

円柱後流中の不安定周期運動

渡辺 毅 (Takeshi WATANABE)¹

柳瀬 眞一郎 (Shinichiro YANASE)¹

河原 源太 (Genta KAWAHARA)²

¹ 岡山大学大学院自然科学研究科

Okayama University Graduate School of Natural Science and Technology

² 大阪大学大学院基礎工学研究科

Osaka University Graduate School of Engineering Science

1 はじめに

円柱後流問題は鈍い物体を過ぎる流れに対する最も基本的・本質的なモデルとして注目を集め、古くから多くの研究が行われてきた。円柱を過ぎる流れは、遠方流の流速 U を代表速さ、円柱の直径 d を代表長さとし、動粘性係数 ν を用いて定義される Reynolds 数

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

によって整理される。 $Re \lesssim 1$ では円柱の中心を通り流れに平行な面に関して対称で、かつ、上流側と下流側も近似的に対称な流れとなるが、 Re の増大と共に後流側の流線が徐々に下流側に引き伸ばされて前後の非対称性が大きくなり、 $Re \gtrsim 6$ になると円柱背後に双子渦が生じる。この双子渦は $Re \gtrsim 50$ で振動し始め、Kármán 渦列が発生する。この振動は Re が小さいうちは 2 次元であるが、 $Re \gtrsim 180$ で 3 次元的な構造へと分岐するものと理解されている。

本研究はこうした解の構造を Re を変化させながら追跡し、 $Re \gtrsim 1000$ で実現されるカオス的な流れと乱流を、その流れに埋め込まれた定常解および周期解を手掛かりに解析することを旨とする。

2 基礎方程式と数値計算法

2 次元渦度方程式の無次元形を流れ関数 $\tilde{\psi}$ によって表した式の、2 次元円筒座標系 (r, θ) における表示

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \tilde{\psi}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\psi}, \nabla^2 \tilde{\psi})}{\partial(r, \theta)} + \frac{2}{Re} \nabla^2 \nabla^2 \tilde{\psi} \quad (1)$$

を境界条件

$$\tilde{\psi} = \psi_c(t), \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} = 0 \quad (r = 1), \quad \tilde{\psi} = r \sin \theta \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2)$$

のもとで解く。ここで ∇ は、 e_r 、 e_θ をそれぞれ半径方向、周方向の単位ベクトルとして

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

で与えられる。また $\psi_c(t)$ は円柱表面で流れ関数 $\tilde{\psi}$ が持つ定数成分を表すものであり、円柱表面で圧力 p が 1 価であるとの条件

$$\oint \nabla p \cdot \mathbf{e}_\theta |_{r=1} d\theta = 0 \quad (3)$$

を課すことによって決定する。

式 (1) を解くために、まず $\tilde{\psi}$ を、境界条件だけを満たす成分 $\bar{\psi}$ とそれ以外 ψ に分けて $\tilde{\psi}(r, \theta, t) = \bar{\psi}(r, \theta) + \psi(r, \theta, t)$ と表すと、 $\bar{\psi}$ 、 ψ に対して課される境界条件は

$$\psi = \psi_c(t), \quad \bar{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1) \quad (4)$$

$$\bar{\psi} = r \sin \theta, \quad \psi = \frac{\partial^{p+q} \psi}{\partial r^p \partial \theta^q} = 0 \quad (p, q = 1, 2, \dots) \quad (r \rightarrow \infty)$$

となる。

ψ を数値的に解くために、まず周方向に

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=-[\frac{N}{2}]}^{[\frac{N-1}{2}]} e^{in\theta} \psi_n(r, t) \quad (5)$$

のように Fourier 級数展開する。ここで N は打ち切り項数であり、最高次モードでの任意の位相の移動を表現できるように必ず奇数を取り、かつ、数値計算に用いている高速 Fourier 変換ライブラリである FFTW で最適化されているモード数を選ぶため、条件

$$N = 3^a 5^b 7^c 11^d 13^e, \quad d + e = 0 \text{ または } 1 \quad (6)$$

を満たすように選ぶ。この展開式を式 (3) に代入することにより $n = 0$ モードの展開係数に対する条件

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} = 0 \quad (7)$$

が導かれる。これにより ψ_n に対する境界条件

$$\psi_{n \neq 0} = \frac{\partial \psi_n}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} = 0 \quad (r = 1), \quad \psi = \frac{\partial^p \psi}{\partial r^p} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (8)$$

が得られる。

ψ_n はさらに、 r 方向に展開関数 $\Psi_m^{(n)}(r)$ を用いて

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=-[\frac{N}{2}]}^{[\frac{N-1}{2}]} e^{in\theta} \sum_{m=1}^M \Psi_m^{(n)}(r) \psi_{mn}(t) \quad (9)$$

と展開される。ここで M は打ち切り項数である。

展開関数 $\Psi_m^{(n)}(r)$ は、半無限領域 $[1, \infty)$ で定義されている変数 r を $[-1, 1]$ で定義される変数 x に

$$x = 1 - 2e^{c(1-r)} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (10)$$

によって写像してから Chebyshev 多項式 $C_m(x)$ を用いて

$$\Psi_m^{(n)}(r(x)) = \frac{(x^2 + A^{(n)}x + B^{(n)}) C_{m-1}(r)}{r(x)} \quad (11)$$

で定義し、定数 $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ を $r = 1$ で ψ_n の境界条件 (8) を満たすように決める。なお $r \rightarrow \infty$ での境界条件は自動的に満たされる。ここで c は適当なスケールファクターであり、Chebyshev 多項式の補間点のうち最大のもの x_M が写像によって適当な計算半径 $R > 1$ に写像されるように

$$c = \frac{1}{1-R} \log \frac{1-x_M}{2}$$

で決定する。この計算半径 R は十分に大きくとる必要があるが、 R を大きくすると、同時に打ち切り項数 M , N も大きくしなければならないため、現実的に計算が可能な最大の大きさとして $R = 50$ を選び、不十分な場合には少しずつ値を大きくしながら結果を検討することにする。

ところでこうした写像は式 (10) 以外にも $\tanh(r)$, $\tan^{-1}(r)$ あるいは $1/r$ など多くの他の関数形が考えられ、実際に試したが、式 (10) が最も数値的な性質が良かったために採用した。こうした性質の違いは、Chebyshev 多項式の補間点がどのように写像されるかに大きく依存していると考えられる。一般に $[-1, 1]$ で定義される x を $r(x)$ によって半無限領域に写像する場合 $r(x)$ は $x = -1$ 付近ではゆるやかに変化し、 $x = 1$ に近づくにしたがって急激に変化するような関数になるため、 $r(x)$ によって r 空間に写像される Chebyshev 多項式の補間点は $r = 1$ のとき最も密で r の増大とともに急激に疎になっていく。しかし用いる $r(x)$ によってこの疎密の配分は相当に異なっており、式 (10) はこうした疎密の偏りが最も小さく、したがって r 空間での補間点の配置が最も等間隔に近い配置となった。ただし補間点の配置のバランスという問題は、最終的な解法として選点法を用いていることと深く関連しており、もしも選点法ではなく Galerkin 法を用いる場合は選点の配置よりも半無限領域での積分の精度をより良くすることを念頭に写像関数を選ぶ必要があると思われる。実際に本研究でも、数値的安定性を検討するために Galerkin 法を適用してみたが、十分な精度が得られなかった。

一方 $r \rightarrow \infty$ で一様流に接続する基本モード $\bar{\psi}$ は、数値的な性質を考慮すると展開関数 $\Psi_m^{(n)}(r(x))$ と同じ形であることが望ましいため、式 (11) で $m = 1$ とおき、境界条件 (4) を満たすように係数を決定することにより

$$\bar{\psi} = \frac{x^2 + \bar{A}x + \bar{B}}{r} \sin \theta, \quad \bar{A} = \bar{B} = \frac{1+2c}{c} \quad (12)$$

と表す。ただし $C_0 = 1$ を用いた。

以上により相空間ベクトル $\{\psi_{mn}(t)\} = \psi(t)$ が得られ、式 (1) の右辺に $(\nabla^2)^{-1}$ を乗じたものを $f = \{f_{mn}\}$ とおけば

$$\frac{d\psi_{mn}}{dt} = f_{mn}(\psi) \quad (13)$$

が得られる。この式を選点法を用いて解く。具体的には、定常解・周期解の求解、解の安定性の計算および時間発展計算を実行するが、本研究ではこれらの計算をすべて、時間発

展スキームによって行う。時間発展計算は、時間微分項に前進 Euler 法、粘性項に Crank-Nicolson 法、非線形項に Adams-Bashforth 法を用いて行い、定常解・周期解は Poincaré 断面の不動点計算に GMRes 法を組み合わせた方法によって求める。またエイリアス誤差の除去は 2/3 法と 3/2 法の中間的な方法として、 N より少し大きな \tilde{N} を選んで $\tilde{N}/3$ より大きい高調波成分を切り捨ててから大きさ \tilde{N} の Fourier 変換を行うことにより行う。具体的に \tilde{N} は、 $N \leq \tilde{N} < [3N/2] + 1$, $\tilde{N} \bmod 3 = 1$ および式 (6) の条件を満たす最小の値を選ぶ。これにより数値計算に用いている高速 Fourier 変換ライブラリである FFTW の実行速度を犠牲にすることなく、同時に、2/3 法で打ち切り過ぎによる無駄をなくすことにする。

なお時間積分スキームに 4 次精度の Runge-Kutta 法を選んだ場合、精度の良さよりもむしろ陽解法の不安定性が前面に出てしまい、1 ステップあたりの時間刻み Δt を極端に小さくしなければならず、現実的な時間の範囲で計算を完了することが困難なため採用しなかった。

2.1 Poincaré 断面の不動点計算

式 (13) の解を、 ψ_0 を初期値として

$$\psi_{mn} = \phi_{mn}(\psi_0, t)$$

と表すと、周期 T の周期軌道は

$$\psi_{mn} = \phi_{mn}(\psi, T) \quad (14)$$

を満たす。ところが ψ は軌道上であれば任意の位置をとることが出来るため、上式はある解に対して自由度 1 となって一意に定まらない。そこで相空間に適当な Poincaré 断面を設定し、 $t=0$ のとき ψ をこの断面上におく。これにより解は一意に決定されるが、その代わりに、変数の個数が方程式の個数よりも 1 個少なくなってしまう。そこで今度は新たに周期 T を変数として加えることにより、再び解くべき方程式の個数と相空間ベクトルの次元が一致し、方程式系が閉じる。本研究では Poincaré 断面を $\psi_{10} = 0$ におくことにするため、最終的に

$$\phi_{mn}(\psi, T) = \psi_{mn}, \quad \psi_{10} = 0$$

を解く。具体的に、Poincaré 断面上での解の初期推定を (ψ', T) 、その補正を $(\Delta\psi', \Delta T)$ とおき、 $(\Delta\psi', \Delta T) \ll 1$ を仮定して式 (14) を線形化することによって得られる方程式

$$\sum_{\substack{m,n \\ (m,n) \neq (1,0)}} \left[\frac{\partial \phi_{jk}}{\partial \psi_{mn}}(\psi', T) - \delta_{jk,mn} \right] \Delta\psi_{mn} + \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial t}(\psi', T) \Delta T = -[\phi_{jk}(\psi', T) - \psi_{jk}] \quad (15)$$

を解き、 $(\psi' + \Delta\psi', T + \Delta T)$ によって解を更新することを収束条件が満たされるまで繰り返す。ここで ψ' は Poincaré 断面上のベクトルであり、 $\psi' = (\psi_{20}, \psi_{30}, \dots, \psi_{MN})$ である。また $\partial \phi_{jk} / \partial \psi_{mn}$ は基準となる軌道 $\phi_{jk}(\psi, t)$ のまわりで線形化された流れ $\delta\phi_{jk}(\delta\psi, t)$ を用いて

$$\frac{\partial \phi_{jk}}{\partial \psi_{mn}}(\psi', T) = \delta\phi_{jk}(e_{mn}, T)$$

と評価される。ここで e_{mn} は mn 成分が 1, それ以外がすべて 0 であるようなベクトルである。これを用いて式 (15) を行列の形で表すと

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t} & \delta \phi_{10}(e_{20}) & \cdots & \delta \phi_{10}(e_{MN}) \\ \frac{\partial \phi_{20}}{\partial t} & \delta \phi_{20}(e_{20}) - 1 & \cdots & \delta \phi_{20}(e_{MN}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{MN}}{\partial t} & \delta \phi_{MN}(e_{20}) & \cdots & \delta \phi_{MN}(e_{MN}) - 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{y} = (\Delta T, \Delta \psi_{20}, \dots, \Delta \psi_{MN})^T, \quad \mathbf{b} = -(\phi_{10} - \psi_{10}, \phi_{20} - \psi_{20}, \dots, \phi_{MN} - \psi_{MN})^T$$

とにおいて

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (17)$$

とかかれ, 周期解を求める問題は最終的に線形システム (17) を解く問題に帰着される。

なお ϕ_{mn} が定常解であった場合任意の T に対して式 (14) が成り立つため, 周期解を求める手法をそのまま適用することで定常解を求めることもできる。定常解は式 (13) の左辺を 0 とおいて Newton 法などを用いて求めることも可能であるが, この場合 Fourier 展開によって非線形項から生じるエイリアス誤差を除去することが困難であるため一般に疑スペクトル法となり, 打ち切り項数 N を大きめにとる必要が生じる。これに対して時間発展スキームを用いて定常解を求める場合, エイリアス誤差の除去が時間積分スキーム中に含まれているためにエイリアス誤差が含まれず, 従ってより小さな N で十分な精度が得られる。

2.2 GMRes 法

線形システム (17) を反復法によって解くことを考える。第 k ステップの近似解を \mathbf{y}_k とし, Krylov 部分空間

$$\mathcal{K}_k = \text{span}(\mathbf{c}_0, A\mathbf{c}_0, \dots, A^{k-1}\mathbf{c}_0), \quad \mathbf{c}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{y}_0 \quad (18)$$

内で 2 乗ノルムの残差 $\|\mathbf{b} - A\mathbf{y}_k\|$ を最小にするような $\mathbf{y}_k \in \mathbf{y}_0 + \mathcal{K}_k$ を探し, 規格化された残差 $\|\mathbf{b} - A\mathbf{y}_k\|/\|\mathbf{b}\|$ が収束条件を満たしたとき \mathbf{y}_k を \mathbf{y} の近似解とする。この収束条件は, 甘過ぎると Newton 法が収束しなくなる半面, 厳し過ぎると反復回数が増えて計算の効率が悪くなる。ところが, 場合によって規格化された残差が $O(10^{-1})$ 程度で十分なこともあれば, $O(10^{-3})$ でも不十分な場合がある。本来は Newton 法が収束する最大の値をとるのが望ましいが, GMRes 法の収束条件と Newton 法の収束の関係は, 解やその初期推定の性質に強く依存しているようであり, 今のところ適当な評価方法を見出すことができていない。このため収束条件を十分に厳しい側に設定しており, 必ずしも効率的に十分とはいえず, 今後の課題として残されている。

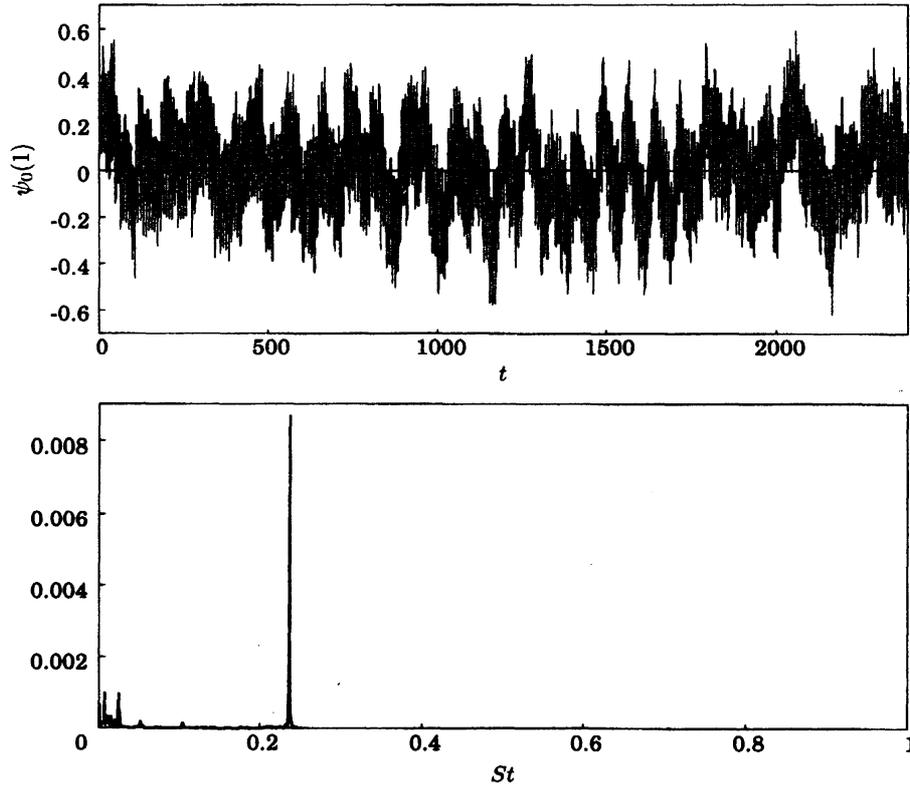


Fig. 1. $Re = 800$ のときの、円柱表面での流れ関数の定数成分 $\psi_0(1)$ の時間変化 (上) とパワースペクトル (下)

一方反復回数は $k \ll M \times N$ でなければ意味がないが、この手法を線形システムソルバとして用いた場合、行列 A の性質によって極端な収束性の違いが現れることが知られている。このため一般には解くべき線形システムに対して何らかの前処理を行い、GMRes法による求解にとって望ましい性質を与えてから実際の反復計算を開始する場合が多い。この点に関しては、式 (17) に現れる行列 A は GMRes 法との相性が良いことを確認しているため、特に前処理を施す必要はないが、本研究に関していえば、GMRes 法の有効性は式 (17) を解くことではなく、式 (17) に現れる行列 A を陽に構成することなく \mathbf{y} を求めることが出来る点にこそある。これは式 (18) から明らかのように、第 k ステップで新たに必要となる情報は A そのものではなく $A^k \mathbf{c}_0$ であるからであり、さらに第 $k-1$ ステップの段階ですでに $A^{k-1} \mathbf{c}_0$ が求められているために、結局 “ A を 1 回作用させる” という線形作用素を準備しておけば、 k が増える度にこの作用素を繰り返し作用させれば良いからである。具体的に $\mathbf{d}^{(k)} = A^{k-1} \mathbf{c}_0$ とおくと $\mathbf{d}^{(k+1)} = A \mathbf{d}^{(k)}$ だから式 (16) に示す A を用いて

$$d_{jk}^{(k+1)} = \delta \phi_{jk}(\mathbf{d}^{(k)}, T) - (1 - \delta_{jk,10}) d_{jk}^{(k)} + \frac{\partial \phi_{jk}}{\partial t} d_{10}^{(k)}$$

とかける。これにより A を陽に構成する必要はなく、 k と共に上式で示す計算を逐次実行することにより効率良く \mathbf{y} を求めることができる。

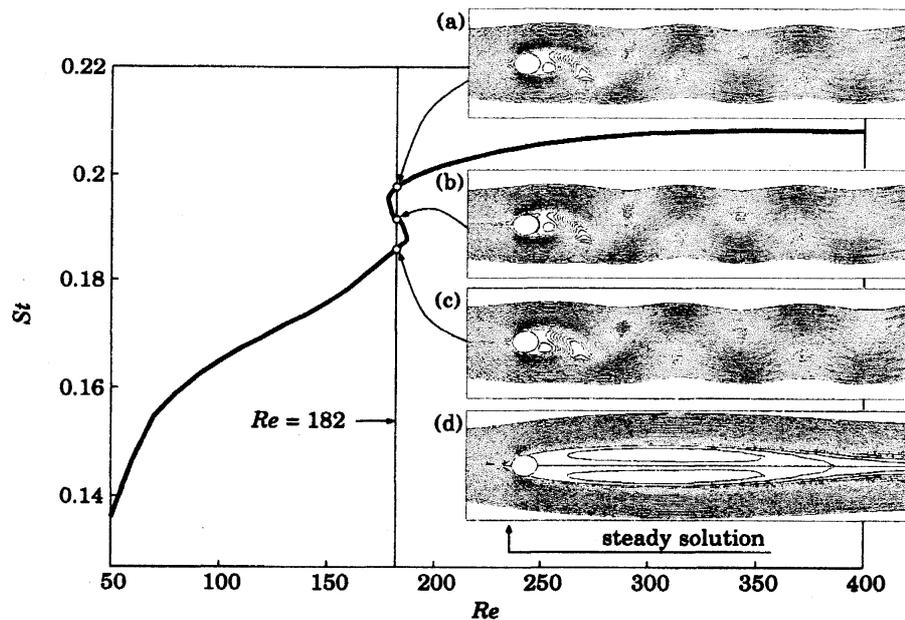


Fig. 2. 円柱後流の周期解の分岐図と $Re = 182$ に存在する 4 個の解 (a)~(d)

3 結果

計算を実行した結果得られた, $Re = 800$ のときの円柱表面での流れ関数の定数成分 $\psi_0(1)$ の時間変化とそのパワースペクトルを Fig.1 に, 周期解の分岐図を Fig.2 に示す. Fig.1(下)の横軸と Fig.2 の縦軸の変数である St は Strouhal 数である.

Fig.1 から, 時間発展計算の結果, 少なくとも $Re = 800$ では, 弱いカオス状態が生じている. 一方 Fig.2 に示すように, $Re = 182$ 付近では少なくとも 4 個の異なる解が存在していることが明らかになった. これまでの研究からこの周辺の Re で 3 次元的な周期解が分岐していることが知られているため, 今後 3 次元へ拡張した際にどこから 3 次元解が分岐しているのかを調べるのは非常に興味深い. なお $Re > 400$ の解は現在計算を実行中であり, まだ求められていない.

今後シミュレーション, 周期解の求解ともにより大きな Re へと進めながら安定性解析等を行い, 同時に計算の 3 次元化の準備も進めていく予定である.

参考文献

- 1) A. Zebib, Stability of viscous flow past a circular cylinder, J. Engng. Math. **21**, 155-165 (1987)
- 2) B. R. Noack and H. Eckelmann, A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake, J. Fluid Mech. **270**, 297-330 (1994)
- 3) B. R. Noack and H. Eckelmann, A low-dimensional Galerkin method for the three-dimensional flow around a circular cylinder, Phys. Fluids **6**, 124-143 (1994)