

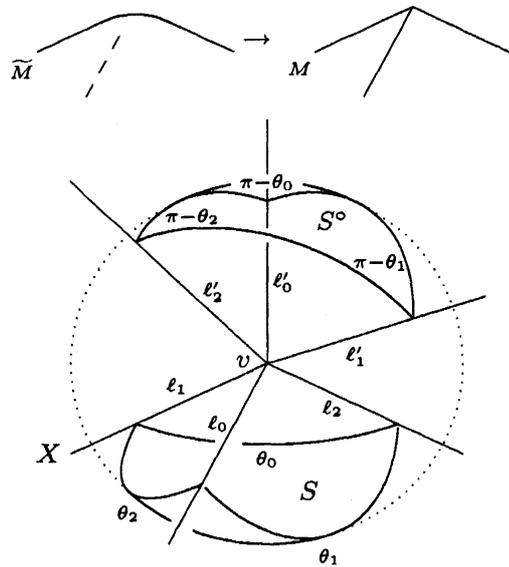
PL 多様体の本間の曲率の意味付け

SATÔ, Kenzi
佐藤 健治

ABSTRACT. 高次元 PL 多様体の曲率は 2 通り存在する (Banchoff と本間). それぞれにおいて Gauss-Bonnet の定理が成立し, 曲率の関係もある程度わかっている. Banchoff の曲率は Riemann 多様体の Gauss 曲率の極限としてとらえられるが, 本間の曲率の幾何学的意味は理解しにくい. 本稿ではそれを双対分割を用いて考察する.

2 次元 Gauss の驚異の定理と曲率の定義. コンパクトで境界を持たない PL 多様体 M^2 の頂点に対して Gauss 曲率を定める:

$$\begin{aligned} \kappa(\{v\}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lim_{\substack{\text{Riem.} \\ \text{mfd}}} \widetilde{M} \rightarrow M \int_{\substack{\text{small n.b.d.} \\ \text{at } v \text{ of } \widetilde{M}}} K d \text{Vol}_2(\widetilde{M})}{4\pi} = \\ & \left(= 2 \cdot \frac{S^\circ}{4\pi} \right) = 2 \cdot \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (\pi - \theta_i) - (m-2)\pi}{4\pi} = \\ \text{(B)} \quad & = 1 - \frac{1}{2} \cdot m + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\pi - \theta_i}{2\pi} = \\ \text{(H)} \quad & = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\theta_i}{2\pi}. \end{aligned}$$



$l_i \perp l'_j$ if $i \neq j$. ($m = 3$ の図)

ここで K は M に近づく Riemann 多様体 \widetilde{M}^2 の Gauss 曲率であり, () 内は $M = \partial X$ なる \mathbb{R}^3 内の凸多面体 X^3 が存在するときに意味を持つ ($m \geq 4$ のとき M を動かさずに X を動かせるが () 内の値は不変である. このことを Gauss 驚異の定理という). この曲率の高次元版は 2 通りある.

2 次元 Gauss-Bonnet の定理. Riemann 多様体と同様の式が成り立つ: $\sum_v \kappa(\{v\}) = \chi(M)$.

n 次元 Gauss の驚異の定理と Banchoff の曲率の定義. コンパクトで境界を持たない PL 多様体 M^n の頂点に対して κ の表現 (B) のように Banchoff の曲率を定める:

$$\begin{aligned} \kappa_B(\{v\}) &\stackrel{\text{def}}{=} (1 + (-1)^n) \cdot \frac{\lim_{\substack{\text{Riem.} \\ \text{mfd}}} \widetilde{M} \rightarrow M \int_{\substack{\text{small n.b.d.} \\ \text{at } v \text{ of } \widetilde{M}}} K d \text{Vol}_n(\widetilde{M})}{\text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)} - \delta_{0,n} = \\ & \left(= (1 + (-1)^n) \cdot \alpha^\circ(\{v\}, X) - \delta_{0,n} \right) = \sum_Q (-1)^{|Q|} \alpha^\circ(\{v\}, Q) - \delta_{0,n}. \end{aligned}$$

This is an abstract and the details will be published elsewhere.

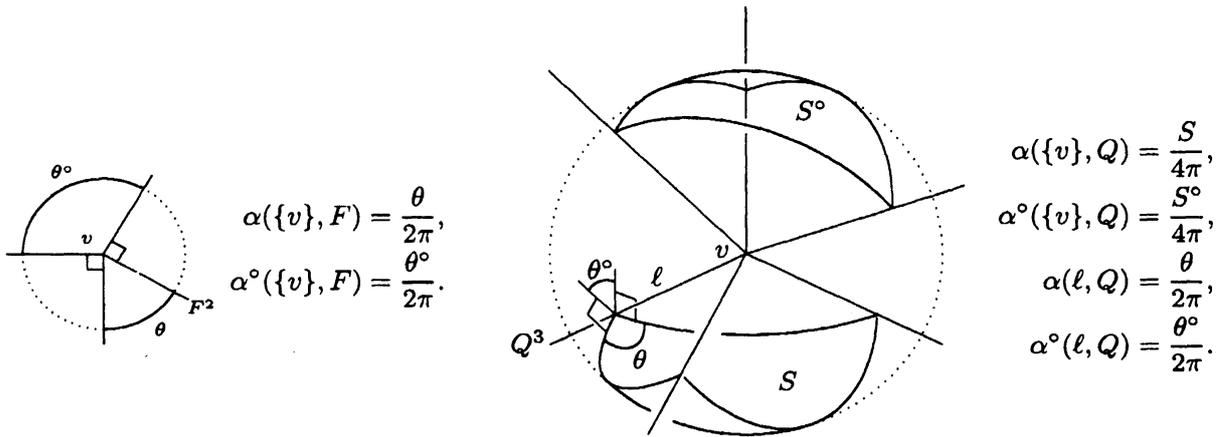
ここで K は M に近づく \widetilde{M}^n の Gauss-Kronecker 曲率であり, Q は M の全ての面を動き, α° は外角であり (下図参照, $v \notin Q$ のとき $\alpha^\circ(\{v\}, Q) = 0$ とする), $()$ 内は $M = \partial X$ なる \mathbb{R}^{n+1} 内の凸多面体 X^{n+1} が存在するときに意味を持ち, 後ろの Kronecker の δ は以下の κ_H との関係から付いている.

本間の曲率の定義. M の面に対して κ の表現 (H) のように本間の曲率を定める:

$$\kappa_H(R) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{P, |P|=n} \alpha(R, P).$$

ここで α は内角である (下図参照, $R \not\subseteq Q$ のとき $\alpha(R, Q) = 0$ とする). このとき $\alpha(Q^q, Q^q) = 1 (= \alpha^\circ(Q^q, Q^q))$, $\alpha(R^{q-1}, Q^q) = \frac{1}{2} (= \alpha^\circ(R^{q-1}, Q^q))$ より $\kappa_H(P^n) = 1 - 1 = 0$, $\kappa_H(P^{n-1}) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 0$.

内角 α と外角 α° の図.



n 次元 Gauss-Bonnet の定理. 2 通りの曲率はそれぞれ Gauss-Bonnet の定理を持つ.

$$\sum_v \kappa_B(\{v\}) = \sum_Q (-1)^{|Q|} \kappa_H(Q) = \begin{cases} \chi(M) & n \geq 1, \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

κ_B の拡張と 2 つの曲率の関係. κ_B を κ_H で表せる: $\kappa_B(\{v\}) = \sum_Q (-1)^{|Q|} \alpha^\circ(\{v\}, Q) \kappa_H(Q)$. 逆に κ_H を κ_B で表すために κ_B を拡張する. κ_H を表し直して,

$$\kappa_H(R) = \sum_Q \delta(R, Q) - \sum_{P, |P|=n} \alpha(R, P) \left(= \zeta(R, X) - \delta(R, X) - \sum_{P, |P|=n} \alpha(R, P) \right).$$

ここで $\delta(R, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } R = Q, \\ 0 & \text{if } R \neq Q, \end{cases}$ $\zeta(R, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } R \subseteq Q, \\ 0 & \text{if } R \not\subseteq Q. \end{cases}$ 同じ形に κ_B を頂点だけでなく全ての面について拡張する:

$$\kappa_B(R) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_Q \bar{\alpha}^\circ(R, Q) - \sum_{P, |P|=n} \delta(R, P) \left(= \alpha^\circ(R, X) - \bar{\alpha}^\circ(R, X) - \sum_{P, |P|=n} \delta(R, P) \right).$$

ここで $\bar{\alpha}^\circ(R, Q) = (-1)^{|Q|-|R|} \alpha^\circ(R, Q)$. このとき $\alpha^\circ = \bar{\alpha}^\circ \circ \zeta$, $\bar{\alpha}^\circ = \bar{\alpha}^\circ \circ \delta$, $\delta = \bar{\alpha}^\circ \circ \alpha$; $\alpha \circ \alpha^\circ = \zeta$, $\alpha \circ \bar{\alpha}^\circ = \delta$, $\alpha \circ \delta = \alpha$ (ただし $\gamma \circ \beta(S, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_R \gamma(S, R) \beta(R, Q)$ であり, これらは δ を単位元とする群を作る) より

$$\kappa_B(R) = \sum_Q \bar{\alpha}^\circ(R, Q) \kappa_H(Q); \quad \sum_Q \alpha(R, Q) \kappa_B(Q) = \kappa_H(R).$$

κ_H の幾何学的意味. 双対分割を考えると,

$$\alpha(R, Q)(\alpha^\circ(Q, X) - \overline{\alpha^\circ(Q, X)})$$

は, Q の双対 \hat{Q} の面 \hat{R} における法線ベクトルたちの積分を正規化したものに等しく, その Q についての和は全体なので 1 となる. 一方

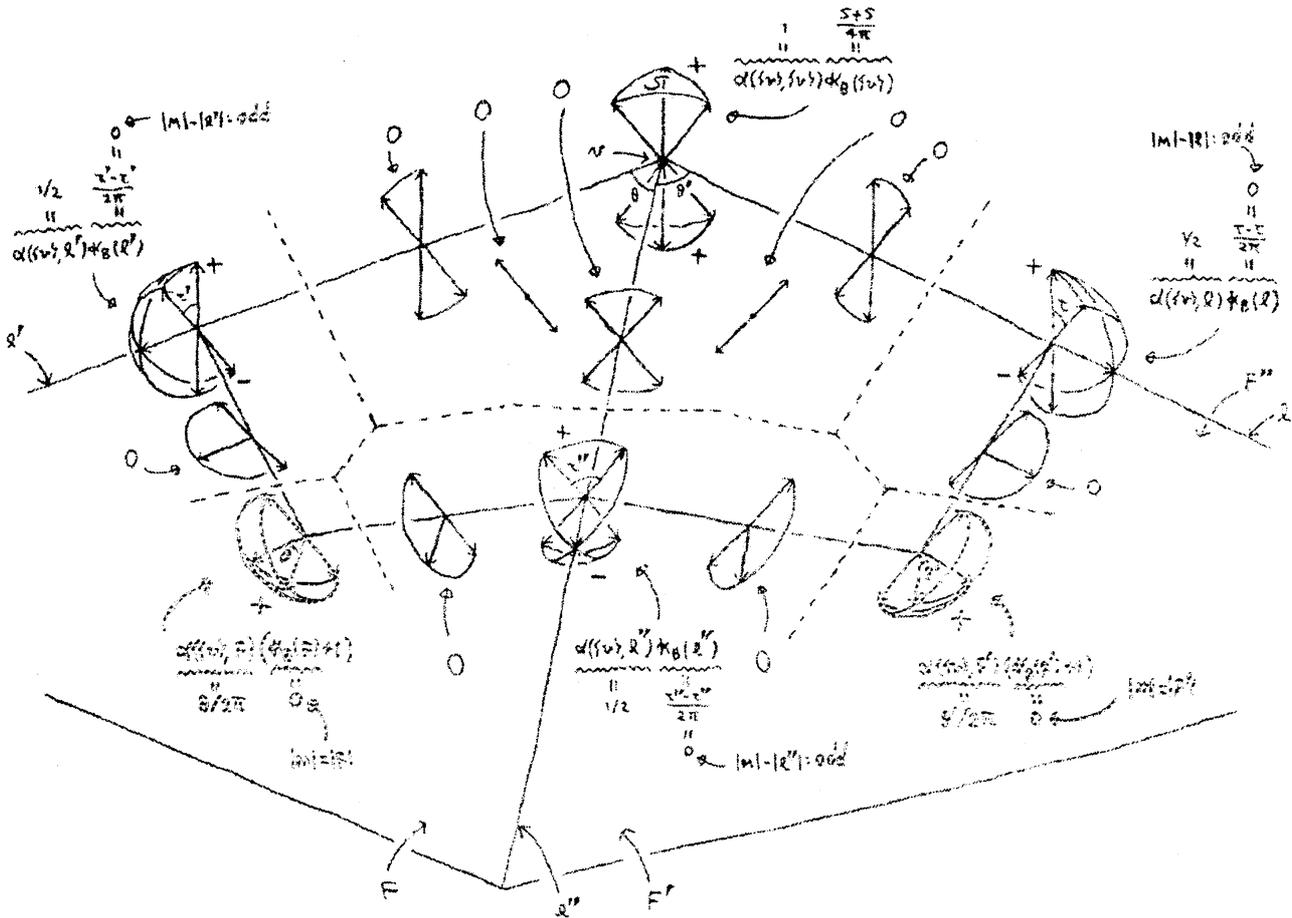
$$\alpha(R, Q)\kappa_B(Q) = \alpha(R, Q)(\alpha^\circ(Q, X) - \overline{\alpha^\circ(Q, X)}) - \sum_{|P|=n} \delta(Q, P)$$

は, $|Q| \leq n-1$ のとき上と等しく, $|Q| = n$ のとき 0 となる. よってその和 $\kappa_H(R)$ は法線ベクトル全体の積分値 1 から $|Q| = n$ なる Q の双対 (つまり $|\hat{Q}| = 0$ なる \hat{Q}) たちにおける法線ベクトルたちの積分を除いたものである.

その図. $n=2$ ($m=3$) のとき $\kappa_B(\{v\}) = \frac{S}{4\pi} - (-1)^3 \frac{S}{4\pi} - 0 = 2 \cdot \frac{S}{4\pi}$, $\kappa_B(\ell^1) = \frac{T}{2\pi} - (-1)^2 \frac{T}{2\pi} - 0 = 0$, $\kappa_B(F^2) = \frac{1}{2} - (-1)^{1\frac{1}{2}} - 1 = 0$ より下図では

$$\kappa_H(\{v\}) = \sum_Q \alpha(\{v\}, Q)\kappa_B(Q) = 1 \cdot \frac{2S}{4\pi} + \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) + \left(\frac{\theta}{2\pi} \cdot 0 + \frac{\theta'}{2\pi} \cdot 0 + \frac{\theta''}{2\pi} \cdot 0\right) = \frac{2S}{4\pi},$$

$$\kappa_H(\ell^1) = \sum_Q \alpha(\ell, Q)\kappa_B(Q) = 1 \cdot 0 + \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = 0, \quad \kappa_H(F^2) = \sum_Q \alpha(F, Q)\kappa_B(Q) = 1 \cdot 0 = 0.$$



SATŌ, Kenzi

LABORATORY OF MATHEMATICS, FACULTY OF ENGINEERING, TAMAGAWA UNIVERSITY
6-1-1, TAMAGAWA-GAKUEN, MACHIDA, TOKYO 194-8610, JAPAN
E-mail address: kenzi@eng.tamagawa.ac.jp