

低レイノルズ数乱流における乱流粘性係数

崇城大学工学部総合教育物理 柴田博史(Hiroshi Shibata)
Department of General Education, Faculty of Engineering,
Sojo University

1. はじめに

カルマン渦列に代表される流体乱流について、長い間疑問を投げかけられていることがある。それは、Fig.1 と Fig.2 に示される様なスケールの異なるカルマン渦列について、レイノルズ数相似則を適用すると、濟州島にぶつかる空気のかたまりの粘性係数 ν と小枝を通過する空気の粘性係数 ν_0 の間に、 $\nu \cong 10^7 \nu_0$ の関係が生じることである。



Fi.1 Karman vortex street behind the pile in water by the courtesy of Tech. Offi. K. Ishii and Prof. T. Karasudai of the Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University.



Fig.2 Karman vortex street behind the Jeju-do by the courtesy of Prof. T. Kikuchi of Kochi University.

もう少し詳しく述べよう。小枝と濟州島の幅を、それぞれ、 l と L とする。また、小枝と濟州島を通過する空気の速さを、それぞれ、 u と U とする。レイノルズ数相似則は、

$$\frac{lu}{\nu_0} = \frac{LU}{\nu} \tag{1}$$

の様に書くことができるとすると、 $\nu \cong 10^7 \nu_0$ を得る。これをどの様に説明するかが問題となっていた。

References

- [1] S. B. Pope, Turbulent flows, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [2] 木田重雄, 柳瀬真一郎, 乱流力学, 朝倉書店, 東京, 1998.
- [3] 巽 友正 (編著), 乱流現象の科学, 東京大学出版会, 東京, 1986.
- [4] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokoyama, K. Itakura, and A. Uno, Phys. Fluids, L21-L24, 15 (2003).

2. LES と渦粘性係数

(1) 渦粘性係数の導出

流体乱流に対してナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{r}, t) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p + \nu_0 \bar{\nabla}^2 u_i(\vec{r}, t) + K_i \quad (2)$$

が局所的に成立する。ここで局所的というのは、時間と場所についてであり、コルモゴロフのスケールにおいて、式(2)は成立する。運動粘性係数 ν_0 に対して流体固有の値を取ることができるのは、コルモゴロフの長さおよび時間であり、式(2)はその長さおよび時間に対して適用できる。ここで、コルモゴロフのスケールよりかなり大きな小枝の長さや、さらに大きなスケールの濟州島の長さになると、式(2)をそのまま適用するのは原理的に無理がある。具体的には、レイノルズ数相似則は使えない。

そこで、式(2)を空間的に粗視化（平均化）する必要がある。ここに、ラージ・エディ・シミュレーション（LES）が持つ、物理的な重要性がある。式(2)を長さ L にわたって粗視化すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla}) U_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P + \nu_0 \bar{\nabla}^2 U_i - \frac{\partial}{\partial x_j} Q_{ij} \quad (3)$$

を得る。ここで、式(3)の最後の2つの項をまとめて、

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla}) U_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P + \nu \bar{\nabla}^2 U_i \quad (4)$$

と書く。ここで、 U_i 、 P 、および Q_{ij} は、

$$U_i = \int d\vec{r}_1 G(\vec{r} - \vec{r}_1) u_i(\vec{r}_1, t), \quad (5)$$

$$P = \int d\vec{r}_1 G(\vec{r} - \vec{r}_1) p(\vec{r}_1, t), \quad (6)$$

および

$$Q_{ij} = \int d\vec{r}_1 G(\vec{r} - \vec{r}_1) u_i(\vec{r}_1, t) u_j(\vec{r}_1, t) - \int d\vec{r}_1 G(\vec{r} - \vec{r}_1) u_i(\vec{r}_1, t) \int d\vec{r}_1 G(\vec{r} - \vec{r}_1) u_j(\vec{r}_1, t) \quad (7)$$

である。

式(4)に対して適用されるレイノルズ数相似則を考えてみる。小枝の長さスケールの空気の渦粘性係数を ν_1 、濟州島の長さスケールの空気の渦粘性係数を ν_2 とすると、レイノルズ数相似則は、

$$\frac{lu}{\nu_1} = \frac{LU}{\nu_2} \quad (8)$$

の様を書くことができる。 ν_1 は ν_0 に近い値をとることが考えられるが、 ν_2 は ν_0 よりかなり大きな値で、ほぼ $10^7 \nu_0$ と考えることができる。式(8)で与えられる関係に矛盾は無いと考えられる。

式(4)の渦粘性係数 ν に統計力学的表現を与える。ここでは式(4)を用いて計算するのではなく、式(4)にあらわれる渦粘性係数を、ナビエ・ストークス方程式(2)にあらわれる速度 u_i を用いて表す。式(4)の線形部分を取り出してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i = \sum_j \nu_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} U_i \quad (9)$$

となる。ここで、係数 ν_{yx} は式(9)より

$$\frac{\partial}{\partial t} U_y = \nu_{yx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_y \quad (10)$$

を考え、境界条件

$$U_y(\vec{r}, t)|_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} = 0 \quad (11)$$

のもと、 U_y の解を求める。解は、

$$U_y = \frac{1}{Z_y} \exp\left[-\frac{(x-x'_{i0})^2}{4\nu_{yx}t}\right] \quad (12)$$

の様に求まる。そして、

$$I^{(\nu)}(t) \equiv \sum_{i=1}^N \int dx'_{i0} \int du'_{iy0} M_2 f^{(1,0)}(x'_{i0}, u'_{iy0}) \quad (13)$$

を考える。 x'_{i0} と u'_{iy0} は、 i 番目の流体粒子の時刻 $t=0$ における x 座標と速度の y 成分である。

M_2 は、

$$M_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x'_{i0})^2 U_y \quad (14)$$

の様に与えられる。 $f^{(1,0)}(x'_{i0}, u'_{iy0})$ は、 i 番目の流体粒子が時刻 $t=0$ で、 x 座標が x'_{i0} 、速度の y 成分が u'_{iy0} という値をとる確率を与える確率分布関数である。ここでは、流体が乱流状態なので、 $f^{(1,0)}(x'_{i0}, u'_{iy0})$ は、流体粒子速度 u'_{iy0} のガウス分布と考え、具体的に

$$f^{(1,0)}(x, u_y) = A \exp\left[-\frac{u_y^2}{2kT}\right] \quad (15)$$

の様に考える。ここで、 M_2 の表式(14)の U_y に式(12)を代入し、さらに、 $f^{(1,0)}(x'_{i0}, u'_{iy0})$ に式(15)を使うと、

$$I^{(\nu)}(t) = 2kT\nu_{yx}t \quad (16)$$

を得る。一方、 M_2 の表式(14)の U_y を、 u'_{iy0} を使って書き下し、 $f^{(1,0)}(x'_{i0}, u'_{iy0})$ を、記号 $\langle \dots \rangle$ を使って書き下すと、

$$I^{(\nu)}(t) = \frac{1}{V} \langle (F^{(\nu)}(t) - F^{(\nu)}(0))^2 \rangle \quad (17)$$

となる。ここで、

$$F^{(\nu)}(t) \equiv \sum_{i=1}^N x_i(t) u_{iy}(t) \quad (18)$$

である。式(17)は、熱力学的極限を取り、書き下すと、

$$\nu_{yx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle (G^{(\nu)}(t) - G^{(\nu)}(0))^2 \rangle \quad (19)$$

となる。ここで、

$$G^{(\nu)}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}kT} \sum_{i=1}^N x_i(t) u_{iy}(t) \quad (20)$$

である。式(19)が、乱流ずり粘性係数 ν_{yx} に対する統計力学的表式である。乱流温度 T は局所的な温度 $T(\vec{r}, t)$ を空間粗視化し、

$$T = \int d\vec{r} G(\vec{r} - \vec{r}_1) T(\vec{r}_1, t) \quad (21)$$

の様に得ることが出来る。定数 k を乱流ボルツマン定数と呼び、乱流温度 T と速度分布関数 $f^{(1,0)}(x'_{i0}, u'_{iy0})$ の関数形より求めることができる。

(2) 流体乱流における熱力学の導入 (熱力学量の定義とその関係式)

最初に、乱流速度に対する分布関数を導入する。一辺の長さがコルモゴロフ長 l_K 、体積 V_K の立方体で定められる空間 \vec{r} と時間 t における流体の速度を $\vec{u}(\vec{r}, t)$ とし、長さ L で空間粗視化された流体の速度を

$$U_i(t) \equiv \int d\vec{r} G(\vec{r} - \vec{r}_1) u_i(\vec{r}_1, t) \quad (22)$$

の様に定義する。流体の速度 $u_i(\vec{r}, t)$ の $U_i(t)$ からのずれ $u'_i(t) \equiv u_i(\vec{r}, t) - U_i(t)$ が u' という値をとる確率を与える確率分布関数を、

$$P(u'; V_K) \equiv \langle \delta(u' - u'_i(t)) \rangle \quad (23)$$

の様に書く。 $P(u; V_K)$ の関数形は、式(15)で与えられているが、気体分子の速度に対するマックスウェルの分布関数の関数形、

$$P_B(u) = B \exp\left[-\frac{u^2}{2k_B T}\right] \quad (24)$$

と同じになることが、乱流の熱力学が気体分子の熱力学と同じ様に展開できる理由である。乱流の熱力学的エントロピー $S(u)$ を、

$$S(u) \equiv k \ln W(u) \quad (25)$$

の様に導入し、流体粒子の数 N を、

$$N = \left(\frac{L}{l_K}\right)^3 \quad (26)$$

の様に与える。ここで、 $W(u)$ は速度差 $\vec{u}(\vec{r}, t)$ の状態数、 N は、一辺の長さ L 、体積 V の流体に含まれる一辺の長さ l_K の立方体の個数である。状態数 $W(u)$ は、速度差 $\vec{u}(\vec{r}, t)$ の分布関数 $P(u; V_K)$ と、

$$W(u) = 1/P(u; V_K), \quad (27)$$

の関係（等重率の原理）にある。

(3) 数値計算に用いる乱流ずり粘性係数の表式

乱流ずり粘性係数を、数値計算を用いて評価する形式に変形する。まず、式(19)を、

$$\nu_{yx} = \frac{1}{kT} \int_0^\infty dt \lim_{V \rightarrow \infty} V C_{yx}(t) \quad (28)$$

の様に变形する。ここで、 $C_{yx}(t)$ は、

$$C_{yx}(t) \equiv \langle J_{yx}(t) J_{yx}(0) \rangle - \langle J_{yx}(t) \rangle \langle J_{yx}(0) \rangle \quad (29)$$

の様に記述されるが、流体粒子に働く力を無視すると、

$$J_{yx}(t) \equiv \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) u_y(\vec{r}, t) = J_{xy}(t) \quad (30)$$

の様に記述される。式(28)の表式を用いて、乱流ずり粘性係数を行う。結果は次の節に示す。

References

- [5] P. Sagaut, Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2001.
- [6] M. Lesieur, O. Metals, and P. Comte, Large-Eddy Simulations of Turbulence, Cambridge University Press, New York, 2005.
- [7] P. A. Davidson, Turbulence, Oxford University Press, New York 2004.
- [8] E. Helfand, Phys. Rev. 119, 1(1960).
- [9] H. Shibata, Physica A 333, 71(2004).
- [10] H. Shibata, Physica A 345, 448(2005).

[11] M. Toda, R. Kubo, and N. Saitô, *Statistical Physics I: Equilibrium Statistical Mechanics* 2nd ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.

[12] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics* 2nd ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.

3. LES と渦粘性係数

この節では、式(28), (29), および式(30)を用いて、乱流ずり粘性係数を評価する。とりあげる系は、空間3次元の1様乱流で、系の大きさは、 $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ である。標準的な3D15Q格子ボルツマン法をシミュレーションに用いる。周期境界条件を置き、外力を、

$$\vec{K} = (0, K_y(z, t), 0) \quad (31)$$

の様に加える。ここで、 $K_y(z, t)$ は、

$$\langle K_y(z, t) K_y(z, t') \rangle = \delta(t - t') \quad (32)$$

を満たし、偏差 σ が、

$$\sigma = |10^{-6} \sin(4z)| \quad (33)$$

となる様に与える。格子数は、 $100 \times 100 \times 100$ とする。運動量流れは、

$$J_{xy}(t) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) u_y(\vec{r}, t), \quad (34)$$

$$J_{yz}(t) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_y(\vec{r}, t) u_z(\vec{r}, t), \quad (35)$$

および、

$$J_{zx}(t) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_z(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) \quad (36)$$

となる。運動量流れの2時間相関関数は、

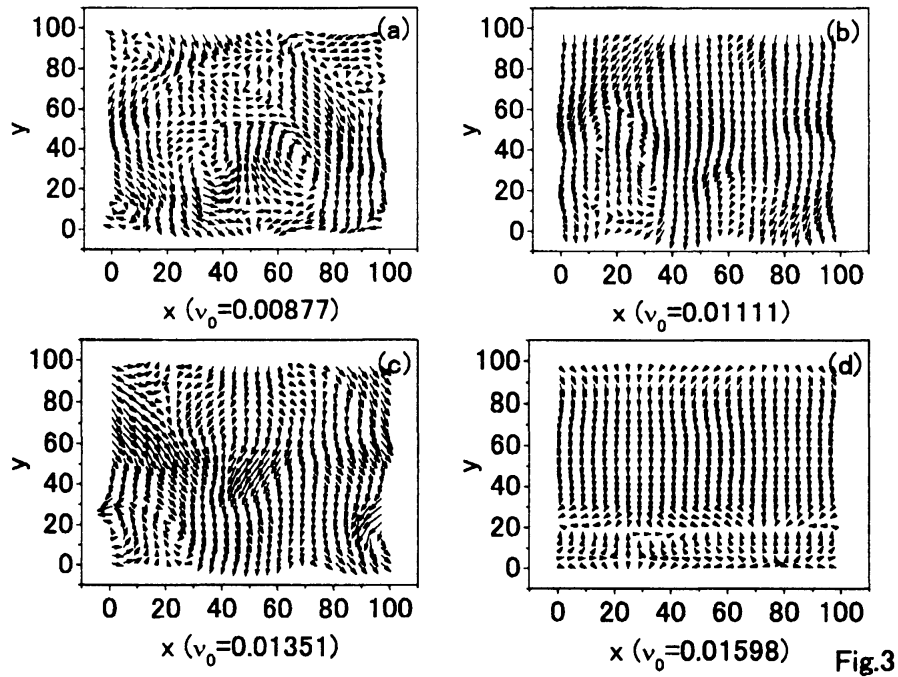
$$C_{xy}(t) = \langle J_{xy}(t) J_{xy}(0) \rangle - \langle J_{xy}(t) \rangle \langle J_{xy}(0) \rangle, \quad (37)$$

$$C_{yz}(t) = \langle J_{yz}(t) J_{yz}(0) \rangle - \langle J_{yz}(t) \rangle \langle J_{yz}(0) \rangle, \quad (38)$$

および、

$$C_{zx}(t) = \langle J_{zx}(t) J_{zx}(0) \rangle - \langle J_{zx}(t) \rangle \langle J_{zx}(0) \rangle \quad (39)$$

となる。ここでは、外力を一定にして、運動粘性係数を変え、乱流の発達の変える。



運動粘性係数 ν_0 を, 0.00877, 0.01111, 0.01351, 0.01598 と変える。それぞれの運動粘性

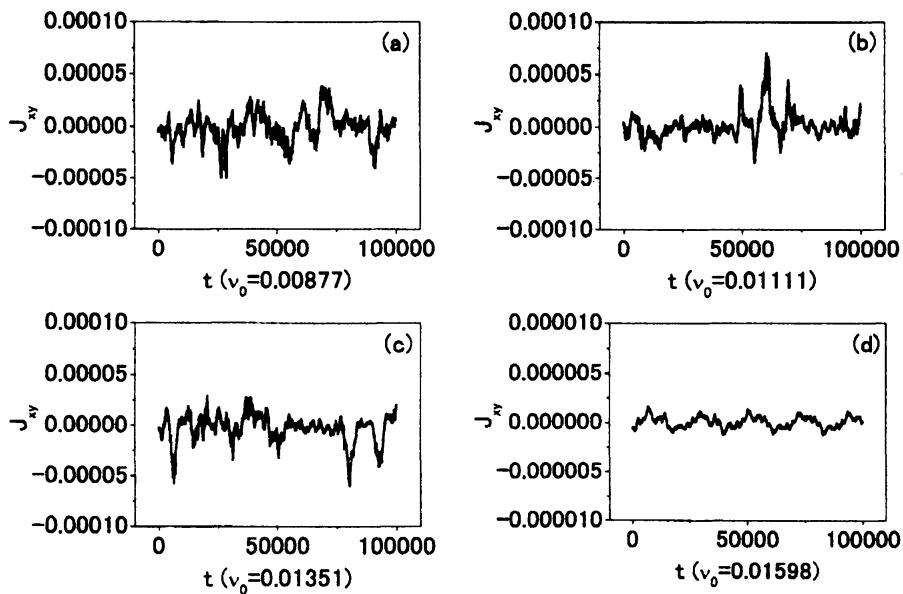


Fig.4

係数に対する速度場の xy 成分を描いた図が, Fig.3 に示されている。 ν_0 が小さくなるほど, 乱流が発達するのがわかる。

次に, 運動量流れ $J_{xy}(t)$, $J_{yz}(t)$, および $J_{zx}(t)$ の時系列を, Fig.4, Fig.5, および Fig.6 に示す。 $J_{xy}(t)$, $J_{yz}(t)$, および $J_{zx}(t)$ いずれの場合も, 運動粘性係数が小さい値をとると, つまり, 乱流が発達すると, 時系列の振幅は大きくなるのがわかる。また, 速度の y 成分 $u_y(\vec{r}, t)$ が関係する $J_{xy}(t)$ と $J_{yz}(t)$ は, $J_{zx}(t)$ に比べ, その絶対値がかなり大きいこともわかる。これは, 外力 \vec{K} の影響であろう。

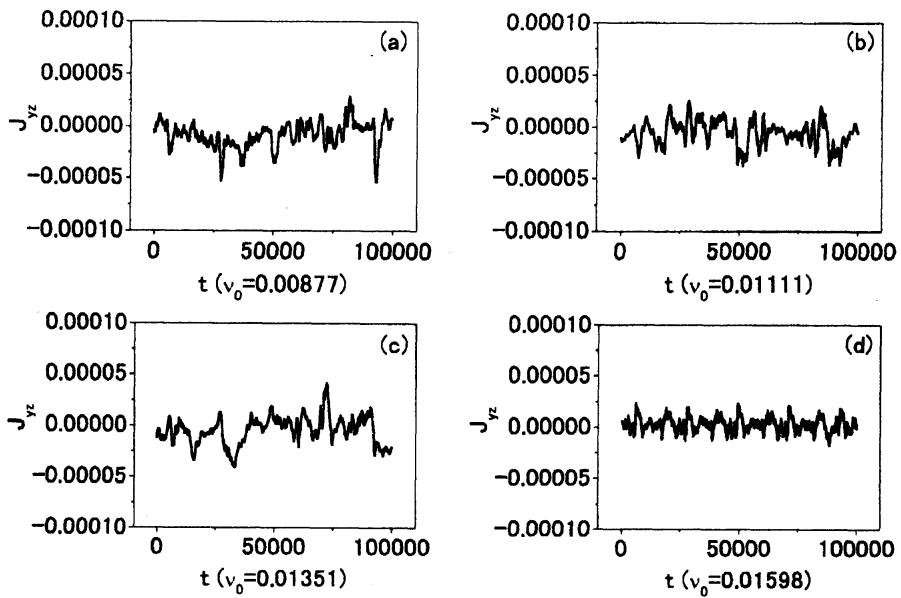


Fig.5

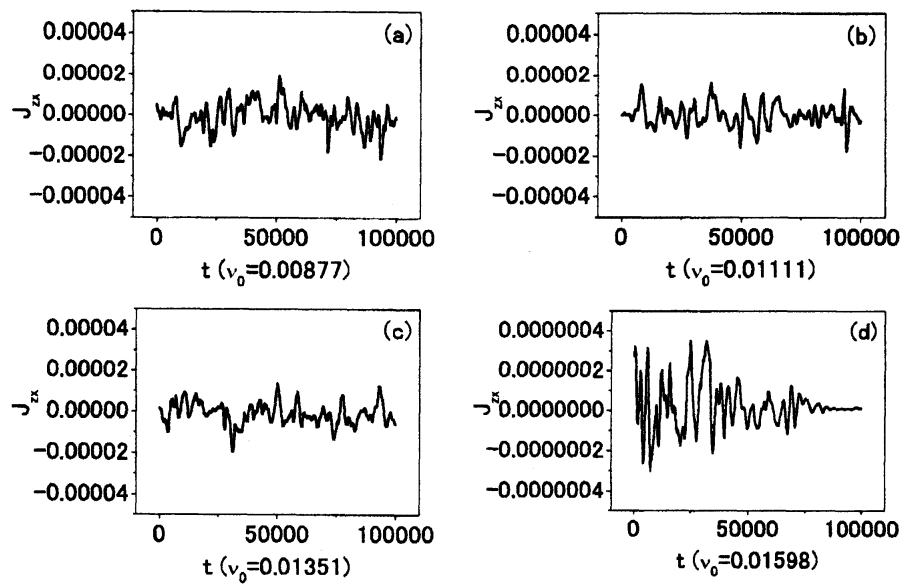


Fig.6

さらに、Fig.7, Fig.8, および Fig.9 に、式(37), (38), および(39)をもとに計算した 2 時間相関関数 $C_{xy}(t)$, $C_{yz}(t)$, および $C_{zx}(t)$ を示す。2 時間相関関数を計算するのに、500 アンサンブルを用いた。

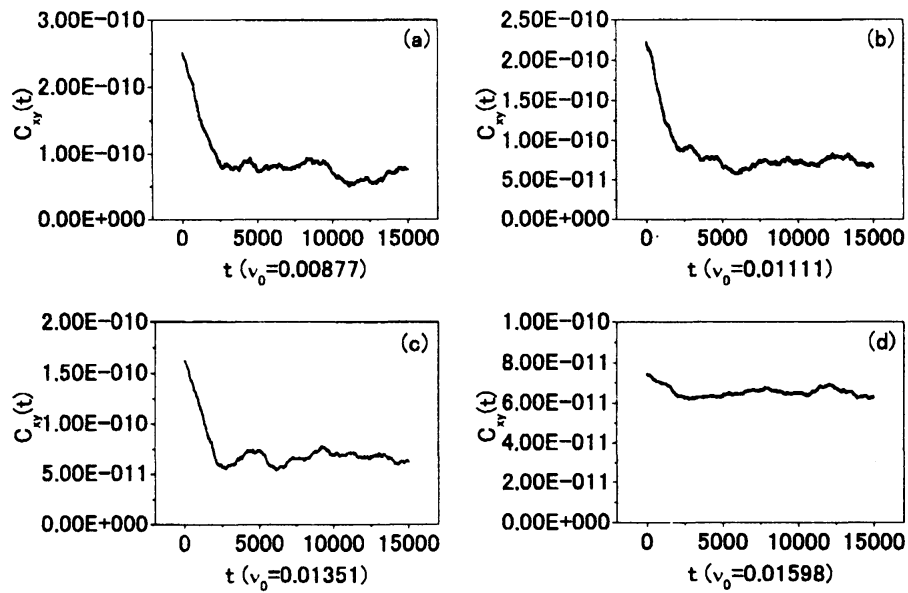


Fig.7

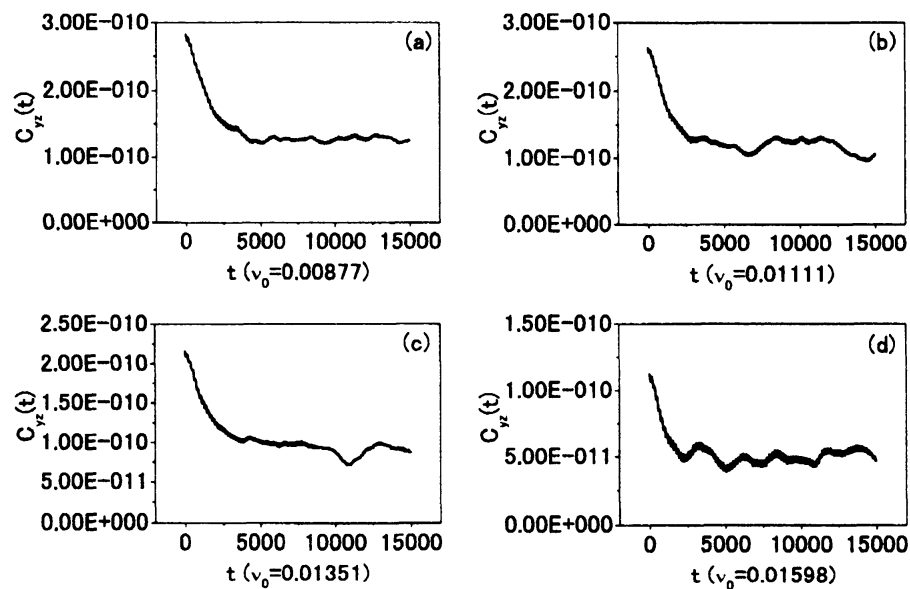


Fig.8

$C_{xy}(t)$, $C_{yz}(t)$, および $C_{zx}(t)$ いずれの場合も、運動粘性係数が小さくなるほど（乱流が発達するほど）、取る値は大きくなる。 $C_{xy}(t)$ と $C_{yz}(t)$ は、0に飽和しないが、 $C_{zx}(t)$ は0に飽和する。これは、 ν_{xy} と ν_{yz} を評価するには、現システムサイズ $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ は小さいことを示す。また、 ν_{zx} は式(28)に対応する式を用い評価することができ、運動粘性係数が小さいほど、つまり、乱流が発達するほど、乱流ずり粘性係数は大きいことがわかる。

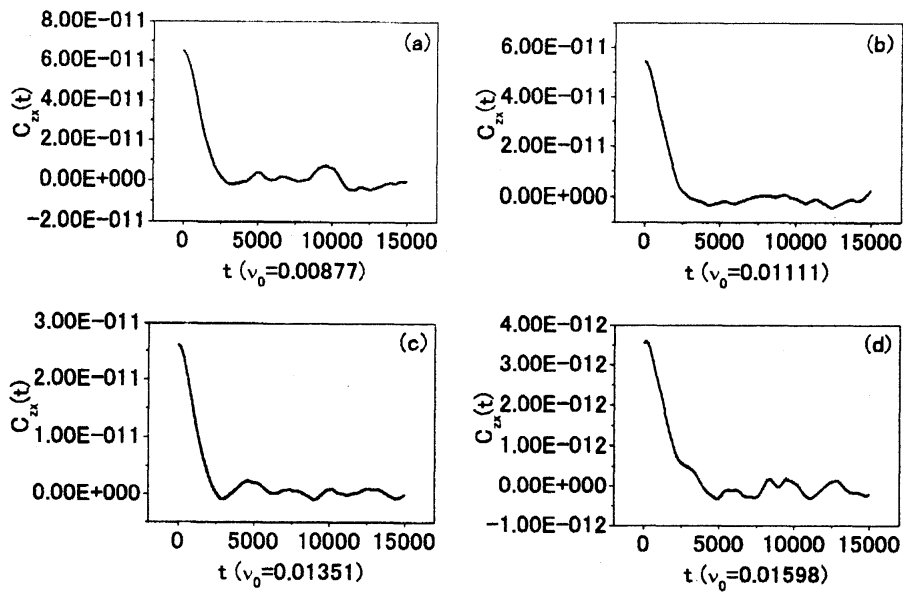


Fig.9

References

- [13] S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation*, Oxford University Press, Oxford.
 [14] W. Sakikawa and O. Narikiyo, *Mod. Phys. Lett. B* 18, 583(2004).

4. 結語

ナビエ・ストークス方程式を空間粗視化して得られる方程式をもとに、渦粘性係数は定義される。その渦粘性係数を、もとのナビエ・ストークス方程式によって記述される速度を用いて、統計力学的に表現した。さらに、ここに表れる統計力学と整合性を持つ様な熱力学を展開した。また、得られた渦粘性係数の表式をもとに、空間3次元一様乱流の渦粘性係数を評価した。結果は、乱流が発達すればするほど、渦粘性係数の値は大きくなることを示した。

謝辞

この研究は、多くの人達に支えられ成り立っています。九州大学応用力学研究所及川研究室の皆さん、異友正先生、京都大学木田重雄先生、後藤晋さん、名古屋大学金田行雄先生、石原卓さん、名古屋工業大学後藤俊幸先生、中央大学中野徹先生より有益な助言をもらっております。また、九州大学福本康秀先生より、日頃より励ましをもらっています。九州大学成清修先生より、格子ボルツマン法のプログラミングに際し、多くのノウハウをもらっています。ここに、感謝の意を表します。