

## 勾配系を用いた点渦の安定配置の探索法

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

Department of Physics, Graduate School of Science  
University of Tokyo

### 1 はじめに

著者は多数の周期点渦の運動を研究してきた [1, 2, 3, 4]。一連の研究の過程で、まず、点渦の定常配置を求める事が、より簡単であるが自明でない問題であることに気がついた。点渦系はハミルトン系で表されるが、ハミルトニアンの変分を 0 にする配置が定常配置である。また、点渦のハミルトニアンは、流体の運動エネルギーに対する点渦の相対配置による寄与を意味する。点渦の個数が増えるとその配置は複雑になることが予想されるが、一方で、普遍的なパターンが現れることも期待できる。実際、1 種類の正方周期点渦系では  $N$  を増やすとパターンは正三角形に近づいてくるが、これは剛体円板を最も稠密に平面に配置する形が正三角形格子である事に関連している。

ハミルトニアンの変分が 0 である場合、ハミルトニアンはその配置で極小、極大あるいは（高次を含めた）鞍点のいずれかである。極大極小の場合は、定常解の十分近傍での線形解は準周期解であり、鞍点の場合の線形解は、安定多様体、不安定多様体を持つ指数的な漸近及び発散解を含む解である。一方、正方周期点渦のハミルトニアンは対角線上で相対距離が最も離れた位置で最小値を持つ。これらのことから、（少なくとも 1 つは存在する）ハミルトニアンの極小値を与える配置を求める事が点渦の安定配置を与えると考えられる。ここでいう安定性は線形の意味であり、非線形安定性については別の考察が必要である。

ある関数の最小値を求める問題は、応用数学の分野では一般に最適化問題と呼ばれている。点渦の定常配置を求める方法として、しばしばニュートン法が用いられているが、ハミルトン系に対応する勾配系を考え、その漸近解を数値的に求めることで、ハミルトン系の安定した定常配置を得ることもできる。例えば、周期点渦系では 2 体のハミルトニアンに最小値が存在するので  $N$  体のハミルトニアンにも最小値が存在することが示される。一方で勾配系による時間発展ではリアプノフ関数が時間とともに減少するので、十分時間が経過した後にはリアプノフ関数の極小値を与える配置に漸近すると考えられる。ここで、リアプノフ関数としてハミルトニアンと同じ関数を採用すれば、ハミルトン系である点渦の定常配置が漸近的に求められる。

以下、そのアイデアを簡単に説明し、勾配系が物理的意味を持つことを説明する。最後に、無限平面上での回転点渦系に対する安定した剛体回転配置の計算例を示す。無限平面上に同一点渦をばらまいた場合には、点渦が剛体回転する配置が可能であるので、一定の角速度で回転する回転系から点渦の運動を考え、その系での定常配置（＝慣性系から見た剛体回転配置）を考える。

なお、現時点で著者が知る、この方法で点渦の配置を計算した論文に [5] がある。円板内での点渦の回転パターンが同様の方法で計算されている。円板の場合は鏡像が存在するのでハミルトニアンは最小値を持たないが、剛体回転の角速度が十分大きい場合は、やはりハミルトニアンは極小値を持ち、この方法が適用可能である。勾配系の物理的な意味について言及されていない事や、勾配系の方法が点渦系に限らず、ある（多変数の複雑な）関数の極小値を求める汎用的な方法である事などを鑑み、本報文に勾配系の方法の基本的アイデアをまとめておく。

### 2 ハミルトン系と勾配系

連立常微分方程式系（いわゆる連続力学系、あるいは単に力学系）のうち、重要な力学的特徴を持つ系に、ハミルトン系と勾配系があげられる。ハミルトン系は、 $\{x_i(t), y_i(t)\}, i = 1, \dots, N$  の時間変化がハミル

トニアン  $H(x_i, y_i)$  を用いて

$$\left( \frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt} \right) = (u_H, v_H) = \left( \frac{\partial}{\partial y_i}, -\frac{\partial}{\partial x_i} \right) H \quad (1)$$

と表される系である。一方、勾配系は、 $\{x_i(t), y_i(t)\}, i = 1, \dots, N$  の時間変化がある関数  $L(x_i, y_i)$  (通常リアプノフ関数と呼ばれる) を用いて

$$\left( \frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt} \right) = (u_G, v_G) = \left( -\frac{\partial}{\partial x_i}, -\frac{\partial}{\partial y_i} \right) L \quad (2)$$

と表される。(通常は変数の取り方を  $x_i(t)$  だけにするのであるが、本報文では後の便宜のためにハミルトン系同様  $x_i(t), y_i(t)$  としておく。)

ハミルトン系では  $H$  が保存量であり、

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (3)$$

勾配系では  $L$  が時間の減少関数である。

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \right) \\ &= -\sum_i \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial L}{\partial y_i} \right)^2 \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

よって、もし最小値が存在する  $L$  に対してその勾配系の時間発展を追えば、 $L$  は一定値に漸近することが期待でき、その近づき方は通常の場合には指数的である。 $dL/dt = 0$  の配置は  $dx_i(t)/dt = dy_i(t)/dt = 0$  を与えるので定常配置である。ここで、 $L$  としてハミルトニアンと同じ関数形  $L = H$  を取れば、

$$(u_G, v_G) = (v_H, -u_H) \quad (5)$$

となり、ハミルトン系の定常配置が勾配系の定常配置と同じものになることがすぐに理解できる。

### 3 勾配系の物理的意味

同一の点渦系に対する勾配系は、物理的には点湧き出しの系である。実際、原点にある強さ  $2\pi$  の点渦による流れ関数は  $z = x + iy$  とすると、

$$\psi_1 = -\ln|z| = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad (6)$$

であり、速度ベクトルは

$$(u, v) = \left( -\frac{y}{|z|^2}, \frac{x}{|z|^2} \right) \quad (7)$$

であるのに対し、勾配系の速度ベクトルは

$$(u, v) = \left( \frac{x}{|z|^2}, \frac{y}{|z|^2} \right) \quad (8)$$

であり、これは原点にある点湧き出しによる速度場である。点渦や点湧き出しの位置が  $z = z_j$  であれば各項の  $z$  を  $z - z_j$  に変えればよい。また、系を原点を中心とする角速度 1 の回転系から見た場合に現れる剛体回転による流れ関数は

$$\psi_2 = \frac{|z|^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (9)$$

であり、速度ベクトルは

$$(u, v) = (y, -x) \quad (10)$$

であるのに対し、勾配系の速度ベクトルは

$$(u, v) = (-x, -y) \quad (11)$$

となり、これは原点を中心とする一様吸い込みによる速度場を与える。

本論文で主に考える剛体回転系 (角速度  $\Omega > 0$ ) での  $N$  個の点渦 (同一点渦、強さ  $2\pi$ 、位置  $z_j$ ) の運動に対するハミルトニアンは

$$H = - \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \ln |z_i - z_j| + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \quad (12)$$

である。これは渦対に対するハミルトニアン

$$H_{ij} = - \ln |z_i - z_j| + \frac{\Omega_p}{2} |z_i|^2 \quad (13)$$

(但し、 $\Omega_p = 2\Omega/[N(N-1)]$ ) の和で書ける。 $H_{ij}$  は  $|z| \rightarrow \infty$  で  $H_{ij} \rightarrow +\infty$  であり有限の大きさの  $|z|$  では下限を持つので全平面上で最小値を持つ関数である。よってその和である  $H$  も最小値を持つ。

この勾配系を物理系として考えるとき、ある点湧き出しは、他の点湧き出しによる速度と一様吸い込みによる速度の和で表される速度場で流されると記述される。2 個の点湧き出しが近いと、十分大きな反発する速度場を互いに与え合うので、それらは離れるように運動し、十分離れていると一様吸い込みの効果が効いて近づき始める。よって、どこかに釣り合う配置が存在し、そこに漸近するであろうというのが、勾配系の考え方である。

注意すべきことが一つある。本研究では同一の点渦系を勾配系により考察しているが、この考えは、同一符号であるが強さの異なる点渦の系には拡張できる。しかし、異符号の点渦が混在する系に拡張しようとして、左回りの点渦を点湧き出し、右回りの点渦を点吸い込みと変換すると、ハミルトニアンが最小値を持つ性質を破る。実際、2 つの点吸い込みが十分近づくと、互いにさらに近づく速度場を与えるのでこれは有限時間で位置が重なる崩壊現象 (collapse) をもたらししてしまう事が想像できる。よって本研究では、まず同一符号の点渦系を考える。

## 4 勾配系とニュートン法

今求めたい点渦の定常配置を与える式は非線形の連立方程式である。一般に用いられる連立方程式の解法であるニュートン法と勾配系の方法を 1 変数の場合で比較してみる。 $x = x_0$  を初期値として  $f(x) = 0$  の解を求める場合のニュートン法は、 $f(x)$  を  $x = x_0$  の周りでテイラー展開した 1 次の式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (14)$$

において、 $f(x) = 0$  とおいて  $x$  について解いた関係式

$$x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) \quad (15)$$

を繰り返して収束する解を見つける方法である。それに対して、勾配系の方法は、初期条件  $x = x_0$  に対して

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (16)$$

の解を数値的に解くものである。比較のために、最も簡単なオイラー法で 1 ステップ後 ( $\Delta t$  後) の解を表すと

$$x = x_0 + f(x_0)\Delta t \quad (17)$$

となり、ここで  $\Delta t = -1/f'(x_0)$  とおけばニュートン法の漸化式 (15) と一致する。

初期条件が十分真の解に近い場合に、その誤差を  $O(\epsilon)$  とすれば1ステップ後に  $O(\epsilon^2)$  となるという意味で、ニュートン法は2次収束である。但し、初期条件と真の解の間に  $f(x)$  の勾配の符号が変わるような場合には、ニュートン法が収束しないことがある。それに対して、勾配系の方法は、収束は遅いけれども解を与えるという特徴がある。連立方程式の場合は、ニュートン法ではヤコビアンを与える、あるいは何らかの方法で近似する必要があるが、勾配系では単に連立常微分方程式を数値計算するだけで解が求められる。

実際には、勾配系は位相空間内の体積が収縮する散逸系であるために、同じ個数の点渦系 [1] を計算してダイナミックな運動を見るよりもはるかに短い時間でほぼ定常解に漸近する。例えば、筆者のPCで100個の周期点渦の計算ではCPU時間で5日程度かかる計算が点湧き出しの系では2-3時間で終了するといった次第である。

## 5 無限平面上の回転系での数値計算

(12) に対する勾配系を、 $N$  を変化させて計算し、得られた漸近解を以下に示す。

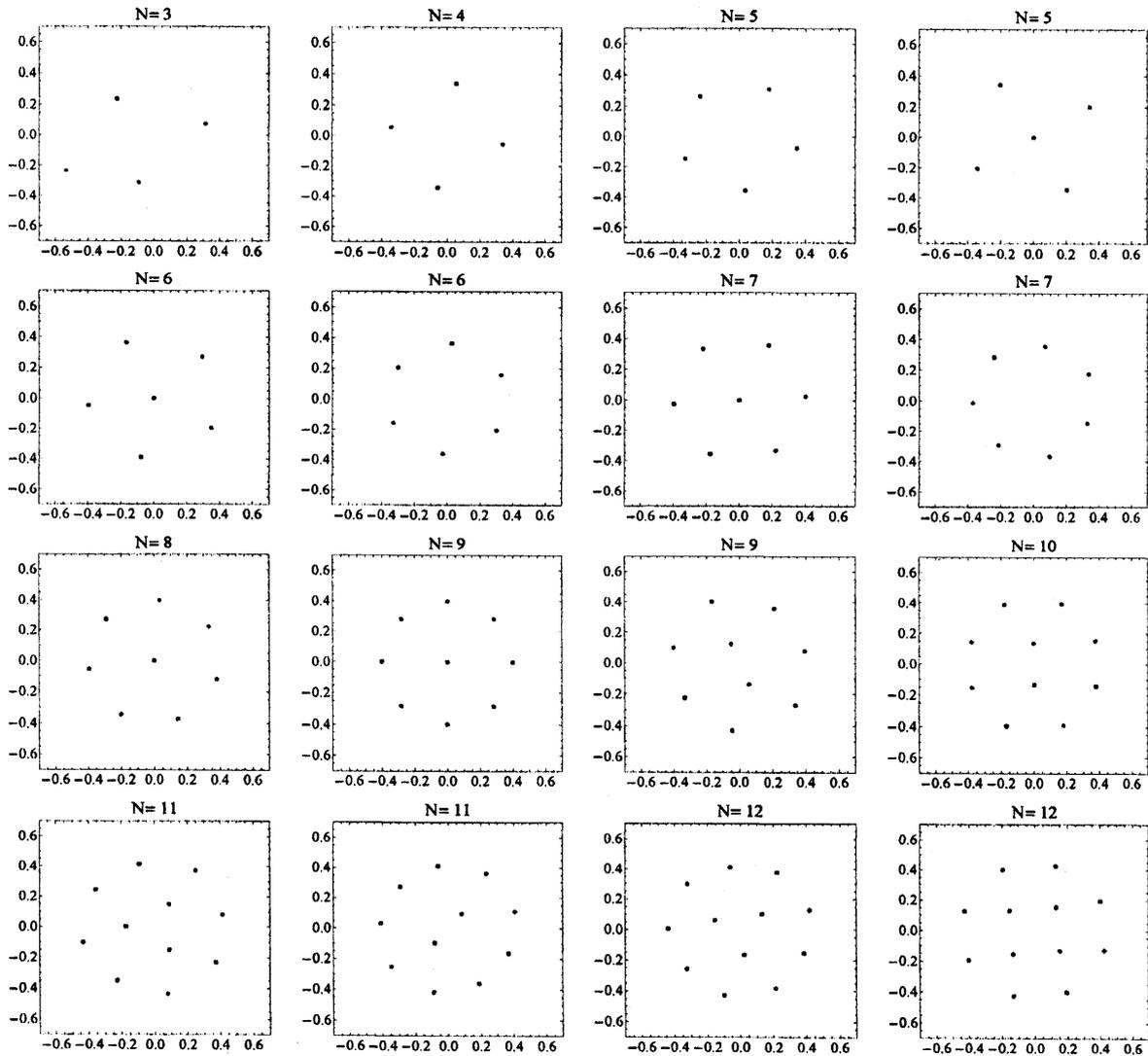


図 1: 無限平面上の回転系での数値計算により得られた点の配置。  $3 \leq N \leq 12$ 。

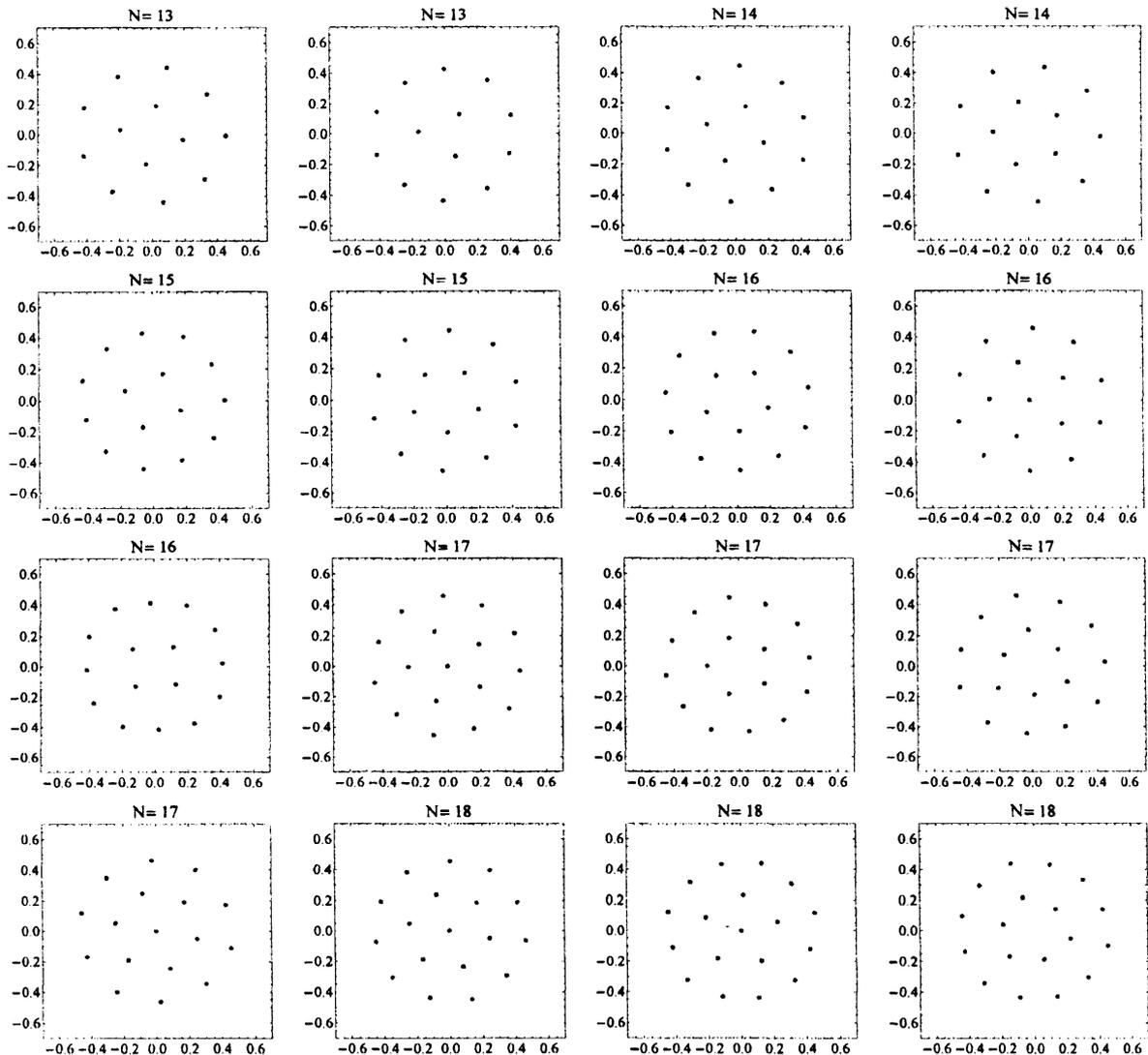


図 2: 無限平面上の回転系での数値計算により得られた点の配置。  $13 \leq N \leq 18$ 。

初期条件として辺の長さ 1 で原点中心の正方形内のランダム配置を取って、 $t=3$  まで計算した結果である。100 通りの計算を行い、異なるパターンをハミルトニアンと実際の配置の形から判別し、異なるパターンのみを図示している。数値計算には Windows Vista 64bit 版の Mathematica Ver.6 を用いている。計算では  $\Omega = \pi$  と置いているが、無限平面の場合は  $\Omega$  は規格化可能である。[5] では単位円内で回転する点渦の配置が同様の方法で計算されている。 $N$  が大きくなると、無限平板と単位円内では異なる配置が存在する。

正多角形パターンについては、微小攪乱に対して、 $N \leq 6$  は中立安定（すべての攪乱の成長率が 0 でない純虚数）であり、 $N = 7$  は成長率 0 をもつ中立安定、 $N \geq 8$  は線形不安定である事が知られている [6]。この事と、図 1 において  $N \leq 7$  までの正多角形パターンが得られたことは無矛盾で対応している。

パターンの表記として、内側のシェルから存在する点の個数を、原子核の電子配置に類似の表記で  $n_1 - n_2 - n_3 - \dots$  のように表すと便利である。表 1 に  $N = 18$  までの点渦パターンをこの表記で記しておく。

N	パターン	パターン	パターン	パターン
3	3 (3.9341)			
4	4 (7.9581)			
5	5 (13.563)	1-4 (13.833)		
6	1-5 (20.770)	6 (20.802)		
7	1-6 (29.344)	7 (29.711)		
8	1-7 (39.589)			
9	1-8 (51.528)	2-7 (51.600)		
10	2-8 (64.986)			
11	3-8 (80.034)	2-9 (80.074)		
12	3-9 (96.601)	4-8 (96.757)		
13	4-9 (114.857)	3-10 (114.879)		
14	4-10 (134.642)	5-9 (134.831)		
15	4-11 (156.139)	5-10 (156.152)		
16	5-11 (179.176)	1-5-10 (179.321)	4-12(179.355)	
17	1-5-11 (203.906)	5-12 (203.916)	6-11 (203.971)	1-6-10(204.019)
18	1-6-11 (230.155)	1-5-12 (230.185)	6-12 (230.253)	

表 1: 勾配系の方法により得られた回転点渦のパターン。カッコ内はハミルトニアン値。複数得られた場合は左からハミルトニアン値の小さい順に並べている。

## 6 まとめと謝辞

ハミルトン系の定常解を求めるのに勾配系の方法が有効であることについて簡単な解説を述べ、例として、無限平面上の回転系からみた  $N$  個の同一点渦の定常配置のカタログを示した。点渦系に限らず、勾配系の方法は汎用的であり、解析的に解けると思えないような複雑な系など、ある種の最適化問題の解を数値的に求めるのに適していると考えられる。なお、正方周期点渦に対して勾配系で得られる配置については、九州大学応用力学研究所研究会での報文に記載予定である。

船越満明教授から、研究会での講演後に文献 [5] のコピーと貴重なコメントを頂いたことに謝意を表します。

## 参考文献

- [1] M. Umeki: J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 043401.
- [2] M. Umeki: to appear in the Proceedings of NCTAM Japan **56** 2006 (2007).
- [3] M. Umeki: to appear in the Proceedings of ICIAM 07 (2008).
- [4] 梅木 誠: 数理解析研究所講究録 **1567** (2007) pp. 123-131.
- [5] L. J. Campbell and Robert Ziff: Los Alamos Sci. Lab. Rep. No. LA-7384-MS (1978) pp. 1-40.
- [6] P. G. Saffman: *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992) Chap. 7.