。2) 相関時間の長いとき、モード n に依存して、振動せずに e^{-t} で減衰する場合と振動しながら e^{-t} で減衰する場合がある。ただし、 $U_n(t)$ と $\Gamma_n(t)$ の特性時間が同じときには振動しながら $t^{-3/2}$ で減衰する。これらの結果は代表的な一次元乱流である Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式の数値シミュレーションとの比較によって正当化される。

1 はじめに

時間相関関数はカオス・乱流の統計的性質を示す量の一つとして、しばしば使われる。そして、時間相関関数の形には物理系によらない普遍的な性質

$$U_n(t) \propto \begin{cases} \exp[-(\hat{\gamma}_n t)^2] & \text{for } t \rightarrow 0 \\ \exp(-\bar{\gamma}_n t) & \text{for } t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

があるというのは常識¹⁾ のようである。時間相関関数 (1) に対応するスペクトルは

$$I_n(\omega) \propto \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\omega^2 + \bar{\gamma}_n^2} & \text{for } \omega \rightarrow 0 \\ \exp[-\omega^2/(4\hat{\gamma}_n)^2] & \text{for } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

となり、前者をローレンツ型スペクトル、後者をガウス型スペクトルと呼んでいる。ここでは、空間 1 次元における一般的な系において、(1), (2) の漸近形の検証を解析的、数値的に行う。

まず、KS 方程式、ニコライスキー (Nikolaevskii) 方程式を含む一般的な 1 次元乱流の方程式に射影演算子法を適用して、一般化されたランジュバン方程式を導出する。時間相関関数と記憶関数にある仮定をして、時間相関関数だけで閉じた方程式を導き、これを解くと (1), (2) に対応する解が得られる。詳細は以下を参照してもらうとして、これまでの常識と最も異なる点は、パワースペクトルが

$$I_n(\omega) \propto \exp[-\omega/\hat{\gamma}_n] \quad \text{for } \omega \rightarrow \infty \quad (3)$$

のようにガウス型ではなく、指数型となることである。

2 時間相関関数の時間発展方程式

1 次元乱流の物理空間における時間発展方程式を周期 L の周期境界条件のもとでフーリエ変換すると

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = L_n \hat{u}_n(t) + N_n(t), \quad n = 1, \dots, N, \quad (4)$$

[†]okamura@riam.kyushu-u.ac.jp

となる。ここで、 $L_n \hat{u}_n(t)$ は線形項、 $N_n(t)$ は非線形項、 N は打ち切り次数である。また、 $\hat{u}_n(t)$ は $u(x, t)$ のフーリエ変換

$$\hat{u}_n(t) := \int_0^L u(x, t) e^{-ik_n x} dx, \quad k_n := \frac{2n\pi}{L} \quad (5)$$

である。(5) の逆変換は、

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \hat{u}_n(t) e^{ik_n x} \quad (6)$$

となる。(4) に射影演算子法を適用すると

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = L_n \hat{u}_n(t) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Omega_{nj} \hat{u}_j(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^t \Gamma_{nj}(s) \hat{u}_j(t-s) ds + r_n(t), \quad (7)$$

となる。(7) を一般化されたランジュバン方程式と呼ぶ。¹⁾ ここで、統計的定常性 (時間 t の並進変換不変)、統計的一様性 (空間 x の並進変換不変)、統計的パリティ保存 (x と u の符号反転不変) を仮定すると、 $\Omega_{nj}, \Gamma_{nj}(t)$ は対角成分 $\Omega_n, \Gamma_n(t)$ だけになる。さらに $L_n + \Omega_n = 0$ となるので、(7) は

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = - \int_0^t \Gamma_n(s) \hat{u}_n(t-s) ds + r_n(t) \quad (8)$$

となる。(8) の導出の詳細は³⁾ を参照。 $\hat{u}_n(t)$ の時間相関関数を

$$U_n(t) := \langle \hat{u}_n(t) \hat{u}_n^*(0) \rangle \quad (9)$$

と定義して、(8), (9) と $\langle r_n(t) \hat{u}_n^*(0) \rangle = 0$ を使うと、時間相関関数 $U_n(t)$ の時間発展方程式は

$$\frac{dU_n(t)}{dt} = - \int_0^t \Gamma_n(s) U_n(t-s) ds \quad (10)$$

となる。

3 時間相関関数とパワースペクトル

まず、時間相関関数 $U_n(t)$ の特性時間 $\tau_n^{(u)}$ と記憶関数 $\Gamma_n(t)$ の特性時間 $\tau_n^{(\gamma)}$ を

$$\tau_n^{(u)} := \frac{1}{U_n(0)} \int_0^{\infty} U_n(t) dt, \quad \tau_n^{(\gamma)} := \frac{1}{\Gamma_n(0)} \int_0^{\infty} \Gamma_n(t) dt, \quad (11)$$

と、 $\tau_n^{(\gamma)}$ を $\tau_n^{(u)}$ で規格化した両特性時間の比を

$$\tilde{\tau}_n := \tau_n^{(\gamma)} / \tau_n^{(u)} \quad (12)$$

で定義する。 $U_n(t)$ のフーリエ・ラプラス変換は

$$\hat{U}_n(\omega) := \int_0^{\infty} U_n(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \hat{\Gamma}_n(\omega) := \int_0^{\infty} \Gamma_n(t) e^{-i\omega t} dt \quad (13)$$

となり、その逆変換は

$$U_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Re[\hat{U}_n(\omega)] \cos(\omega t) d\omega, \quad \Gamma_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Re[\hat{\Gamma}_n(\omega)] \cos(\omega t) d\omega \quad (14)$$

である。パワースペクトルは $U(t)$ が偶関数であることを使うと

$$I_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \Re[\hat{U}_n(\omega)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U_n(t) \cos(\omega t) dt \quad (15)$$

となる。

3.1 $T \ll 1$ での仮定

時間相関関数 $U_n(t)$ の時間を特性時間 $\tau_n^{(u)}$ で、記憶関数 $\Gamma_n(t)$ の時間を特性時間 $\tau_n^{(\gamma)}$ でスケーリングして、それぞれの関数を規格化すると、 $T \ll 1$ では同じ関数形 $Q_n(T)$ になると仮定する。

$$Q_n(T) := \frac{U_n(T\tau_n^{(u)})}{U_n(0)} \approx \frac{\Gamma_n(T\tau_n^{(\gamma)})}{\Gamma_n(0)}, \quad T \ll 1 \quad (16)$$

図1は時間相関関数 $U_n(T\tau_n^{(u)})/U_n(0)$ と記憶関数 $\Gamma_n(T\tau_n^{(\gamma)})/\Gamma_n(0)$ を表示している。これを見ると、両者のグラフは $T \ll 1$ では重なっているのですが、仮定(16)は少なくとも $T \ll 1$ ではよく成り立っている。 $U_n(t), \Gamma_n(t)$ はともに $t=0$ でピークをもち、特性時間で時間をスケーリングしているのだから、 t の小さいところでは同じような形になるとするのはもっともらしい。仮定(16)を使うと(10)は

$$\frac{dQ_n(T)}{dT} = - \int_0^{T/\tilde{\tau}_n} Q_n(S)Q_n(T - \tilde{\tau}_n S) dS, \quad T \ll 1 \quad (17)$$

となる。

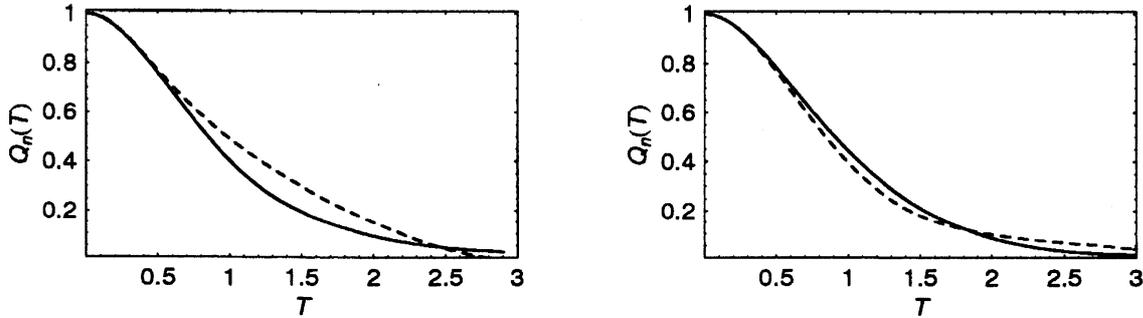


図1: 時間相関関数 $U_n(T\tau_n^{(u)})/U_n(0)$ (実線) と記憶関数 $\Gamma_n(T\tau_n^{(\gamma)})/\Gamma_n(0)$ (破線)。左図は $k_n = 0.13$, 右図は $k_n = 0.69$ 。

3.2 $\Omega \ll 1$ での仮定

時間相関関数 $U_n(t)$ と記憶関数 $\Gamma_n(t)$ のフーリエ・ラプラス変換した $\hat{U}_n(\omega)$ と $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ の振動数をそれぞれの特性時間 $\tau_n^{(u)}, \tau_n^{(\gamma)}$ でスケーリングして、それぞれの関数を規格化すると、 $\Omega \ll 1$ では同じ関数形 $R_n(\Omega)$ になると仮定する。

$$R_n(\Omega) := \frac{\hat{U}_n(\Omega/\tau_n^{(u)})}{\hat{U}_n(0)} \approx \frac{\hat{\Gamma}_n(\Omega/\tau_n^{(\gamma)})}{\hat{\Gamma}_n(0)}, \quad \Omega \ll 1 \quad (18)$$

図2は $\Re[\hat{U}_n(\Omega/\tau_n^{(u)})/\hat{U}_n(0)]$ と $\Re[\hat{\Gamma}_n(\Omega/\tau_n^{(\gamma)})/\hat{\Gamma}_n(0)]$ を表示している。これを見ると、両者のグラフは $\Omega \ll 1$ では重なっているのですが、仮定(18)は少なくとも $\Omega \ll 1$ ではよく成り立っている。 $\hat{U}_n(\omega)$ と $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ はともに $\omega=0$ でピークをもち、特性時間の逆数で振動数をスケーリングしているのだから、 ω の小さいところでは同じような形になるとするのはもっともらしい。仮定(18)を使うと(10)のフーリエ・ラプラス変換は

$$R_n(\Omega)R_n(\Omega\tilde{\tau}_n) + i\Omega R_n(\Omega) - 1 = 0, \quad \Omega \ll 1 \quad (19)$$

となる。

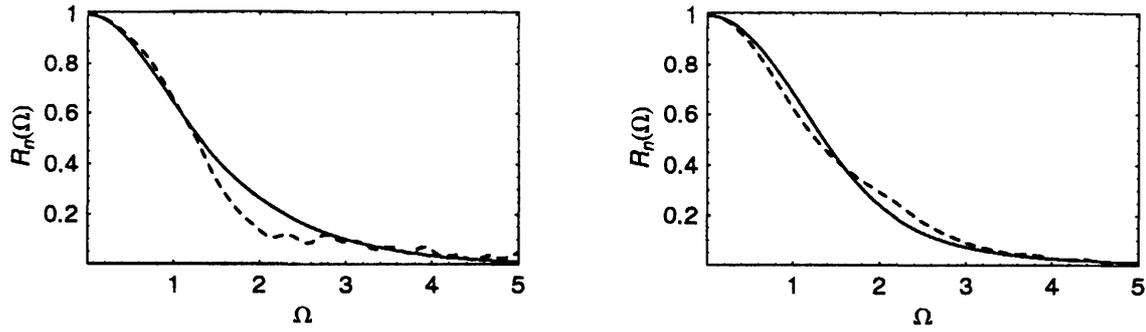


図 2: $\Re[\hat{U}_n(\Omega/\tau_n^{(u)})/\hat{U}_n(0)]$ (実線) と $\Re[\hat{\Gamma}_n(\Omega/\tau_n^{(\gamma)})/\hat{\Gamma}_n(0)]$ (破線). 左図は $k_n = 0.13$ で, 右図は $k_n = 0.69$.

無次元化した時間相関関数 $Q_n(T)$ に対応するパワースペクトル $\Phi_n(\Omega)$ は

$$\Phi_n(\Omega) := \frac{1}{\pi} \Re[R_n(\Omega)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q_n(T) \cos(\Omega T) dT \quad (20)$$

となる.

4 相関関数, パワースペクトルの漸近評価

4.1 $T \ll \tilde{\tau}_n$ ($T \rightarrow 0$) の場合

(17) を $T \ll \tilde{\tau}_n$ で評価すると

$$\frac{dQ_n(T)}{dT} \approx -\frac{[Q_n(T)]^2 T}{\tilde{\tau}_n} \quad (21)$$

と近似できる. (21) を $Q_n(0) = 1$ のもとで解くと,

$$Q_n(T) = \frac{2\tilde{\tau}_n}{T^2 + 2\tilde{\tau}_n} \quad \text{for } T \ll \tilde{\tau}_n \quad (22)$$

となる. これを代数型と呼ぶ. 図 3 の左図に (22) と KS 方程式の数値シミュレーションの結果を比べ

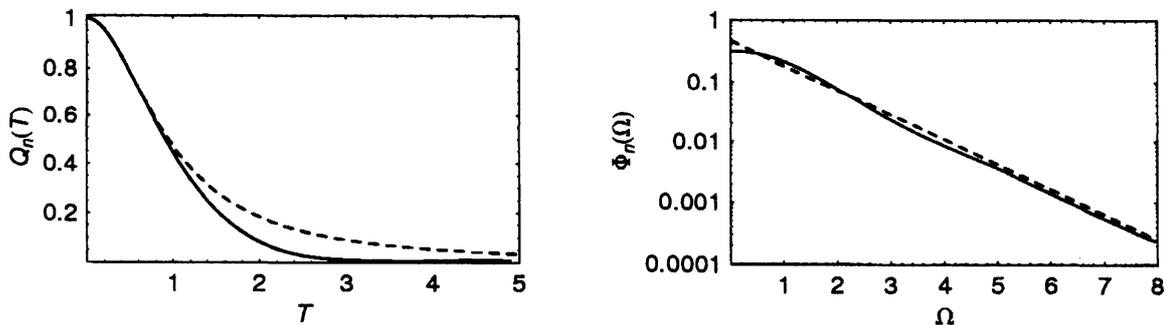


図 3: 左図は相関関数 $Q_n(T)$ で, 実線が KS 方程式の数値計算, 破線が (22) を示す. 右図はパワースペクトル $\Phi_n(\Omega)$ で, 実線が数値計算, 破線が (23) を示す. ともに, $k_n = 0.69$ の場合であり, $\tilde{\tau}_n = 0.44$.

ている. これより, 確かに, $T \lesssim \tilde{\tau}_n = 0.44$ では両者はよく一致していることがわかる. 対応するパ

ワースペクトルは, (22) を (20) に代入すると

$$\Phi_n(\Omega) = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_n}{2}} \exp\left(-\sqrt{2\tilde{\tau}_n}\Omega\right) \quad \text{for } 1 \ll \Omega\tilde{\tau}_n \quad (23)$$

となる. これを指数型スペクトルと呼ぶ. 図3の右図に(23)とKS方程式の数値シミュレーションの結果を比べている. これより, 確かに, $\Omega \gtrsim 1/\tilde{\tau}_n = 2.3$ では両者はよく一致していることがわかる.

常識(1)のように時間相関関数の相関時間 T が短いところでの関数形は $Q_n(T) \propto \exp(-T^2)$ のようなガウス型¹⁾ であるとするのが一般的である. ここでは, ガウス型ではなくて, 代数型(22)であると主張したいのである. しかし, $T \ll 1$ の場合には, 代数型(22)とガウス型はほとんど同じで, グラフ上では区別がつかない. 一方, (22)に対応するスペクトルは指数型(23), $Q_n(T) \propto \exp(-T^2)$ に対応するスペクトルはガウス型 $\Phi_n(\Omega) \propto \exp(-\Omega^2)$ となり, グラフの上からも明らかに違いが見える. 図3の右図の片対数グラフを眺めれば, KS方程式のワースペクトルは指数型であることは一目瞭然である. KS方程式以外にも, 周波数変調モデル,²⁾ ニコライスキー方程式において, $\Omega \rightarrow \infty$ で指数型スペクトルとなることが数値的に確認されている.

4.2 $T \gg \tilde{\tau}_n$ ($T \rightarrow \infty$) の場合

$T \gg \tilde{\tau}_n$ の場合には, まず, (19)において $\Omega \rightarrow 0$ における $R_n(\Omega)$ を評価して, それを(20)に代入して $T \rightarrow \infty$ における $Q_n(T)$ の漸近形を評価する. 具体的には $\Omega \rightarrow 0$ における $R_n(\Omega)$ を

$$R_n(\Omega) := \frac{1 + b_n^{(2)}\Omega^2}{1 + a_n^{(2)}\Omega^2 + a_n^{(4)}\Omega^4} + i \frac{b_n^{(1)}\Omega + b_n^{(3)}\Omega^3}{1 + c_n^{(2)}\Omega^2 + c_n^{(4)}\Omega^4} \quad (24)$$

のようにパデ近似であらわし, (19)に代入して, $\Omega = 0$ の周りで Ω の5次までテイラー展開して, 各次数から得られる方程式を解くと, 係数 $a_n^{(2)}$, $a_n^{(4)}$, $b_n^{(2)}$ が $\tilde{\tau}_n$ の関数として決まる. ワースペクトル $\Phi_n(\Omega)$ は(20), (24)より

$$\Phi_n(\Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1 + b_n^{(2)}\Omega^2}{1 + a_n^{(2)}\Omega^2 + a_n^{(4)}\Omega^4} \quad (25)$$

となり, 時間相関関数 $Q_n(T)$ は(20)より

$$Q_n(T) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + b_n^{(2)}\Omega^2}{1 + a_n^{(2)}\Omega^2 + a_n^{(4)}\Omega^4} \cos(\Omega T) d\Omega, \quad (26)$$

となる. (26)は留数定理を使って評価する. $\tilde{\tau}_n$ の値によって, 分母の $1 + a_n^{(2)}\Omega^2 + a_n^{(4)}\Omega^4 = 0$ の解の性質が異なるので, 場合分けが必要となる.

ワースペクトルを(25)のように与えているので, $\Omega \rightarrow 0$ では

$$\Phi_n(\Omega) \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + a_n^{(2)}\Omega^2} \quad (27)$$

となり, ローレンツ型である.

4.2.1 $0 < \tilde{\tau}_n < 0.37 \dots$ の場合

時間相関関数 $Q_n(T)$ は(26)より,

$$Q_n(T) = A_n^{(-)} e^{-\beta_n^{(-)} T} + A_n^{(+)} e^{-\beta_n^{(+)} T} \approx A_n^{(-)} e^{-\beta_n^{(-)} T} \quad \text{for } T \rightarrow \infty \quad (28)$$

のように振動せずに減衰する. ここで, $A_n^{(\pm)}$, $\beta_n^{(\pm)}$ は $\tilde{\tau}_n$ の関数である. ただし, $\beta_n^{(+)} > \beta_n^{(-)}$. $\tilde{\tau}_n = 0.35$ ($k_n = 0.13$) のときの時間相関関数(28)を図4の左図に示している. T が大きいところでKS方程式を数値的に解いた結果とほぼ一致している.

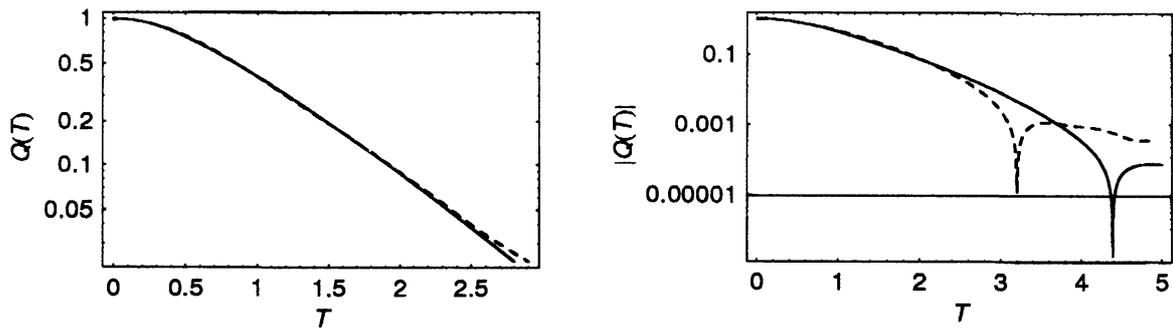


図 4: $\tilde{\tau}_n = 0.35$ ($k_n = 0.13$) の場合. 実線は (28). 破線は KS 方程式の数値計算結果.

$\Omega \ll 1$ のときには

$$\Phi_n(\Omega) = \frac{A_n^{(-)}}{\pi} \frac{\beta_n^{(-)}}{\Omega^2 + [\beta_n^{(-)}]^2} + \frac{A_n^{(+)}}{\pi} \frac{\beta_n^{(+)}}{\Omega^2 + [\beta_n^{(+)}]^2} \approx \frac{1}{\pi} \frac{\beta_n^{(-)}\beta_n^{(+)} [A_n^{(-)}\beta_n^{(+)} + A_n^{(+)}\beta_n^{(-)}]}{[\beta_n^{(-)}\beta_n^{(+)}]^2 + \{[\beta_n^{(-)}]^2 + [\beta_n^{(+)}]^2\}\Omega^2} \quad (29)$$

となる. したがって, パワースペクトル (29) は $\Omega \ll 1$ の場合には, ローレンツ型とみなしてもよいことを示している. もちろん, (29) は (25), (27) と同じである.

4.2.2 $0.37 \dots < \tilde{\tau}_n < 0.84 \dots$ の場合

この場合の時間相関関数 $Q_n(T)$ は (26) より,

$$Q_n(T) = A_n e^{-\beta_n T} \cos(\alpha_n T + \theta_n) \quad \text{for } T \rightarrow \infty \quad (30)$$

のように振動しながら減衰する. ここで, $A_n, \beta_n, \alpha_n, \theta_n$ は $\tilde{\tau}_n$ の関数である. $\tilde{\tau}_n = 0.44$ ($k_n = 0.69$) のときの時間相関関数 (30) を図 4 の右図に示している. T が大きいところで, KS 方程式を数値的に解いた結果とほぼ一致しているが, 最初に $Q_n(T)$ がゼロとなるところと周期にずれが見られる. これは, θ_n と α_n の評価式が正確でないことに対応している. 漸近形の評価なので, 位相 θ_n まで正しく評価できないのは当たり前かもしれない. 一方, 周期に対応する α_n は正しく評価できる量である. しかし, 数値結果からこれを評価するためには時間相関の大きな場合の時間相関関数を計算する必要がある, この場合の時間相関関数を精度良く計算するのは大変である. この事情により, 図 4 の右図の時間相関関数が $0 \leq T < 5$ までしか得られておらず, この結果から α_n を評価できない. $\tilde{\tau}_n = 0.95$ ($k_n = 0.88$) の場合の時間相関関数は減衰が早いため, 振動するところまで計算でき, α_n が評価できる. しかし, この場合には (26) の形の解が存在しないので, 解析解が得られない.

パワースペクトルは (25) のように 4 次のパデ近似で表現されているが, $a_n^{(4)}, b_n^{(2)}$ は $a_n^{(2)}$ よりも小さいので, Ω の小さいところでは (25) をローレンツ型スペクトルとみなしてよい. もちろんローレンツ型スペクトルからのずれが少しあるために, 時間相関関数 (30) がわずかに振動していることを忘れてはいけないことを注意しておく.

4.2.3 $0.84 \dots < \tilde{\tau}_n < 0.85 \dots$ の場合

$$0.84 \dots < \tilde{\tau}_n < 0.857 \dots \quad (31)$$

の狭い範囲では, (28) のような解が存在する.

4.2.4 $0.85\dots < \tilde{\tau}_n < 1$ の場合

$$0.857\dots < \tilde{\tau}_n \leq 1 \quad (32)$$

の範囲では、(26) の形で解を表現することができない。ここでは、振動しながら冪で減衰すると予想しているが、数値計算ではアンサンブル数の不足のために、冪で減衰するか、指数的に減衰するかを判断できない。

4.2.5 $\tilde{\tau}_n = 1$ の場合

$\tilde{\tau}_n = 1$ の場合には、(19) を厳密に解くことができ、その解は

$$R_n(\Omega) = -\frac{i\Omega}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \quad (33)$$

なので、パワースペクトルは(15)より

$$I_n(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} & 0 \leq \Omega \leq 2 \\ 0 & 2 < \Omega \end{cases} \quad (34)$$

となる。ただし、 $\Omega \rightarrow 0$ の場合を扱っているので、 $2 < \Omega$ の解には意味がない。(34) を(19) に代入すると

$$Q_n(T) = \frac{J_1(2T)}{T} \rightarrow \frac{T^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(2T - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{for } T \rightarrow \infty \quad (35)$$

となり、振動しながら、 $T^{-3/2}$ という冪で減衰している。

(34) より、 $\Omega \rightarrow 0$ では、

$$I_n(\Omega) \sim \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \quad (36)$$

なので、ローレンツ型とってよい。

5 時間相関関数 $S(t)$

最後に $\hat{u}_n(t)$ の時間相関関数 $U_n(t)$ ではなく、 $u(x, t)$ の時間相関関数 $S(t)$ についてコメントしておく。規格化した相関関数を $\hat{U}_n(t) := U_n(t)/U_n(0)$ 、エネルギースペクトルを $E(k_n)$ とすると

$$S(t) := \langle u(x, t)u(x, 0) \rangle = \frac{4\pi}{L} \sum_n E(k_n) \hat{U}_n(t) = 2 \int_0^\infty E(k) \hat{U}(k, t) dk \quad (37)$$

となる。 $\hat{U}_n(t)$ が指数型 e^{-t} で減衰するとしても、その和である $S(t)$ が指数型で減衰するとは限らない。たとえば、 $\hat{U}_n(t)$ の特性時間が波数に k_n^{-z} のように依存すると、 $t \rightarrow \infty$ では

$$Q(t) \sim \int_0^\infty \exp(-k^z t) dk \sim t^{-1/z} \quad (38)$$

のように冪で減衰する。

6 まとめ

時間相関関数 $U_n(t)$ とパワースペクトル $I_n(\omega)$ の漸近形は以下のように $\tilde{\tau}_n$ に依存する。一言でまとめると、時間相関関数の相関時間 t が短いところでは代数型 $1/(1+t^2)$ ，長いところでは $\tilde{\tau}_n$ に依存して、指数的に減衰するか、あるいは、振動しながら指数的に減衰する。一方、パワースペクトルの ω の小さいところではローレンツ型 $1/(1+\omega^2)$ ，大きいところでは指数型 $e^{-\omega}$ で減衰する。

時間相関関数 $U_n(t)$			パワースペクトル $I_n(\omega)$		
$\tilde{\tau}_n$	$t \ll \tau_n^{(\gamma)}$	$t \gg \tau_n^{(\gamma)}$	$\tilde{\tau}_n$	$\omega \ll 1/\tau_n^{(\gamma)}$	$\omega \gg 1/\tau_n^{(\gamma)}$
$0 \leq \tilde{\tau}_n < 0.37$	$1/(1+t^2)$	e^{-t}	$0 \leq \tilde{\tau}_n \leq 1$	$1/(1+\omega^2)$	$e^{-\omega}$
$0.37 < \tilde{\tau}_n < 0.84$	$1/(1+t^2)$	$e^{-t} \cos t$			
$0.84 < \tilde{\tau}_n < 0.85$	$1/(1+t^2)$	e^{-t}			
$0.85 < \tilde{\tau}_n < 1$	$1/(1+t^2)$	—			
$\tilde{\tau}_n = 1$	$1/(1+t^2)$	$t^{-3/2} \cos t$			

参考文献

- 1) R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical physics II, Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer series in solid-state sciences; 31. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1991.
- 2) H. Mori and M. Okamura. Dynamic structures of the time correlation functions of chaotic nonequilibrium fluctuations. *Phys. Rev. E*, 76:061104, 2007.
- 3) M. Okamura. Validity of the essential assumption in a projection operator method. *Phys. Rev. E*, 74:046210, 2006.