

# 合成代数とピタゴラスの定理の拡張

神谷 徳昭, 森 和好, (会津大学) 青木 洋人 (新潟県相川高校)  
Noriaki Kamiya, Kazuyoshi Mori, (Aizu Univ.), Hiroto Aoki (Aikawa High school)

概要: 4元数と8元数を用いた計算機アルゴリズムの研究結果です。つまり $2 \times 2$ 行列によって複素数, 4元数を導入し、三平方の定理(ピタゴラス)の拡張を自然数の範囲で求めることが目標です。これは筆者の一人神谷の研究分野である非結合的代数系の計算機への応用です。

## ——— 目標 ———

数学の内容を行列で理解する, 行列による数の拡張  
三平方の定理の拡張 計算機アルゴリズム

### § 1. 複素数の導入

教育的側面からの導入として、複素数を多面的に考察することからはじめます。

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \simeq a + ib \quad (a, b \in \mathbf{R}) \\ &= (a, b) \text{ (座標表示)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

$\det A = a^2 + b^2 = r^2$ , ただし  $r =$  点  $(a, b)$  と原点の距離、 $\tan \theta = \frac{b}{a}$ .

2次方程式と線形代数のケーリ、ハミルトンの定理の関係はあまり詳しい議論が行われていないのでここに1次独立、1次従属の観点から指摘します。2次方程式は体の範囲で $1, x, x^2$ が1次従属のときを解く方法です。しかし、これが代数環の要素として $x$ を考えて1次従属とするとまだ未解決の問題だと思えます。部分的には筆者たち(J. Alg, 2005)により解決しました。

### § 2. 線形代数との関係

行列(線形代数)の基本的な学習で次のことが知られています。

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  とすると、 $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)E = 0$  が成り立ちます。

従って、2次の行列全体がある代数系 $1, x, x^2$ が1次従属である集合(一般に2次代数と呼ばれる)の例であることが理解できます。これは線形代数のCayley-Hamilton定理の特別な場合です。

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ac - bd) & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & (ac - bd) \end{pmatrix}$$

これらの行列式を考えると

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

that is,  $n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ,  $ac - bd = x$ ,  $y = ad + bc$  とおくと

$$n^2 = x^2 + y^2$$

が成り立ちます。これは行列式とピタゴラスの定理が関連することを示しています。そして4元数, 8元数の場合も行列式の拡張が考えられますので、これらはノルムの概念すなわち内積の関係式と見ることができます。これらについて後述します。

### § 3. 複素数と $2 \times 2$ 行列の対応

複素数は  $2 \times 2$  行列と対応します。

$$x + iy \rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

(ただし  $x, y \in \mathbf{R}$ (実数)) によって複素数  $\mathbf{C}$  の同型対応(この概念の導入は高校までの範囲では簡単ではないですが)を与えると、複素数が四則演算で閉じているということと代数的に  $x^2 = -1$  の解を含む体であるということを用いずに、2次方程式の解の解法が可能です。以下このことについて簡単に述べます。

$x, y \in \mathbf{R}$  の時,  $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  とすると,  $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)E = 0$  の解を求めることが

$$z^2 + az + b = 0$$

なる2次方程式の解を求めることと同値です。つまり  $z = x + iy$ ,  $a = -\text{tr } A$ ,  $b = \det A$  とおくことから導くことができます。

結論: 2次方程式の解法を行列と関係ずけて研究・教育することが重要だということを認識されると考えます。

### § 4. 4元数と8元数代数

4元数の性質はノルムにより特徴づけられます。

$$\|x\|\|y\| = \|xy\|$$

ただし,  $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ ,  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x, x)$

ここで,  $18^2$  を平方数の和で表すことを例示します

『解』  $x = 3 + 3j$ ,  $y = 1 + i + 4j$  のとき

$$\|x\|^2 = (x, x) = (3 + 3j)(3 - 3j) = 18, \quad \|y\|^2 = (y, y) = (1 + i + 4j)(1 - i - 4j) = 18,$$

$$\|xy\|^2 = \|(3 + 3j)(1 + i + 4j)\|^2$$

$$= \|-9 + 3i - 3k + 15j\|^2 = 18^2$$

したがって

$$18^2 = 9^2 + 3^2 + 3^2 + 15^2$$

が成り立ちます

非結合的代数の8元数も同様の結果が成り立ちます次のような8元数のノルム(内積)の定理が存在します。

つまり

$$\begin{aligned} & \forall p, q, r, s, t, u, v, w \in \mathbf{R}, \\ & \forall P, Q, R, S, T, U, V, W \in \mathbf{R}, \\ & (P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 + T^2 + U^2 + V^2 + W^2) (p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2) \\ & = (Pp - Qq - Rr - Ss - Tt - Uu - Vv - Ww)^2 \\ & + (Pq + Qp + Rs - Sr + Tu - Ut - Vw + Wv)^2 \\ & + (Pr - Qs + Rp + Sq + Tv + Uw - Vt - Wu)^2 \\ & + (Ps + Qr - Rq + Sp + Tw - Uv + Vu - Wt)^2 \\ & + (Pt - Qu - Rv - Sw + Tp + Uq + Vr + Ws)^2 \\ & + (Pu + Qt - Rv + Sv - Tq + Up - Vs + Wr)^2 \\ & + (Pv + Qw + Rt - Su - Tr + Us + Vp - Wq)^2 \\ & + (Pw - Qv + Ru + St - Ts - Ur + Vq + Wp)^2 \end{aligned}$$

が成り立ちます

これらの概念は合成数という言葉で特徴できます。

### §5 まとめ 三平方の定理の拡張と具体例

4元数代数, 8元数代数において

$$\|xy\| = \|x\| \|y\| \quad (\text{that is, } (xy, xy) = (x, x)(y, y)) \quad (*)$$

が成り立ちます。(これは合成代数の定義でもあります)

合成代数は1, 2, 4, 8、次元が存在することが知られています。勿論これは複素数の数概念の一般化であり3平方の定理

$$c^2 = a^2 + b^2$$

の一般への拡張です。つまり、 $n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , です。

4平方、8平方の定理にあたる概念です。

(\*)を用いて具体的に以下の等式を満たす0以上の自然数の組(a, b, c, d)を計算機のプログラムで求めてみます。 $n = 100$ ,  $n = 30$  の場合です。

$$100^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

以下の別表に表記します(a, b, c, d)

$n = 100$ , (0, 0, 0, 100), (0, 0, 28, 96), (0, 0, 60, 80), (0, 36, 48, 80), (0, 48, 60, 64), (2, 2, 34, 94), (2, 10, 50, 86), (2, 14, 14, 98), (2, 14, 70, 70), (2, 22, 26, 94), (2, 22, 46, 86), (2, 26, 62, 74),

(2,34,38,86),(2,34,46,82),(2,34,58,74), (6,6,18,98),(6,6,62,78),(6,10,42,90),  
 (6,18,54,82),(6,42,46,78),(6,42,62,66), (8,8,64,76),(8,12,24,96),(8,16,44,88),  
 (8,20,56,80),(8,24,48,84),(8,32,56,76), (8,40,44,80),(8,52,56,64),(10,10,14,98),  
 (10,10,70,70),(10,26,50,82),(10,30,30,90), (10,30,54,78),(10,34,62,70),(10,50,50,70),  
 (12,24,64,72),(14,22,22,94),(14,22,62,74), (14,46,62,62),(16,16,32,92),(16,20,40,88),  
 (16,32,64,68),(18,26,30,90),(18,26,54,78), (18,54,54,62),(20,40,40,80),(22,26,38,86),  
 (22,26,46,82),(22,26,58,74),(22,46,50,70), (24,44,48,72),(26,34,38,82),(26,46,58,62),  
 (28,32,64,64),(30,30,46,78),(30,30,62,66), (32,40,40,76),(32,52,56,56),(34,34,62,62),  
 (34,38,50,70),(34,46,58,58),(34,50,50,62), (36,48,48,64),(40,40,52,64),(42,42,46,66),  
 (50,50,50,50).

$n = 30$ , (0,0,0,30),(0,0,18,24),(0,4,10,28), (0,4,20,22),(0,10,20,20),(1,1,13,27),  
 (1,3,7,29),(1,3,19,23),(1,7,11,27), (1,7,15,25),(1,9,17,23),(1,13,17,21),  
 (2,8,16,24),(3,3,21,21),(3,5,5,29), (3,9,9,27),(3,13,19,19),(3,15,15,21)  
 (4,6,8,28),(4,8,12,26),(4,12,16,22), (5,5,11,27),(5,5,15,25),(5,9,13,25),  
 (5,11,15,23),(5,15,17,19),(6,8,20,20), (6,12,12,24),(7,7,19,21),(7,11,17,21),  
 (8,8,14,24),(8,16,16,18),(9,11,13,23), (9,13,17,19),(10,12,16,20),(11,13,13,21),  
 (15,15,15,15)

この計算アルゴリズムは数が大きくなればなるほど計算機の必要が存在します。8元数の場合も同様な研究がありますのでそれはまた別な機会にと 생각합니다。

$n = 200$  のときも67個の組が存在します。数を大きくしますと時間がかかりますので、つまり、時間がかかる計算機のアルゴリズムなのでいろいろな数理代数学的な応用が今後考えられます。現在このアルゴリズムを改良した方法を数理科学者と考察しています。

## References

- 1] A.Elduque,N.Kamiya and S.Okubo,  $(-1, -1)$ -Balanced Freudenthal-Kantor triple systems and noncommutative Jordan algebras, J.Alg.(2005),vol.294,19-40
- 2] エビングハウス,ケッヘル 数上,下,スプリンガー
- 3] Schafer,Introduction to nonassociative algebras,Academic Press, New York, 1966.
- 4] 神谷, 非結合的代数系概論 2002,会津大学講義録
- 5] 神谷,  $2 \times 2$  行列による複素数の一考察, (数学教育学会 2005年3月) 日大理工, 数学教育学会春季年会論文集 208-210
- 6] N.Kamiya and S.Okubo, Composition, quadratic, and some triple systems, CRC press, A series of Lecture notes in Pure and App. Mathematics, vol.246,(2006) 205-231.