

## 一般化された 2 次元流体系における平行流の安定性

神戸大・理学研究科 末吉雅和 (Masakazu Sueyoshi)\*  
神戸大・理学研究科 岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)  
Graduate School of Science, Kobe University

2 次元 Navier-Stokes 方程式を含む地球流体力学で知られたいくつかの 2 次元流体方程式は、1 つの実数パラメーター  $\alpha$  を含む 1 本の非線形移流方程式で記述される。この系は  $\alpha$  乱流系と呼ばれる。実数パラメーター  $\alpha$  は移流する場 (流れ関数) と移流されるスカラー場の結合の度合を表す。本研究では  $\alpha$  乱流系における平行流の安定性について調べた。 $\alpha = 1, 2, 3$  の場合について基本場のスカラー場を固定して、線形安定性解析および直接数値計算を行った。そして、 $\alpha$  が大きくなるほど卓越する擾乱の波数が小さくなり、かつその成長率は大きくなるという結果を得た。卓越する擾乱の波数の  $\alpha$  依存性を波の共鳴の概念を用いて解釈した。

### 1 はじめに

大気や海洋の大規模な運動は回転と密度成層の影響により、水平 2 次元的になる傾向がある。このため地球流体力学では 2 次元流体力学の研究も行われてきた。ところで、地球流体力学で知られたいくつかの 2 次元流体方程式は 1 つの実数パラメーター  $\alpha$  を含む 1 本の移流拡散方程式で表されることがわかっている。それは  $\alpha$  乱流系と呼ばれ、その支配方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = D, \quad \hat{q}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^\alpha \hat{\psi}(\mathbf{k}) \quad (1)$$

である (Pierrehumbert *et al.* 1994)。ここで  $\psi(x, y, t)$  は流れ関数、 $J(A, B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_y A \partial_x B$  であり、 $D$  は粘性項、 $\mathbf{k}$  は 2 次元波数ベクトルであり、 $\hat{q}$ 、 $\hat{\psi}$  は  $q$ 、 $\psi$  を Fourier 変換したものである。

(1) は  $\alpha = 2$  の場合 2 次元 Navier-Stokes 方程式となる。このとき  $q$  は渦度 (すなわち  $q = \nabla^2 \psi$ ) である。 $\alpha = 1$  の場合は表面準地衡流方程式 (Held *et al.* 1995) となる。また  $\alpha = -2$  のとき、(1) は Charney-Hasegawa-Mima 方程式で Rossby の変形半径が小さい場合となる (Iwayama *et al.* 2002; Smith *et al.* 2002)。以下では Navier-Stokes 系の言葉遣いに従って  $\alpha \neq 2$  の場合でも  $q$  を渦度と呼ぶことにする。

実数パラメーター  $\alpha$  は移流する場 (流れ関数  $\psi$ ) と移流される場 (渦度  $q$ ) の結合の度合を表わす。例えば (1) の第 2 式を

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{|\mathbf{k}|^\alpha} \hat{q}(\mathbf{k}) \quad (2)$$

\*現所属：気象研究所

と変形すると、 $\alpha > 0$  の場合に  $\alpha$  が大きくなるほど移流される場の細かい構造が移流する場とは無関係となることがわかる (Pierrehumbert *et al.* 1994). このパラメーター  $\alpha$  に  $\alpha$  乱流系のダイナミクスがどのように依存するか調べることで、これまで個別に研究されてきた種々の 2 次元流体系を統一的な観点から理解できることが期待できる。ところが  $\alpha$  乱流系の研究は数が少なく、そのほとんどが乱流特性を調べたものである (Pierrehumbert *et al.* 1994; Smith *et al.* 2002; Watanabe & Iwayama 2004, 2007). 例えば、流体力学的に重要である流れの安定性を調べたものは 岩山, 末吉 (2007) だけである。岩山, 末吉 (2007) では平行流の安定性について、基本場の速度を固定 (基本場の  $x$  方向の速度プロファイルが  $\tanh y$  型) して調べた。そして、 $\alpha > 0$  では  $\alpha$  が大きくなるにつれて不安定により卓越する擾乱の波数が大きくなり、また最大成長する擾乱の成長率が大きくなるという結果を得た。しかしながら、この結果が普遍的なものかどうかはまだわからない。例えば流れの安定性の  $\alpha$  依存性を調べる場合、基本場の渦度を固定するという設定も可能である。また、基本場の  $x$  方向の速度プロファイルとして別のものをとった場合にはどうなるかという疑問も起こる。そこで本研究では  $\alpha$  乱流系における平行流の安定性について、基本場の渦度を固定して調べる。その際、基本場の速度場としては 岩山, 末吉 (2007) とは別のものになるようにする。

## 2 線形安定性解析

### 2.1 $\alpha$ 乱流系の Rayleigh 方程式

線形安定性を調べる基本場の渦度を  $Q(y)$ , それに対応する流れ関数を  $\Psi(y)$  とする。基本場に与える渦度と流れ関数の擾乱を  $q'(x, y, t)$ ,  $\psi'(x, y, t)$  とすると、

$$q = Q + q', \quad \psi = \Psi + \psi' \quad (3)$$

となる。(3) を (1) に代入し、その際に擾乱は微少であるとする、擾乱の 2 次以上の項は無視できて

$$q'_t + \psi'_x Q_y + q'_x U = 0 \quad (4)$$

が得られる。ここで  $U(y) = -\Psi_y$  は基本場の  $x$  方向の速度である。(4) において  $q' = \bar{q}(y) \exp[ik(x - ct)]$ ,  $\psi' = \tilde{\psi}(y) \exp[ik(x - ct)]$  を仮定すると、

$$(U - c)\bar{q} + \tilde{\psi}Q_y = 0 \quad (5)$$

が得られる。(5) は  $\alpha$  乱流系の基本場の安定性を評価する Rayleigh 方程式である。 $c$  が実数ならば擾乱は発達せず基本場は微少擾乱に対して安定である。もし  $c$  が複素数であり、 $\text{Im}\{c\} > 0$  ならば擾乱の振幅は時間とともに増大する。これは基本場が微少擾乱に対して不安定ということである。

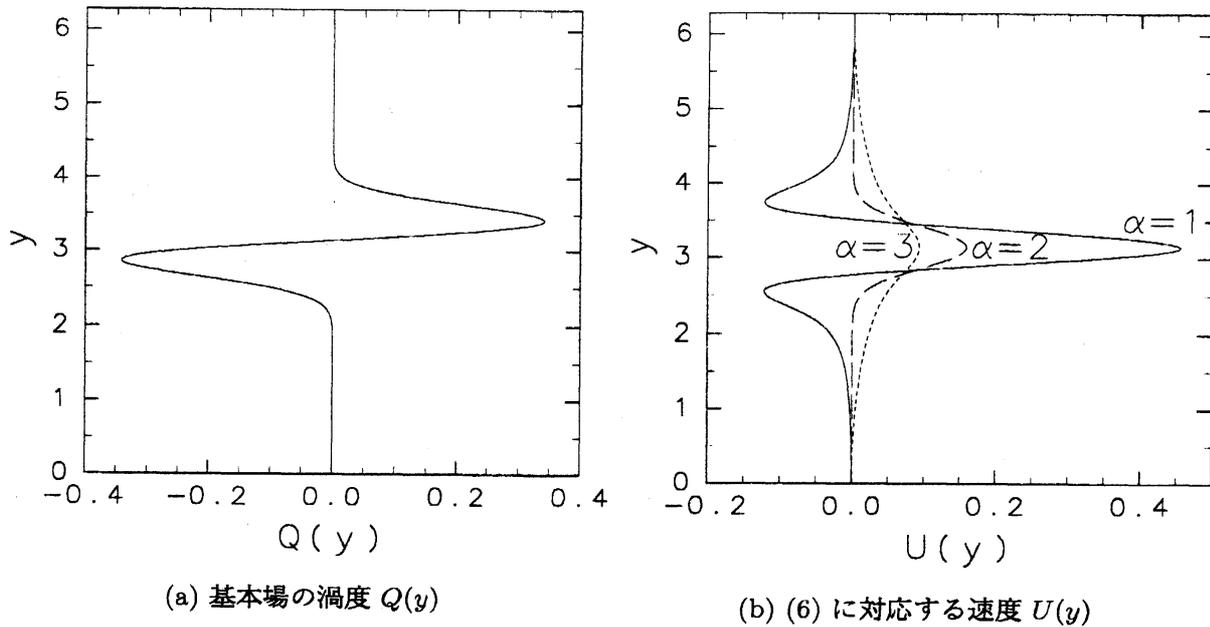


図 1: 安定性を調べる基本場. 領域を  $0 \leq y \leq 2\pi$ ,  $y_0 = \pi$  とした.

## 2.2 基本場

本研究では

$$Q(y) = (2y - 2y_0) \exp[-2\pi(y - y_0)^2] \quad (6)$$

という基本場 (図 1(a)) の安定性を調べる. ここで  $y_0$  は領域の中心の  $y$  座標である. 本研究では基本場の渦度 (6) を固定する.  $\alpha$  の値が変わると (6) に対応する速度場は変化する (図 1(b)). 図 1(b) にあるように,  $\alpha$  が大きくなるにつれ流速の最大値は小さくなる.  $\alpha = 2$  の場合, (6) に対応する速度場は

$$U(y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-2\pi(y - y_0)^2] \quad (7)$$

というジェット型のプロファイルである.

## 2.3 結果

$\alpha = 1, 2, 3$  の場合について, (5), (6) を 2 重周期境界条件のもとで数値的に解き,  $c$  の値を求めた. 計算する領域を  $y$  方向には  $0 \leq y \leq 10\pi$  ( $y_0 = 5\pi$ ) と設定した. 結果は  $\alpha = 1, 2, 3$  のどの場合でも流れは不安定であった. 経験的に, 流れの安定性の問題では最も成長率の大きい波数の擾乱が流れ場の中で支配的となることが知られている. そこで, ここでは最大成長するモードに注目する.  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合について, 与えられた  $k$  において最大成長するモードの成長率を示したのが図 2 である. 成長率が最大の擾乱の

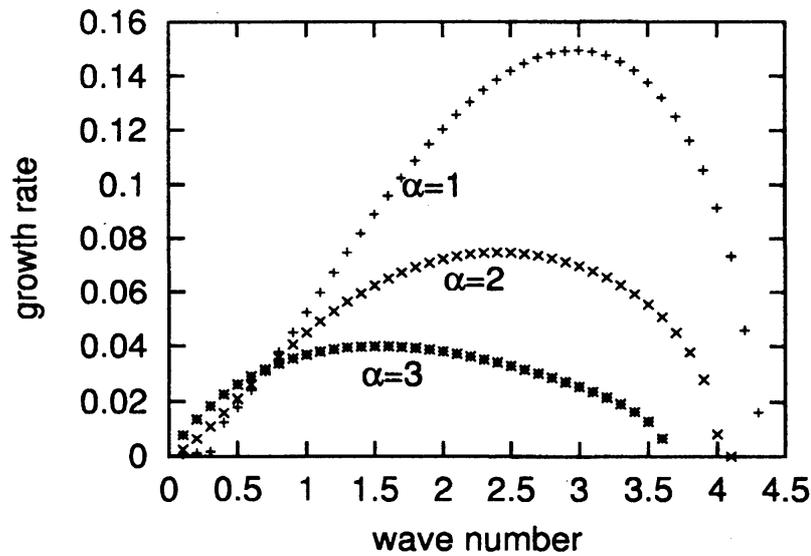


図 2:  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合に, 各波数  $k$  において最大成長するモードの成長率.

表 1: 各  $\alpha$  に対して, 最大成長する擾乱の波数とその成長率.

	波数	成長率
$\alpha = 1$	3.0	0.14953491
$\alpha = 2$	2.4	0.07484942
$\alpha = 3$	1.5	0.03994883

波数と成長率を示したのが表 1 である.  $\alpha$  の値が大きくなるほど最大成長する擾乱の波数は小さくなり, かつその成長率も小さくなる傾向がある. このことは速度を固定した条件での最大不安定擾乱の  $\alpha$  依存性 (岩山, 末吉 2007) と逆の傾向である.

### 3 直接数値計算

#### 3.1 方法と条件

線形安定性解析により基本場 (6) が不安定であることがわかった. つぎに場の時間発展を調べるために直接数値計算を行う. 空間微分はスペクトル法, 時間微分は Adams-Bashforth 法を用いて計算する. 計算する領域は  $0 \leq x, y \leq 2\pi$  であり, 2重周期境界条件とする. 格子点数は  $\alpha = 1, 2$  の場合が  $512^2$  (切断波数 170),  $\alpha = 3$  の場合が  $256^2$  (切断波数 85) である. 粘性項は通常粘性  $D = \nu \nabla^2 q$  であり, 粘性係数は  $\alpha = 1$  の場合は  $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha = 2, 3$  の場合は  $\nu = 0.5 \times 10^{-5}$  とした. 基本場には初期に以下の形の微少擾乱を与える.

$$q'(x, y, 0) = 10^{-5} \exp[-10(y - \pi)^2] \times R(x). \quad (8)$$

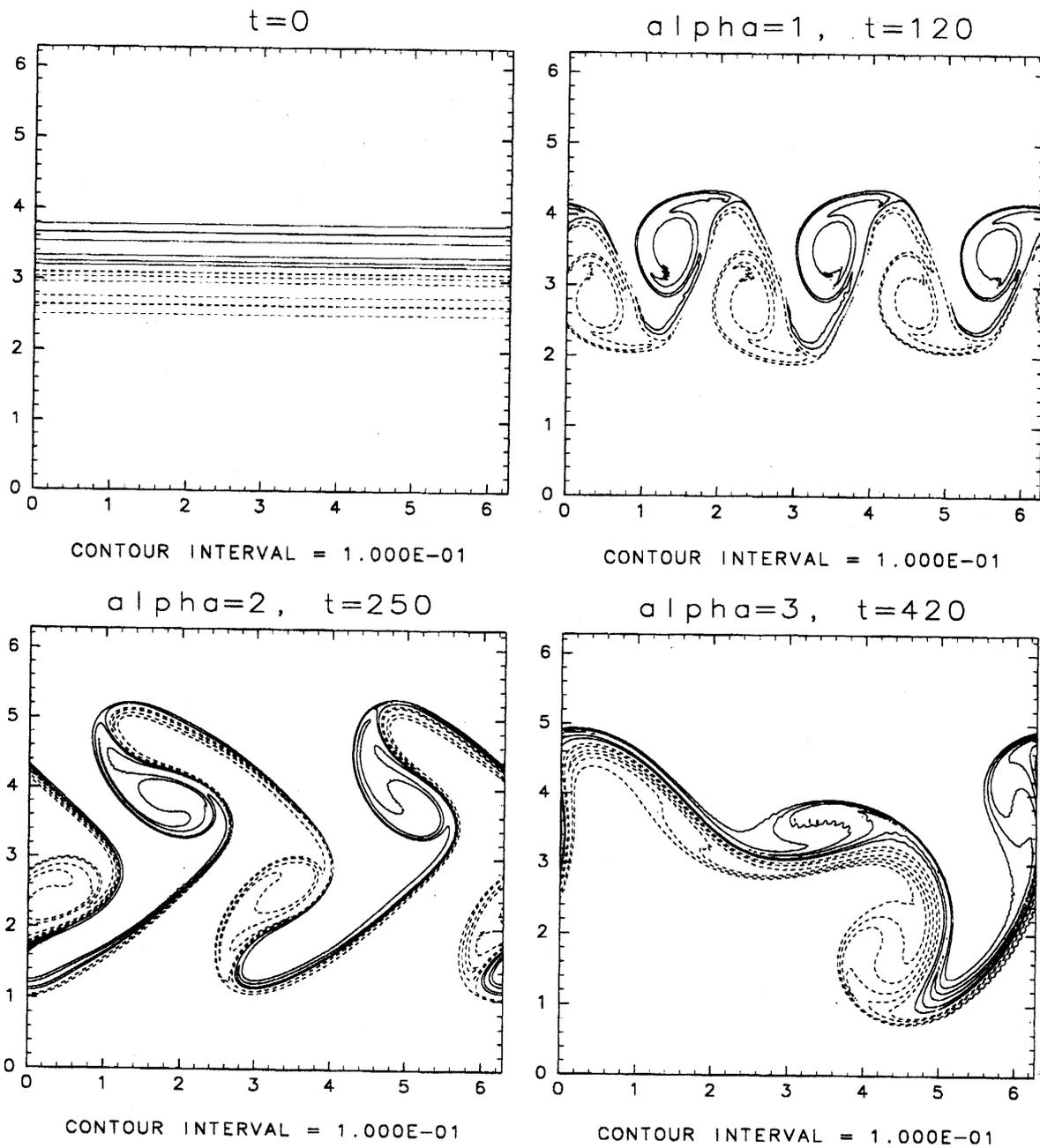


図 3:  $q$  の等値線. 実線は正の値, 破線は負の値. (左上)  $\alpha = 1, 2, 3, t = 0$ . (右上)  $\alpha = 1, t = 120$ . (左下)  $\alpha = 2, t = 250$ . (右下)  $\alpha = 3, t = 420$ .

ここで  $R(x)$  は一様乱数である。結局、初期の渦度場は

$$q(x, y, 0) = (2y - 2\pi) \exp[-2\pi(y - \pi)^2] + 10^{-5} \exp[-10(y - \pi)^2] \times R(x) \quad (9)$$

となる (図 3 左上)。

### 3.2 結果

はじめに  $q$  の場について述べる。図 3 に  $q$  の等値線を示す (実線は正の値, 破線は負の値)。図 3 において  $\alpha = 1$  の場合は波数 3 の擾乱が,  $\alpha = 2$  の場合は波数 2 の擾乱が卓越していることが見てとれる。また  $\alpha = 3$  の場合は波数 1 と波数 2 の中間のスケールの擾乱が卓越していることがわかる。これらの卓越する擾乱の波数は線形安定性解析で得られた最大成長する波数 (表 1) と近い値となっている。

どの波数の擾乱が卓越するかをより定量的に調べるには、渦度を  $x$  方向に波数展開して、以下のように定義される各波数のエンストロフィー  $Z_k$  を調べればよい。

$$Z_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{q}_k(y, t)|^2 dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

$$\hat{q}_k(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x, y, t) \exp(-ikx) dx. \quad (11)$$

図 4 に  $Z_k (k = 1 \sim 4)$  を示す。図 4 には線形安定性解析で得られた最大成長率も示している (linear と名前のついた点線)。 $\alpha = 1$  の場合は  $t = 50 \sim 170$  の間は波数 3 の成分が卓越している。またこの波数 3 の成分は  $t = 100$  くらいまでは線形安定性解析で得られた最大成長率とほぼ同じ割合で時間発展している。 $\alpha = 2$  の場合には  $t = 0 \sim 300$  の間は波数 2 の成分が卓越している。この成分は  $t = 0 \sim 200$  の間は線形安定性解析で得られた最大成長率とほぼ同じ割合で時間発展していることがわかる。 $\alpha = 3$  のときには  $t = 0 \sim 350$  の間は波数 1 と波数 2 の成分が卓越している。これらの成分も線形安定性解析で得られた最大成長率とほぼ同じ割合で時間発展している。結局、直接数値計算においても線形安定性解析の結果と同じく  $\alpha$  の値が大きいほど卓越する擾乱の波数が小さくなる傾向がある。また、直接数値計算において最も発達する擾乱の成長率は、線形安定性解析で得られた最大成長率と近い値となっている。したがって擾乱の振幅が発達している間は、 $\alpha$  が大きくなるほど最も発達する擾乱の成長率は小さくなる傾向がある。

## 4 考察

線形安定性解析および直接数値計算では、 $\alpha$  の値が大きいほど卓越する擾乱の波数が小さいという結果が得られた。ここではその結果について考察を行う。その際、流体力学的不安定は中立波の共鳴によって解釈できるという理論 (波の共鳴理論, Cairns 1979) を応用する。 $\alpha$  乱流系において、 $q' = q_A \exp[i(kx + ly - \omega t)]$ ,  $\psi' = \psi_A \exp[i(kx + ly - \omega t)]$  という波の形を仮定し ((1) より  $q_A = -(k^2 + l^2)^{\alpha/2} \psi_A$ ), これを (4) に代入すると

$$c_x \equiv \frac{\omega}{k} = U - \frac{Q_y}{(k^2 + l^2)^{\alpha/2}} \quad (12)$$

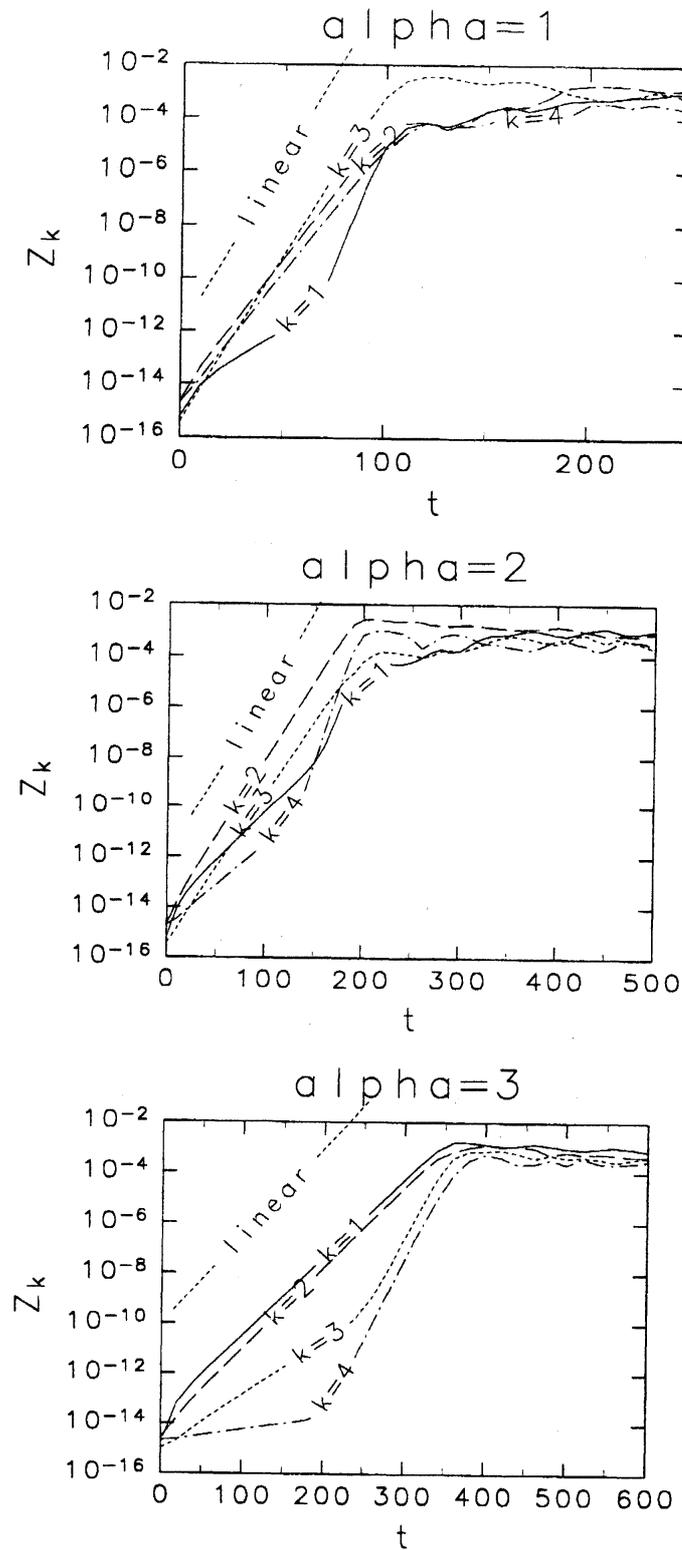


図 4:  $Z_k (k=1 \sim 4)$  の時間発展. 実線が  $k=1$ , 破線が  $k=2$ , 点線が  $k=3$ , 一点鎖線が  $k=4$  を表す. linear と記された点線は線形安定性解析で得られた最大成長率を表す.

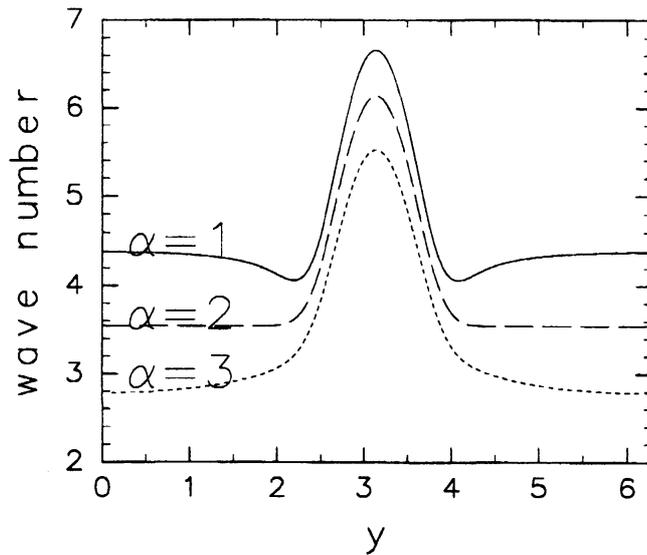


図 5: 共鳴の条件を満たす全波数  $(k^2 + l^2)^{1/2}$ .

が得られる. ここで  $c_x$  は  $x$  方向の波の位相速度である. 波の共鳴理論によると, (渦度の勾配が存在する) ある位置における波の速度と, それとは別の位置 (ここにも渦度の勾配が存在する) における波の速度が等しければ, 2つの波は強め合う関係を持続できるため, その結果流体力学的不安定が起こる. そこで, 領域の中央と別の場所において波の速度が等しいという条件の式を考えると, 以下のようなになる.

$$U(y) - \frac{Q_y(y)}{(k^2 + l^2)^{\alpha/2}} = U(y_0) - \frac{Q_y(y_0)}{(k^2 + l^2)^{\alpha/2}}. \quad (13)$$

この条件を満たす全波数  $(k^2 + l^2)^{1/2}$  を図 5 に示す. 図 5 では,  $\alpha$  が大きくなるほど, 共鳴の条件を満たす全波数は小さくなる傾向がある. ところで, 線形安定性解析および直接数値計算で考えていた波数は  $x$  方向の波数  $k$  であり,  $\alpha$  の値が大きいほど卓越する擾乱の  $x$  方向の波数  $k$  が小さいという結果を得た (図 2, 図 4). したがって図 5 の結果を利用しこの結果を解釈するには  $y$  方向の波数  $l$  についての情報が必要である. 以下では最も卓越する擾乱の  $y$  方向の波数  $l$  を見積もるために次の量  $Y_l$  を計算する.

$$Y_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{q}'_l(x, t)|^2 dx, \quad l \in \mathbf{N}, \quad (14)$$

$$\hat{q}'_l(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{q(x, y, t) - Q(y)\} \exp(-ily) dy. \quad (15)$$

図 5 の結果を得る際の出発点は (4) であった. (4) が成り立つには  $|q - Q| \ll |Q|$  が成り立つ必要がある. はじめにどの時間帯でこの条件が満たされるかを調べる. ここでは  $N(t) \equiv \max\{|q - Q|\} / \max\{|Q|\} \lesssim 0.1$  が満たされるならば (4) が成り立つとする. 図

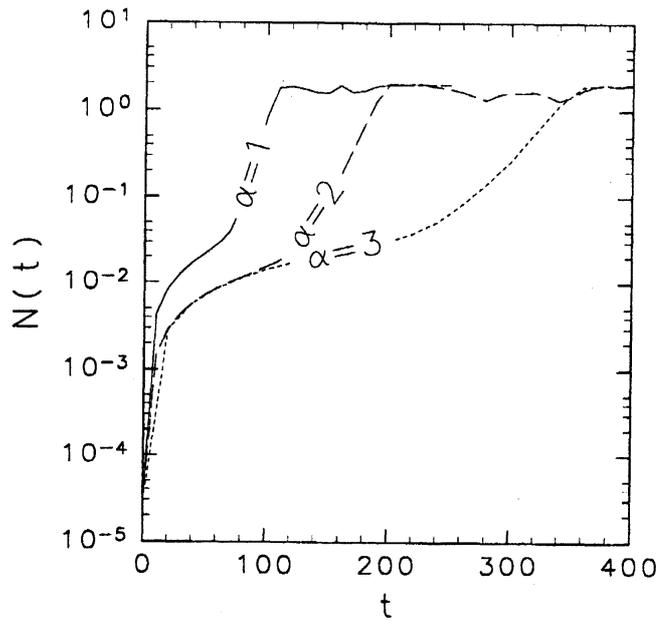


図 6:  $N = \max\{|q - Q|\} / \max\{|Q|\}$  の時間発展.

6 に直接数値計算の結果から得られる  $N(t)$  の時間発展を示す. 図 6 より  $N(t) \lesssim 0.1$  となるのは  $\alpha = 1$  の場合は  $t \lesssim 80$ ,  $\alpha = 2$  の場合は  $t \lesssim 160$ ,  $\alpha = 3$  の場合は  $t \lesssim 280$  である. 以下では  $N(t) \lesssim 0.1$  となる時間帯の  $Y_l$  に注目する. 図 7 に直接数値計算の結果から得られる  $Y_l$  の時間発展を示す.  $\alpha = 1, 2, 3$  のどの場合でも  $l = 5, 6, 7$  の成分が卓越している. なお, 図には示していないが  $|Y_l| \ll |Y_6|$  ( $8 \leq l$ ) であった. したがって, どの成分が卓越するかについては  $\alpha$  依存性がなく, それゆえ最も卓越する擾乱の  $y$  方向の波数  $l$  も近似的に  $\alpha$  依存性がないと結論できる. このことは, 卓越する擾乱の  $y$  方向の幅は基本場の渦度の幅でほぼ規定されており, したがって本実験の設定のように基本場の渦度場を固定した場合, 卓越する擾乱の  $y$  方向の幅に  $\alpha$  依存性がないものと解釈できる.

このことと図 5 より,  $\alpha$  が大きくなるほど共鳴の条件を満たす  $x$  方向の波数  $k$  は小さくなる傾向があると言える.

以上より, 線形安定性解析および直接数値計算において  $\alpha$  が大きくなるほど卓越する擾乱の  $x$  方向の波数が小さくなる傾向が見られたのは,  $\alpha$  が大きくなるほど (不安定のための) 共鳴の条件を満たす  $x$  方向の波数が小さくなるからであると解釈できる.

## 5 まとめ

$\alpha$  乱流系における平行流の安定性について調べた. 基本場の渦度を固定し,  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合について線形安定性解析および直接数値計算を行った. どちらの場合でも  $\alpha$  が大きくなるほど卓越する擾乱の  $x$  方向の波数は小さくなる傾向があった. この原因は  $\alpha$  が大きくなるほど (不安定のための) 共鳴の条件を満たす  $x$  方向の波数が小さくなるからである. また, 線形安定性解析および直接数値計算において,  $\alpha$  が大きくなるほど最大成

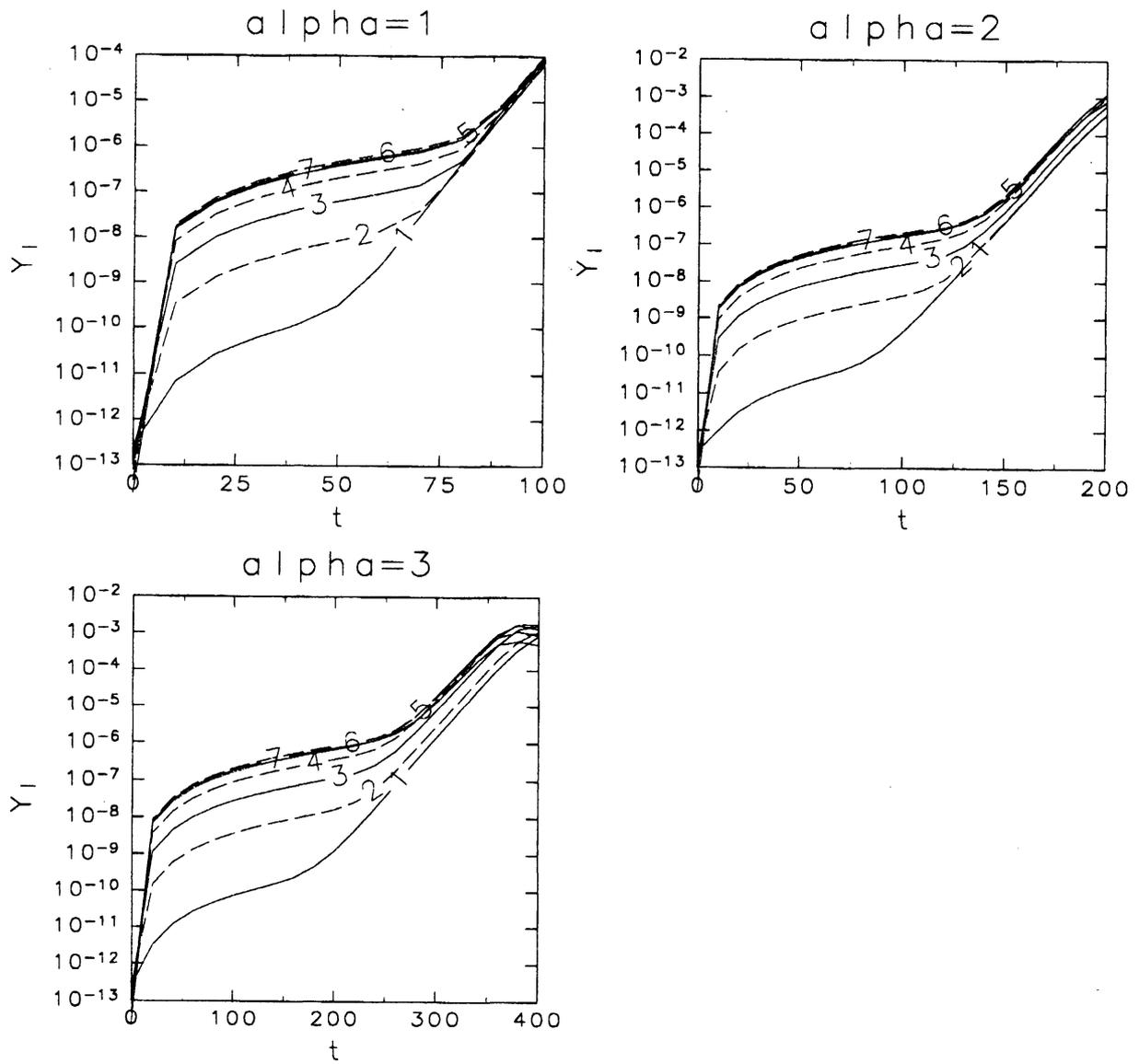


図 7:  $Y_l$  ( $l=1\sim 7$ ) の時間発展.  $l$  が奇数の場合は実線,  $l$  が偶数の場合は破線で表している. 図中の番号は  $l$  の値である.

長する擾乱の成長率は小さくなった。

本研究では基本場の渦度を固定して平行流の安定性を調べたが、岩山, 末吉 (2007) では  $\alpha$  乱流系における平行流の安定性について基本場の速度を固定して調べた。そして  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合には  $\alpha$  が大きくなるほど卓越する擾乱の  $x$  方向の波数は大きくなり、かつその成長率は大きくなるという結果を得た。これは本研究の結果とは逆の傾向である。岩山, 末吉 (2007) と本研究の結果をあわせると、 $\alpha$  乱流系における平行流の安定性について、 $\alpha > 0$  の場合は以下のことが結論される：基本場の渦度を固定すると、 $\alpha$  が大きくなるにつれ卓越する擾乱の  $x$  方向の波数は小さくなり、その成長率は小さくなる。基本場の速度を固定すると、 $\alpha$  が大きくなるにつれ卓越する擾乱の  $x$  方向の波数は大きくなり、その成長率は大きくなる。

## 謝辞

作図には地球流体電脳ライブラリを用いた。

## 参考文献

- Cairns, R. A. 1979 The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *J. Fluid Mech.* **92**, pp.1-14.
- Held, I. M., Pierrehumbert, R. T., Garner, S. T. and Swanson, K. L. 1995 Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.* **282**, pp.1-20.
- 岩山, 末吉 2007 一般化された2次元流体系における平行流の安定性. 日本流体力学会年会 2007 講演論文集.
- Iwayama, T., Shepherd, T. G. and Watanabe, T. 2002 An 'ideal' form of decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **456**, pp.183-198.
- Pierrehumbert, R. T., Held, I. M. and Swanson, K. L. 1994 Spectra of local and nonlocal two-dimensional turbulence. *Chaos, Solitons and Fractals* **4**, pp.1111-1116.
- Smith, K. S., Boccaletti, G., Henning, C. C., Marinov, I., Tam, C. Y., Held, I. M. and Vallis, G. K. 2002 Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. *J. Fluid Mech.* **469**, pp.13-48.
- Watanabe, T. and Iwayama, T. 2004 Unified scaling theory for local and non-local transfers in generalized two-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, pp.3319-3330.
- Watanabe, T. and Iwayama, T. 2007 Interacting scales and triad enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E* **76**, 046303-046314.