数理解析研究所講究録
第 1602 巻 2008 年 74-84

ON RANDOM KRIPKE FRAMES

池田 宏一郎 AND 岡本 圭史

ABSTRACT. このノートの目的は，命題様相論理の 0-1 法則に関する結果を紹介することである．命題様相論理では，クリプキ構造の恒真性に関する 0-1 法則 とクリプキフ・レームの恒真性に関する 0-1 法則のふたつが研究されている．このノートでは，クリプキ・フレームの恒真性に関する 0-1 法則を扱う．特に，ランダム クリプキ・フレームを定義し，ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを紹介する．また，命題様相論理に不慣れな読者のために，命題様相論理の基本的な事柄についても解説する．

1. 一階述語論理の 0-1 法則

この節では，命題様相論理における 0-1 法則について述べる前に，一階述語論理の 0-1 法則について述べる．一階述語論理の 0-1 法則に関する文献には [4, 6] などがある．

言語として二変数述語記号 E のみを考え，グラフを一階述語論理の構造として扱う．

定義 1. $\mathbf{G}_n$ は頂点 $\{1,2,\dots,n\}$ 上のグラフ全体の集合，φ は論理式とする．このとき，φ の漸近確率 (*asymptotic probability*) $P_n(\varphi)$ を次で定義する：

$$P_n(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{\mathcal{G} \in \mathbf{G}_n \mid \mathcal{G} \models \varphi\}|}{|\mathbf{G}_n|}$$

$\mathbf{G}_n$ からグラフ $\mathcal{G}$ が選ばれる確率は全て等しいと仮定すると，$P_n(\varphi)$ は，$\mathbf{G}_n$ からひとつグラフを選んだとき，それが φ を満たす確率に等しい．

このように定義された漸近確率に対し，次の定理が成り立つ．

定理 2 (0-1 法則 [7, 8])**.** 任意の閉論理式 φ に対し，次の性質が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 0 \text{ または } \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 1$$

一階述語論理が持つこの性質を *0-1* **法則**(0-1 law) と呼ぶ．

0-1 法則を証明する手法として，“ランダムグラフ”と呼ばれる可算無限構造による“転換定理”(transfer theorem) から 0-1 法則を示す手法がある [7]．この節の残りでは，ランダムグラフと転換定理について述べる．

定義 3 (拡張公理)**.** 性質“互いに共通部分の無い濃度 k の部分グラフ X, Y に対し，X, Y に含まれない頂点 z で，X の全ての要素と繋がっているが，Y の全ての要素と繋がっていないものが存在する”を表す (一階述語論理の) 論理式を σ_k と書く．

このように定義した σ_k に対し，次の命題が成り立つ．

命題 4. 次が成り立つ：

(1) $\{\sigma_k\}_{k\in\omega}$ は無矛盾である，

Date: 2007 年 10 月 31 日．

(2) $\{\sigma_k\}_{k\in\omega}$ は $\aleph_0$-範疇的 (よって，完全) である．

$\{\sigma_k\}_{k\in\omega}$ を満たす可算無限グラフは，同型を除いて一意に決まるので，この可算無限グラフを**ランダムグラフ** (the random graph) と呼び，$\mathcal{G}^r$ と書く．

定理 5 (転換定理 [7]). 任意の閉論理式 φ に対し、次が成り立つ:

$$\mathcal{G}^r \models \varphi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 1$$

証明 $k \in \omega$ とする．確率計算により，以下の等式と不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} P_n(\neg\sigma_k) &\le \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdot 2^{\binom{2k}{2}}\cdot 2^{\binom{n-2k}{2}}\cdot(2^{2k}-1)^{n-2k}}{2^{\binom{n}{2}}} \\ &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}(1-\frac{1}{2^{2k}})^{n-2k} \to 0 \end{aligned}$$

したがって，任意の $k \in \omega$ に対し $\lim_{n\to\infty} P_n(\sigma_k) = 1$ が成り立つ．

φ を論理式とする．上の等式から，次の関係成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^r \models \varphi &\Leftrightarrow \{\sigma_k\}_{k\in\omega} \vdash \varphi \quad (\because \{\sigma_k\}_{k\in\omega} \text{ は完全}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \omega.\, \sigma_k \vdash \varphi \\ &\Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} P_n(\sigma_k) \le \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) \end{aligned}$$

上の結果から，次の関係が成り立つ:

$$\mathcal{G}^r \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{G}^r \models \neg\varphi \Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} P_n(\neg\varphi) \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi)$$

□

転換定理から，0-1 法則が成り立つことが分かる．(転換定理による，0-1 法則の証明は Fagin により与えられた [7]．) さらに，この定理は，言語を $\{E\}$ から任意の関係言語 (relational language) 拡張しても，成り立つことが知られている．

集合 $\{\varphi \mid \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 1\}$ は "ほとんど全ての" 有限構造で成り立つ論理式全体であると言える．この集合と "全ての" 有限構造で成り立つ論理式全体の間には，次の大きな違いがある．

定理 6. (一階述語論理では) 以下の主張が成り立つ:

(1) 全ての有限構造で成り立つ論理式全体は帰納的枚挙可能ではない [14].

(2) 集合 $\{\varphi \mid \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 1\}$ は決定可能である (実は，*PSPACE*-完全 [10])．

証明 (2) のみ示す．定理 5 から，$\lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \{\sigma_k\}_{k\in\omega} \vdash \varphi$ がわかる．他方，一般に，完全な一階理論は決定可能である．したがって，$\{\sigma_k\}_{k\in\omega}$ は完全なので，決定可能である．以上の結果から，集合 $\{\varphi \mid \lim_{n\to\infty} P_n(\varphi) = 1\}$ は決定可能. □

この定理が示すように，一階述語論理では，有限構造に対する "恒真性" を調べることが決定可能でなくても，有限構造に対する "ほとんど恒真であること" は決定可能である．

2. 命題様相論理

本節では，様相論理の中でも，特に命題様相論理の構文と意味論を定義する．また命題様相論理の一階述語論理への埋め込みを提示し，ふたつの論理の関係を調べる．様相論理に関する文献には [2, 5, 16] などがある．

2.1. **命題様相論理.** 命題様相論理 (propositional modal logic) の論理式は、命題論理の演算子に**様相演算子** (modal operator) $\Box$ と $\Diamond$ を加えて得られる論理式であり、次のように定義される.

定義 7. Φ は集合とし, Φ の要素を命題変数 (*propositional variable*) と呼ぶ. 命題様相論理の論理式全体を次で定義する:

- Φ の任意の要素 p は論理式である.
- $\bot$ は論理式である.
- φ と ψ が論理式ならば $(\neg\varphi)$ と $(\varphi \wedge \psi)$ も論理式である.
- φ が論理式ならば $(\Box\varphi)$ は論理式である.

以下, 命題変数を $p, q, \ldots$ などで表す. また, 以下の省略形を用いる.

- $(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$
- $(\varphi \supset \psi) \stackrel{\text{def}}{=} ((\neg\varphi) \vee \psi)$
- $(\Diamond\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\neg(\Box(\neg\varphi)))$
- $(\varphi \equiv \psi) \stackrel{\text{def}}{=} ((\varphi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \varphi))$

さらに, 可読性を高めるために, 括弧“(”と“)”を適宜省略する. その際, 各演算子の結合の強さは以下の通りとする:

$$\{\neg, \Box, \Diamond\} > \{\wedge, \vee\} > \{\supset\}$$

例えば, $\Box\varphi \wedge \psi \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$ は論理式 $(((\Box\varphi) \wedge \psi) \supset (\Box(\varphi \wedge \psi)))$ の省略形である. 以後, φ, ψ などで論理式を表す.

次に, 命題様相論理の意味論を定義する. 命題様相論理に対しては, 代数意味論 (algebraic semantics) や neighborhood semantics (Scott-Montague semantics とも呼ばれる. 文献 [3]7 章参照) など, いくつかの意味論が知られているが, 今回はクリプキ意味論を用いて論理式の真偽を定義する. クリプキ意味論では, クリプキ・フレームと呼ばれる構造を基に論理式の真偽を決める.

定義 8. 空でない集合 $\mathcal{W}$ とその上の二項関係 $\mathcal{R}$ の組 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ をクリプキ・フレーム (*Kirpke frame*) と呼ぶ. また $\mathcal{F}$ をクリプキ・フレームとする. このとき, 函数 $\mathcal{V}\colon \Phi \to \wp(\mathcal{W})$ を ($\mathcal{F}$ における) 付値 (*valuation*) と呼び, 組 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{V} \rangle$ のことをクリプキ構造 (*Kripke structure*) と呼ぶ.

以下, クリプキ・フレームを $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ などで, 付値を $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ などで, クリプキ構造を $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ などで, それぞれ表す. また $\mathcal{W}$ の要素は**可能世界** (possible world) または**状態** (state) と呼ばれる.

定義 9. $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ をクリプキ構造とし, さらに $w \in \mathcal{W}$ であるとする。また φ は論理式とする. このとき, 関係 $\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ を以下で定義する:

- $p \in \Phi$ のとき, $\mathcal{S}, w \Vdash p \stackrel{\text{def}}{\iff} w \in \mathcal{V}(p)$
- $\mathcal{S}, w \Vdash \bot$ は成り立たない
- $\mathcal{S}, w \Vdash \neg\varphi \stackrel{\text{def}}{\iff}$ ($\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ でない)
- $\mathcal{S}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{\iff}$ ($\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ かつ $\mathcal{S}, w \Vdash \psi$)
- $\mathcal{S}, w \Vdash \Box\varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall w' \in \mathcal{W}.\, w\mathcal{R}w' \Rightarrow \mathcal{S}, w' \Vdash \varphi)$

$\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ が成り立つとき,「論理式 φ はクリプキ構造 $\mathcal{S}$ において, 可能世界 w で**真である**」あるいは「論理式 φ はクリプキ構造 $\mathcal{S}$ において, 可能世界 w で**成り立つ**」と言う. また, $\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ が成り立たないとき, $\mathcal{S}, w \nVdash \varphi$ と書く.

上記のように直接，三項関係 $\Vdash$ を定義するのではなく，論理式全体から $\wp(\mathcal{W})$ への函数 $[\![-]\!]^{\mathcal{S}}$ を定義し，それを用いて上と同じ $\Vdash$ を定義する流儀もある．(ただし $\mathcal{S}=\langle\mathcal{W},\mathcal{R},\mathcal{V}\rangle$ はクリプキ構造とする) 函数 $[\![-]\!]^{\mathcal{S}}$ は以下のように定義される:

- 任意の $p\in\Phi$ に対し $[\![p]\!]^{\mathcal{S}}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{V}(P)$
- $[\![\bot]\!]^{\mathcal{S}}\overset{\text{def}}{=}\emptyset$
- $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{S}}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{W}\setminus[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$
- $[\![\varphi\wedge\psi]\!]^{\mathcal{S}}\overset{\text{def}}{=}[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}\cap[\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}$
- $[\![\Box\varphi]\!]^{\mathcal{S}}\overset{\text{def}}{=}\{\,w\in\mathcal{W}\mid\forall w'\in\mathcal{W}.\,w\mathcal{R}w'\Rightarrow w'\in[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}\,\}$

このとき，$\mathcal{S},w\Vdash'\varphi\ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ w\in[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$ により $\Vdash'$ を定義すると、$\Vdash'$ は前出の $\Vdash$ と一致する．

定義 9 で定義した「論理式があるクリプキ構造において，ある可能世界で成り立つこと」を用いて，論理式がクリプキ構造 (またはクリプキ・フレーム) で常に成り立つことを定義する．

定義 10. $\mathcal{S}=\langle\mathcal{W},\mathcal{R},\mathcal{V}\rangle$ はクリプキ構造とする．任意の $w\in\mathcal{S}$ に対し $\mathcal{S},w\Vdash\varphi$ が成り立つとき $\mathcal{S}\Vdash\varphi$ と書くことにする．また $\mathcal{S}\Vdash\varphi$ が成り立つとき，論理式 φ はクリプキ構造 $\mathcal{S}$ で恒真であるという．(構造恒真性, *structure validity*)

$\mathcal{F}=\langle\mathcal{W},\mathcal{R}\rangle$ はクリプキ・フレームとする．$\mathcal{F}$ における任意の付値 $\mathcal{V}$ に対し $\langle\mathcal{F},\mathcal{V}\rangle\Vdash\varphi$ が成り立つとき $\mathcal{F}\Vdash\varphi$ と書くことにする．また $\mathcal{F}\Vdash\varphi$ が成り立つとき，論理式 φ はクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ で恒真であるという．(フレーム恒真性, *frame validity*)

さらに，任意のクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F}\Vdash\varphi$ が成り立つとき $\Vdash\varphi$ と書くことにする．また $\Vdash\varphi$ が成り立つとき，論理式 φ は恒真であるという．(恒真性, *validity*)

次節では，構造恒真性とフレーム恒真性を用いて，命題様相論理における 0-1 法則を定義する．すなわち，一階述語論理の 0-1 法則が基づいていた「(一階述語論理の) 構造で (一階述語論理の) 論理式が成り立つ」という性質の代わりに，「クリプキ構造で (命題様相論理の) 論理式が恒真である」という性質と，「クリプキ・フレームで (命題様相論理の) 論理式が恒真である」という性質を用いて命題様相論理の 0-1 法則をふたつ定義する．

2.2. 標準翻訳. 前項では，一階述語論理とは無関係に，命題様相論理の構文と意味論を定義した．しかし，命題様相論理の論理式と一階述語論理の論理式の間には，標準翻訳 (standard translation) と呼ばれる翻訳があることが知られている [15]．さらに，標準翻訳により，命題様相論理を一階述語論理に埋め込めることが知られている．本項では，標準翻訳を定義し，命題様相論理の一階述語論理への埋め込み定理を証明する．

定義 11. 命題変数の集合 Φ に対し，(一階述語論理の) 一変数述語記号の集合 $\{\,P\mid p\in\Phi\}$ と二変数述語記号 R を合わせた語彙を σ_Φ と書くことにする．x を一階述語論理の変数記号とするとき，命題様相論理の論理式全体から一階述語論理の σ_Φ-論理式全体への写像 ST_x を次で定義する：

- 任意の $p\in\Phi$ に対し，$ST_x(p)\overset{\text{def}}{=}P(x)$
- $ST_x(\bot)\overset{\text{def}}{=}x\neq x$
- $ST_x(\neg\varphi)\overset{\text{def}}{=}\neg ST_x(\varphi)$
- $ST_x(\varphi\wedge\psi)\overset{\text{def}}{=}ST_x(\varphi)\wedge ST_x(\psi)$
- $ST_x(\Box\varphi)\overset{\text{def}}{=}\forall y.\,R(x,y)\supset ST_y(\varphi)$

命題様相論理の任意の論理式 φ に対し，$ST_x(\varphi)$ は一階述語論理の論理式であり，さらに唯ひとつの自由変数 x を持つ．

命題様相論理の論理式から一階述語論理の論理式への翻訳 ST_x に続き，クリプキ構造 $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ を一階述語論理の σ_Φ-構造へ翻訳したもの $\langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle$ を次のように決める:

- 任意の $p \in \Phi$ に対し $P^{\mathcal{S}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}(p)\,(\subseteq \mathcal{W})$
- $R^{\mathcal{S}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{R}\,(\subseteq \mathcal{W}^2)$

以上のように論理式とクリプキ構造の翻訳を定義すると，次の定理が成り立つ．

定理 12. $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ はクリプキ構造，φ は命題様相論理の論理式とする．また $w \in \mathcal{W}$ であるとする．このとき，下の関係が成り立つ：

$$\mathcal{S}, w \Vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models ST_x(\varphi)[w/x]$$

証明 論理式 φ の構成に関する帰納法で証明する．φ が $\Box\psi$ の形のときのみ示す．

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S}, w \Vdash \Box\psi \\
\Leftrightarrow\quad & \forall w' \in \mathcal{W}.\, w\mathcal{R}w' \Rightarrow \mathcal{S}, w' \Vdash \psi \\
\Leftrightarrow\quad & \forall w' \in \mathcal{W}.\, ((w, w') \in R^{\mathcal{S}}) \Rightarrow (\langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models ST_y(\psi)[w'/y]) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall w' \in \mathcal{W}.\, \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models (R(x,y)[w/x][w'/y]) \supset (ST_y(\psi)[w'/y]) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall w' \in \mathcal{W}.\, \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models (R(x,y) \supset ST_y(\psi))[w/x][w'/y] \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models (\forall y.\, R(x,y) \supset ST_y(\psi))[w/x] \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models ST_x(\Box\psi)[w/x]
\end{aligned}$$

□

定理 12 から，次の系が導かれる．

系 13. $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ はクリプキ構造，φ は命題様相論理の論理式とする．このとき，以下の関係が成り立つ：

(1) $\mathcal{S} \Vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x.\, ST_x(\varphi)$

(2) $\mathcal{F} \Vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \langle \mathcal{W}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models \forall P_1 \ldots P_n. \forall x.\, ST_x(\varphi)$

ただし $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$，$P_1, \ldots, P_n$ は $ST_x(\varphi)$ に自由に出現する一変数述語全体とする．

証明 (1) は定理 12 と構造恒真性の定義から，(2) は定理 12 とフレーム恒真性の定義から，それぞれ導かれる． □

3. 命題様相論理における 0-1 法則

文献 [11] にあるように，命題様相論理では，構造恒真性に関する 0-1 法則と，フレーム恒真性に関する 0-1 法則のふたつの 0-1 法則が研究されている．(文献 [11] に対しては，訂正 [12] が発表されている) 3.1 項では，これらふたつの 0-1 法則を定義し，構造恒真性に関する 0-1 法則が成り立つことを示す．3.2 項では，フレーム恒真性に関する 0-1 法則に関するふたつの結果について述べる．ひとつ目の結果として，ランダム クリプキ・フレームの定義を与え，ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを示す [9]．ふたつ目の結果として，フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないという結果 [1] を紹介する．

3.1. **命題様相論理におけるふたつの 0-1 法則.** $\mathbb{F}_n$ は $\mathcal{W} = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるクリプキ・フレーム $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ 全体を表わし，$\mathbb{S}_n$ は $\mathcal{W} = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるクリプキ構造 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ 全体を表すとする．

定義 14. φ は命題様相論理の論理式，n は 1 以上の自然数とする．このとき，φ の構造恒真性に関する漸近確率 (*asymptotic probability*) $P_n^s(\varphi)$ を次で定義する：

$$P_n^s(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{\mathcal{S} \in \mathbb{S}_n \mid \mathcal{S} \Vdash \varphi\}|}{|\mathbb{S}_n|}$$

また，φ のフレーム恒真性に関する漸近確率 $P_n^f(\varphi)$ を次で定義する：

$$P_n^f(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_n \mid \mathcal{F} \Vdash \varphi\}|}{|\mathbb{F}_n|}$$

$P_n^s(\varphi)$ は，$\mathbb{S}_n$ の中から各クリプキ構造を取り出す確率が全て等しいときに，取り出したクリプキ構造で φ が恒真である確率と等しい．同様に，$P_n^f(\varphi)$ は，$\mathbb{F}_n$ の中から各クリプキ・フレームを取り出す確率が全て等しいときに，取り出したクリプキ・フレームで φ が恒真である確率と等しい．

命題 15 ([11]). 命題様相論理の任意の論理式 φ に対し，次の等式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} P_n^s(\varphi) = 1$$

すなわち，命題様相論理の構造恒真性に関する *0-1* 法則が成り立つ．

証明 $\hat{\mathbb{S}}_n$ は領域が $\{1, 2, \ldots, n\}$ である一階述語論理の σ_Φ-構造全体を表すとする．$\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle \in \mathbb{S}_n$ とすると，σ_Φ-構造 $\langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle$ は $\hat{\mathbb{S}}_n$ の要素である．さらに，系 13 から次の関係が成り立つ：

$$\mathcal{S} \Vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p\in\Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x.\, ST_x(\varphi)$$

上の関係が成り立つことと，$\mathbb{S}_n$ と $\hat{\mathbb{S}}_n$ の間に自然な全単射が存在することから，次の等式が成り立つ：

$$\frac{|\{\mathcal{S} \in \mathbb{S}_n \mid \mathcal{S} \Vdash \varphi\}|}{|\mathbb{S}_n|} = \frac{|\{\mathcal{A} \in \hat{\mathbb{S}}_n \mid \mathcal{A} \models \forall x.\, ST_x(\varphi)\}|}{|\hat{\mathbb{S}}_n|}$$

上の等式と，述語記号のみを持つ一階述語論理で 0-1 法則が成り立つことから，$\lim_{n\to\infty} P_n^s(\varphi) = 1$ が成り立つ． □

$\hat{\mathbb{F}}_n$ を領域が $\{1, 2, \ldots, n\}$ である一階述語論理の $\{R\}$-構造全体とする．(R は語彙 σ_Φ に含まれる唯一の二変数述語記号) このとき，クリプキ・フレーム $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ を，$R^{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}$ をであるような一階述語論理の $\{R\}$-構造 $\langle \mathcal{W}, R^{\mathcal{R}} \rangle$ に対応させる写像は，$\mathbb{F}_n$ と $\hat{\mathbb{F}}_n$ の間の自然な全単射になる．このことと，系 13 から，次の事実が成り立つ．

事実 16 ([11]). 命題様相論理の任意の論理式 φ に対し，次の等式が成り立つ：

$$\frac{|\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_n \mid \mathcal{F} \Vdash \varphi\}|}{|\mathbb{F}_n|} = \frac{|\{\mathcal{A} \in \hat{\mathbb{F}}_n \mid \mathcal{A} \models \forall P_1, \ldots, P_m. \forall x.\, ST_x(\varphi)\}|}{|\hat{\mathbb{F}}_n|}$$

ただし $P_1, \ldots, P_m$ は $\forall x.\, ST_x(\varphi)$ に自由に出現する一変数述語記号全体とする．

$\forall P_1, \ldots, P_m. \forall x.\, ST_x(\varphi)$ は一階述語論理の論理式ではないので，命題様相論理のフレーム恒真性に関する 0-1 法則を，一階述語論理で 0-1 法則が成り立つという事実から導くことはできない．

3.2. **ランダム クリプキ・フレーム.** 一階述語論理では，ランダムグラフによる転換定理を用いて，0-1 法則を示すことが出来た [7]. この項では，“ランダム クリプキ・フレーム”を定義し，ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを示す [9]. さらに，フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないことを紹介する [1].

定義 17. • 次の形の論理式を拡張公理(*extension axiom*) と呼ぶ：

$$\forall\bar{x}\exists y(\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j \to \quad (\bigwedge_{i\in[n]} x_i \neq y \wedge T(y,y) \wedge \bigwedge_{i\in I} R(x_i,y) \wedge$$
$$\bigwedge_{i\in[n]-I} \neg R(x_i,y) \wedge \bigwedge_{i\in J} R(y,x_i) \wedge \bigwedge_{j\in[n]-J} \neg R(y,x_j)))$$

ただし，$\bar{x} = x_1 \dots x_n$ で，$T(y,y)$ は論理式 $R(y,y)$ または $\neg R(y,y)$ を表す．さらに，$[n] = \{1,2,\dots,n\}$ かつ $I,J \subseteq [n]$ であるとする．

- $\theta_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge\{$ 高々 k-個以下の変数だけを含む拡張公理 $\}$
- $EXT \stackrel{\text{def}}{=}$ 拡張公理全体のなす集合

一階述語論理におけるランダムグラフ同様，次の主張が成り立つ。

事実 18. 次が成り立つ：

(1) 任意の自然数 $k \geq 1$ に対し $\lim_{n\to\infty} P_n(\theta_k) = 1$

(2) 理論 EXT は $\aleph_0$-範疇的 ($\aleph_0$-*categorical*)，したがって完全 (*complete*)

事実 18 により，理論 EXT の可算モデルは同型を除いて一意に決まる．他方，一階述語論理の $\{R\}$-構造全体とクリプキ・フレーム全体の間には，自然な対応が存在するので，この可算モデルはクリプキ・フレームと同一視できる．そこで，この可算無限モデルを**ランダム クリプキ・フレーム** (the random Kripke frame) と呼び，$\mathcal{F}^r = \langle \mathcal{W}^r, \mathcal{R}^r\rangle$ で表す．また，$\mathcal{F}^r$ に対応する $\{R\}$-構造を $\langle \mathcal{W}^r, R^r\rangle$ で表す．

ここから，ランダム クリプキ・フレーム $\mathcal{F}^r$ による転換定理について述べる．すなわち，命題論理の任意の論理式 φ に対し，次の主張が成り立つか否かを調べる:

$$\mathcal{F}^r \Vdash \varphi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P_n^f(\varphi) = 1 \quad (\dagger)$$

最初に，命題論理の任意の論理式 φ に対し $\mathcal{F}^r \Vdash \varphi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n^f(\varphi) = 1$ が成り立つことを示す．そのために，次の補題を示す．

補題 19 ([13]). 任意の Π^1_1-閉論理式 φ に対し，次が成り立つ：

$$\langle \mathcal{W}^r, R^r\rangle \models \varphi \Leftrightarrow \exists k \in \omega. \theta_k \vdash \varphi$$

したがって，上の条件を満たす Π^1_1-閉論理式 φ は $\lim_{n\to\infty} P_n^f(\varphi) = 1$ を満たす．

証明 ($\Leftarrow$) は $\langle \mathcal{W}^r, R^r\rangle$ の定義から明らか．

($\Rightarrow$) φ は Π^1_1-閉論理式とする．すなわち，一変数述語記号の有限列 $P_1 \dots P_m$ と一階述語論理の論理式 ψ が存在して，$\varphi \equiv \forall P_1 \dots P_m.\psi$ となっているとする．さらに，任意の $k \in \omega$ に対し $\nvdash \theta_k \supset \forall P_1 \dots P_m.\psi$ であると仮定する．$P_1 \dots P_m$ が θ_k 現れないことに注意すると，$\nvdash \theta_k \supset \psi$ となる．したがって，集合 $\{\theta_k, \neg\psi\}$ は無矛盾である．θ_k, ψ は一階述語論理の論理式なので，コンパクト性定理から，$\{\theta_k\}_{k\in\omega} \cup \{\neg\psi\}$ も無矛盾である．したがって，$\{\theta_k\}_{k\in\omega} \cup \{\neg\psi\}$ の可算モデル $\mathcal{F}$ が存在する．また，$\{\theta_k\}_{k\in\omega}$ は $\aleph_0$-範疇的なので，$\mathcal{F}$ は $\langle \mathcal{W}^r, R^r\rangle$ の $\{P_1 \dots P_m\}$-拡張 (expansion) になる．よって，$\langle \mathcal{W}^r, R^r\rangle \not\models \forall P_1 \dots P_m.\psi$ が成り立つ． □

この補題から，次の命題が証明される．

命題 20. 命題様相論理の任意の論理式 φ に対し、以下の関係が成り立つ：

$$\mathcal{F}^r \Vdash \varphi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n^f(\varphi) = 1$$

証明 φ は命題論理の論理式とする．このとき，以下の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{W}^r, \mathcal{R}^r \rangle \Vdash \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle \models \forall P_1, \ldots, P_m \forall x.\, ST_x(\varphi) \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_n(\forall P_1, \ldots, P_m \forall x.\, ST_x(\varphi)) = 1 \quad (\because \text{補題 19}) \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_n^f(\varphi) = 1 \quad (\because \text{事実 16})
\end{aligned}$$

□

以下では，クリプキ・フレーム $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ と一階述語論理の論理式 φ に対し，$\mathcal{F}$ に対応する一階述語論理の $\{R\}$-構造 $\langle \mathcal{W}, R^{\mathcal{R}} \rangle$ で $\langle \mathcal{W}, R^{\mathcal{R}} \rangle \models \varphi$ が成り立つとき，$\mathcal{F} \models \varphi$ と書くことにする．

ここから，命題様相論理の論理式 φ で $\lim_{n\to\infty} P_n^f(\varphi) = 1$ かつ $\mathcal{F}^r \nVdash \varphi$ となるものを具体的に提示する．すなわち，ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを示す．

準備として，命題様相論理に，新たな記号 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{A}$ を加えて拡張した論理 $\mathcal{L}$ を以下のように定義する．

定義 21. 論理 $\mathcal{L}$ の論理式を以下のように定義する：

- 命題様相論理の論理式は，$\mathcal{L}$ の論理式，
- φ が $\mathcal{L}$ の論理式ならば，$\mathbf{E}\varphi$ は $\mathcal{L}$ の論理式，
- φ が $\mathcal{L}$ の論理式ならば，$\mathbf{A}\varphi$ は $\mathcal{L}$ の論理式．

$\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ はクリプキ構造とし，$w \in \mathcal{W}$ であるとする．このとき，$\mathcal{L}$ の論理式 φ に対し，関係 $\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ を以下のように定義する：

- $\mathcal{S}, w \Vdash \mathbf{E}\varphi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある $w' \in \mathcal{W}$ が存在して $\mathcal{S}, w' \Vdash \varphi$
- $\mathcal{S}, w \Vdash \mathbf{A}\varphi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $w' \in \mathcal{W}$ に対し $\mathcal{S}, w' \Vdash \varphi$
- 上の形以外の $\mathcal{L}$ の論理式に対しては，命題様相論理のときと同様に定義する．

このように定義された論理式 $\mathbf{E}\varphi$ と $\mathbf{A}\psi$ に関し，次の注意を記す．

注意 22. 次が成り立つ：

- $\mathcal{F}^r \models \theta_3$
- 任意のクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F} \models \theta_3 \Rightarrow \mathcal{F} \Vdash \mathbf{E}p \equiv \Diamond\Diamond p$,
- $\mathcal{F}^r \Vdash \mathbf{E}p \equiv \Diamond\Diamond p$ (同様に $\mathcal{F}^r \Vdash \mathbf{A}p \equiv \Box\Box p$)

したがって，θ_3 が成り立つクリプキ・フレームでは，$\mathcal{L}$ の論理式 $\mathbf{E}\varphi$ は，命題様相論理の論理式 $\Diamond\Diamond\varphi$ の略記であると考えられる．以下の議論では，θ_3 を満たすクリプキ・フレームのみを考えるので，定義 21 のように命題様相論理を拡張するのではなく，$\mathbf{E}\varphi$ は $\Diamond\Diamond\varphi$ の略記であるする．同様に $\mathbf{A}\varphi$ は $\Box\Box\varphi$ の略記であるとする．

ここから，ランダム クリプキ・フレームによる転換定理の反例のアイディアである“ 対核 ”を定義する．

定義 23. $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ はクリプキ・フレーム，A は $\mathcal{W}$ の空でない部分集合とする．

- A の任意の要素 x, y に対し $(x, y) \notin \mathcal{R}$ となるとき，A は独立(*independent*)であるという．
- A が独立で，さらに，以下の条件を満たす A の部分集合 A_1 と A_2 が存在するとき，A は対核(*double kernel*) と呼ばれる：

- $A = A_1 \cup A_2$
- 任意の要素 $x \in \mathcal{W} - A$ に対し，要素 $y_1 \in A_1$ が存在し，$(x, y_1) \in \mathcal{R}$
- 任意の要素 $x \in \mathcal{W} - A$ に対し，要素 $y_2 \in A_2$ が存在し，$(x, y_2) \in \mathcal{R}$

また，次の論理式の省略形を用いる：

$$\text{NO-DKER} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box\neg p \vee \Box\neg q))$$

ただし p, q は命題変数とする．

ここから，$\mathcal{F}^r \not\Vdash$ NO-DKER が成り立つことを示す．先ずは，この主張を示すために，いくつかの定義と命題を用意する．

定義 24. $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ はクリプキ・フレームとする．可能世界 $w \in \mathcal{W}$ が，任意の可能世界 $w' \in \mathcal{W}$ に対し $(w, w'), (w', w) \in \mathcal{R}$ を満たすとき，w は $\mathcal{F}$ の中央点(*central point*) であるという．

定義 25. $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ と $\mathcal{F}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}' \rangle$ はクリプキ・フレームとする．$\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}'$ への写像 f で，以下の条件を満たすものを p-モルフィズム (p-*morphism*) と呼ぶ：

(1) $\forall w, x \in \mathcal{W}. ((w, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (f(w), f(x)) \in \mathcal{R}')$,
(2) $\forall w \in \mathcal{W}. \forall x' \in \mathcal{W}'. (f(w), x') \in \mathcal{R}' \Rightarrow \exists x \in \mathcal{W}. f(x) = x'$ かつ $(w, x) \in \mathcal{R}$.

証明は省略させていただくが，以下の補題が成り立つ．

補題 26. $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ は有限クリプキ・フレームとする．以下は同値：

(1) $\mathcal{F}$ は中央点を持つ
(2) $\mathcal{F}^r$ から $\mathcal{F}$ への p-モルフィズムが存在する

$\mathcal{F}_3$ は有限クリプキ・フレーム $\langle \{x, y_1, y_2\}, \{(x, x), (x, y_1), (x, y_2), (y_1, x), (y_2, x)\} \rangle$ の略記とする．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 27 ([9])**.** $\mathcal{F}$ は，$\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす，クリプキ・フレームとする．このとき，以下の関係が成り立つ：

$$\mathcal{F} \text{ は対核を持つ} \Leftrightarrow \mathcal{F}_3 \text{ は } \mathcal{F} \text{ の } p\text{-モルフィズムによる像である}$$

特に，$\mathcal{F}^r$ は対核を持つ．

証明 $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ は，$\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす，クリプキ・フレームとする．

($\Rightarrow$) $\mathcal{F}$ は対核 $A = A_1 \cup A_2$ を持つとする．$\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}_3$ への写像 f を次のように定義する:

$$f(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & (w \in \mathcal{W} - A), \\ y_1 & (w \in A_1), \\ y_2 & (w \in A_2). \end{cases}$$

$\mathcal{F} \models \theta_3$ が成り立つことから，f が p-モルフィズムになることがわかる．

($\Leftarrow$) $\mathcal{F}_3$ は，p-モルフィズム f による，$\mathcal{F}$ の像であるとする．このとき，次の性質が成り立つ:

- $\forall w \in \mathcal{W} - (f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)). \exists w_1 \in f^{-1}(y_1). (w, w_1) \in \mathcal{R}$
- $\forall w \in \mathcal{W} - (f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)). \exists w_2 \in f^{-1}(y_2). (w, w_2) \in \mathcal{R}$

したがって，集合 $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ は $\mathcal{F}$ の対核である．

ここから，ふたつ目の主張を証明する．$\mathcal{F}_3$ は中央点を持つので，補題 26 から，$\mathcal{F}_3$ は $\mathcal{F}^r$ の p-モルフィズムによる像である．したがって，ひとつ目の主張から，$\mathcal{F}^r$ は対核を持つ．$\Box$

命題 28 ([9]). p, q は命題変数とする．$\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす，任意のクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ に対し，次の関係が成り立つ：

$$\mathcal{F} \not\Vdash \textit{NO-DKER} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ は対核を持つ}$$

証明 $\mathcal{F}$ は，$\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす，クリプキ・フレームとする．このとき，以下の関係が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{F} \not\Vdash \text{NO-DKER} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{F} \not\Vdash \mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box\neg p \vee \Box\neg q)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\mathcal{V}, \exists w \in \mathcal{W}. \mathcal{F}, \mathcal{V}, w \not\Vdash \mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box\neg p \vee \Box\neg q)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\mathcal{V}, \exists w \in \mathcal{W}. \mathcal{F}, \mathcal{V}, w \Vdash \neg(\mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box\neg p \vee \Box\neg q))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\mathcal{V}, \exists w \in \mathcal{W}. \mathcal{F}, \mathcal{V}, w \Vdash \mathbf{A}((p \vee q) \supset \neg\Diamond(p \vee q)) \wedge \mathbf{A}(\neg(p \vee q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\mathcal{V}. \mathcal{F}, \mathcal{V} \Vdash \mathbf{A}((p \vee q) \supset \neg\Diamond(p \vee q)) \wedge \mathbf{A}(\neg(p \vee q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\mathcal{V}. \mathcal{F} \text{ は対核 } \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q) \text{ を持つ} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{F} \text{ は対核を持つ}
\end{aligned}
$$

□

命題 27 と命題 28 から，$\mathcal{F}^r \not\Vdash$ NO-DKER が成り立つことが分かる．したがって，次の定理を示せば，NO-DKER が主張 (†) の反例であることが分かる．

定理 29 ([9]). $\lim_{n\to\infty} P_n^f(\textit{NO-DKER}) = 1$

証明 文献 [9] では，確率を具体的に計算して証明している．しかし，ここでは，証明を省略させていただく． □

以上の結果により，ランダムクリプキ・フレームによる，フレーム恒真に関する転換定理は成立しないことが示された．しかし，この事実だけからでは，フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないことが証明されたことにはならない．しかし，これらの結果が証明された後で，Le Bars により，フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないことが証明された．

定理 30 ([1]). p と q は命題変数とする．このとき，以下の極限は存在しない：

$$\lim_{n\to\infty} P_n^f(q \wedge \neg p \wedge \Box\Box((p \vee q) \supset \neg\Diamond(p \vee q)) \wedge \Box\Diamond p)$$

References

[1] Jean-Marie Le Bars. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. In *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS-02)*, pages 225–234, Los Alamitos, July 22–25 2002. IEEE Computer Society.

[2] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Number 53 in Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge, 2001.

[3] Brian F. Chellas. *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980.

[4] K. J. Compton. 0-1 laws in logic and combinatorics. In I. Rival, editor, *NATO Adv. Study Inst. on Algorithms and Order*, pages 353–383. D. Reidel, 1988.

[5] Max J. Cresswell and G. E. Hughes. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London, 1995.

[6] Heinz-Dieter Ebbinghaus and Jörg Flum. *Finite Model Theory Second Revised and Enlarged Edition 1999*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1999.

[7] R. Fagin. Probabilities on finite models. *jsl*, 41(1):50–58, 1976.

[8] Y. V. Glebskiĭ, D. I. Kogan, M. I. Liogon'kiĭ, and V. A. Talanov. Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus. *Kibernetika*, 2:17–28, 1969.

[9] Valentin Goranko and Bruce M. Kapron. The modal logic of the countable random frame. *Arch. Math. Log*, 42(3):221–243, 2003.

[10] E. Grandjean. Complexity of the first–order theory of almost all structures. *Information and Control*, 52:180–204, 1983.

[11] Joseph Y. Halpern and Bruce Kapron. Zero-one laws for modal logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 69(2–3):157–193, 14 October 1994.

[12] Joseph Y. Halpern and Bruce Kapron. Erratum to "zero-one laws for modal logic". *ANNALSPAL: Annals of Pure and Applied Logic*, 121, 2003.

[13] Phokion Kolaitis and Moshe Vardi. 0–1 laws and decision problems for fragments of second-order logic. *Information and Computation*, 87(1/2):301–337, July/August 1990.

[14] B. A. Trakhtenbrot. Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 70:569–572, 1950.

[15] Johan van Benthem. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Naples, 1983.

[16] 小野 寛晰. **情報科学における論理**. 情報数学セミナー. 日本評論社, 1994.

(池田 宏一郎) 法政大学

(岡本 圭史) 産業技術総合研究所