数理解析研究所講究録
第1609巻 2008年 169-181

ホワイトノイズ超汎関数の解析における無限次元の扱い

飛田　武幸

平成19年10月16日

AMS Subject Classification 60H40 White Noise Theory

1　前書き

はじめに、何故このようなタイトルで報告するのかを説明したい。
ホワイトノイズ解析は二つの大きな特徴を持っている。それは

(1) ホワイトノイズ超汎関数が導入され、主要な役割を果たす。

(2) 無限次元回転群による調和解析の側面をもつ。

である。もともと、ホワイトノイズ解析は、広く一般のランダムな複雑系を解析的に扱うことを目的とする確率解析を系統的に設定しようとして提唱されたものである。そのため、古典解析学にならって、まず

i) 変数系を確定し、

ii) その関数のクラスを定め、さらに

iii) 微分・積分を主とする演算を考えるのが理論的な順序であろう。

これに加えて

iv) 応用とか、他分野との連携

が続く。実際の展開では、応用から motivation が得られたりして、i) – iv) の順序は前後するけれども、理論的な展開は以上のようである。

これを標語的に言えば

Reduction → Synthesis → Analysis → (Application etc.)

となろう。

変数のシステムを決めるのが Reduction の段階である。ランダムな変数のシステムを確率解析的に扱うのに、好都合な場合は独立変数のシステムになっている場合である。しかもそれらが「素」な要素からなる場合ならより好都合である。素というのは、大まかにいって、それ以上独立な要素に分解できない場合である。与えられたランダムなシステム（一般には複雑な系）を、それと同じ情報を持つシステムに分解するのが Reduction の段階である。同じ情報を持つということも、きちんと定義しないといけないことであるが、とりあえず直感的に理解しておきたい。

与えられた複雑系は、いま求めた素な独立な変数系の関数として表される。それは、元の系と同じ情報をもつからである。すなわち synthesis の段階になる。次はそのような関数について、変数（それは独立確率変数）に関する微分が定義できる。古典解析と違って変数がランダムであるから、それなりの注意深い扱いが必要となるのは当然である。このような解析法は古典確率解析には帰着されない。積分や一般の作用素も扱うことになり、第三のステップである Analysis の段階になる。こうして我々の確率解析 が始まる。

当然種々の応用があり、また数学の他分野、量子ダイナミックス、分子生物、情報理論（情報社会学も含めて）などとの連携が活発であり、そちらかからのフィードバック も期待される。実際その通りである。

新しいアプローチを提唱しているだけに、そこには、いくつかの基本的な問題点が見出される。例えば

a) 変数系としてとったものは、通常の確率変数ではないことが多い。たとえば、変数が連続無限個あるような場合である。可算個なら問題ないが。

b) 微分の定義。ランダムな変数で、しかも通常の確率変数でないものを変数として微分することが厳密な意味で可能であるか？

c) 何らかの意味で積分が定義できて、初等微積分のように、微分と対応するようにできるか？　閉じた微積分の体系ができるかが問題になる。

これらのことはホワイトノイズ解析の現状で解決しているはずであるが、この解析の発展につれて、基礎の問題として、あらためて見直すことが求められている。この際クリアーにしたいことは、上の a), b), c) をまとめて考える方向をきめ、解決することである。

2 Innovation について

本節の内容は、些か elemental な表現になってしまうが、**Reduction** の立場から議論をすすめるとき、どうしても無限次元の概念の正確な理解が必要となってくる。典型的であるランダムな複雑系は [確率過程] である。その Reduction の有効な方法は、innovation を構成することになる。そのための手法は、以下のようである。そこから必然的に無限次元を注意深く扱わねばならないことが見えてくる。時間のパラメータにより、無限次元の扱いにおおきな差異があらわれる。以下でそれを見よう。

はじめに時系列 $X_n, n \geq 0$, の場合を考える。独立確率変数系 $\{Y_n, n \geq 0\}$ は次の性質を充たすとする。任意の n について Y_n は $\{X_k, k \leq n\}$ の関数であり、$\{X_k, k \leq n-1\}$ と独立、しかも $\{X_k, k \leq n\}$ と $\{Y_k, k \leq n\}$ とは同じ情報をもつ（この条件の正確な記述は $\sigma - field$ の同等性による)。

そのような $\{Y_n, n \geq 0\}$ が得られたら（いつでも求まるとは限らないが)、X_n は, ある関数 f があって

$$X_n = f(Y_k, k \leq n; n)$$

と表わされるはずである。このとき、時刻についての causality が成り立っていることは重要な着眼点である。この系 $\{Y_n, n \geq 0\}$ が **innovation** である。

パラメータが Z, すなわち $n = -\infty$, からであれば、remote past に情報がないこと、すなわち純非決定的であることを仮定する。それからあとは Analysis のステップへと進む。

連続パラメータの場合、すなわち確率過程 $X(t), t \in R$, については、考え方は同様でも、種々の付加的な配慮が必要になる。まず innovation $\{Y(t), t \in R\}$ は各 t について独立ではなくて、各 dt について独立な系とする。その意味は確率超過程で、各時点で独立ということである。直観的にいえば、テスト関数で smear したものが普通の確率変数になり、台が異なる二つのテスト関数から得られたものは独立であるとする。 また $Y(t)$ はベクトル値も許す。その他、causality があること、$X(t)$ と情報を共有すること、 純非決定的であること、さらに、この過程が可分であること等を仮定する。

Innovation ができたら、元の $X(t)$ は, ある関数 f があって、

$$X(t) = f(Y(s), s \leq t, t)$$

と表わされる。

パラメータの連続性から、離散のときと違って、制約をうける。詳細は省いて、典型的な innovation としては加法過程の時間微分がある。さらに標準

的なものとして、時間的に一様な Lévy 過程の時間微分を取り上げることができる。この Lévy 過程は Lévy-Itô 分解により ブラウン運動（定数を除き）と複合ポアソン過程に分解できる（文献、佐藤 [11] 参照)。このとき、成分となるブラウン運動と各種の跳びのポアソン過程達はすべて独立である。時間微分をとっても独立性は保たれる。時間的増分が独立な加法過程であるので、結局、標準的 innovation は

i) ホワイトノイズ（ブラウンの時間微分である)、

ii) ポアソンノイズ （各種の跳び)、

の組み合わせとなる。これら成分は素であり、最終的に Reduction が達成できる。

これまで沢山の仮定をしたが、それら仮定の成立を検討することは重要な課題である。

3　確率変数による無限次元の表現

Innovation に示唆されて、対象とする集合の各点に 独立同分布 (i.i.d.) の確率変数を対応させて、それらの系の確率論的な性質により元の集合を表現して、無限次元が潜在的にもつ特徴を調べたい。それを確率解析の考え方に活用したい。このとき集合は確率変数列のパラメータとして具現化されることになる。

(1) パラメータの濃度で分類。

有限個の場合は自明だから省略して、可算無限集合の場合

整列して Z で代表する。

$$Y_n, n \in Z.$$

独立系として、これは、 i.i.d. 系で表現される。

このとき、この系の分布は無限次元分布で、 R^Z 上の直積測度である。これを m とかく。その台は当然 l^2 を内部にして遥か外側にある。

各種の極限定理； 0-1 law, （強） 大数の法則、 domain of attraction など、座標で見たとき測度 m は、$L^2(R)$ などとは違って、先細りしていないことが重要である。Z の各点に同じウエイトをおいたときの話となる。いま

$$E \subset l^2 \subset E^*$$

なる Gel'fant triple をつくる。m は E^* の上の測度とみられるから、この空間の上で定義された関数の扱いは無限次元でも、本質的（要説明）に無限次元解析である。

この事実を背景にした種々の極限定理は確率論の華とされた時代もあった。それは可算確率であった。ほかに Kakutani dichotomy なども理論的にも応用からも興味深い。

[註] 無限の不思議；無限次元球の体積：超高次元では単位球の体積は表面に集中し、また赤道の近くに集中する（球の体積は回転不変であるにも拘わらずこの事実)。これはパズルではない。一旦北極をきめたらこうなると理解するのである。また n 次元で、半径を $\sqrt{n}$ にとれば、n が大きいとき、表面積の 1 次元への射影はガウス分布に近い。

ii) 連続無限集合。

R で代表される。このとき、確率変数系で表現すれば、確率過程 $X(t)$、$t \in R$, を考えることになる。

当面二つの場合を考えられる。

イ）各 t で独立。i.i.d. 系とすれば、$X(t), t \in R$ は独立確率変数系である。その分布は R^R 上の直積測度で、任意の座標の置換で不変である。可分性はない。真に連続無限次元の測度による表現となる。このような確率過程には興味は少ない。

[注意] 真に無限次元は本質的な無限次元とは異なる。

ロ）各 dt で独立。このときは、Gel'fand の意味での各点独立超過程により表現される。その特性汎関数 $C(\xi), \xi \in E$ (E は nuclear space) は ξ の連続関数で、正定値、$C(0) = 1$ であるが、さらに

$$\xi_1(t)\xi_2(t) = 0 \ \rightarrow \ C(\xi_1 + \xi_2) = C(\xi_1)C(\xi_2)$$

をみたす。

このとき、i.i.d. に相当するものは、各点独立定常超過程となる。すなわち、各 $X(t)$ には意味はないが、それを smear したもの、すなわち滑らかなテスト関数 ξ により

$$X(\xi) = \int X(t)\xi(t)dt$$

として正確な意味を持つ。ただし上の右辺は形式的な定義として理解する。すなわち ξ が正確な意味でのパラメータになる。

これでは、パラメータ空間 R が E に変ったことになる。メリットは可分性は見やすくなっている。このように、可分性があるときを 可分連続無限 の場合と呼ぼう。テスト関数で smear しているために、前節で述べたように、各 dt ごとに独立といってよかろう。基本的な例は 前節で触れたようにévy 過程の時間微分で、微分は見本関数ごとにとるものとする。

可分性は次の段階、すなわち関数の解析に進むための大事な要請である。

[註]　各点独立の定義にあるように、t を時間とみて、時間区間が overlap しなければ、二つのランダム量は独立となる。時間区間はいくら狭くてもよいが ξ をきめるために内部がなければならない。象徴的に dt 毎に独立といったのである。このことと、$\dot{B}(t)$ がそれ自身意味をもって独立になることとは区別しなければならない。そこには、区間が 1 点に近づく位相の配慮が必要である。その意味で イ）とは厳格に区別される。$dB(t)$ と $\dot{B}(t)dt$ との違いにも注意したい。

iii) 円周 S^1, または [0,1] の場合。

円周をパラメータ θ で表示して、各 $d\theta$ ごとに独立とすると、ガウス型の確率測度をとれば、ii) と大差はない。しかし次節に述べるブラウン運動（或いはホワイトノイズ）の Lévy による構成法はパラメータ空間 [0,1] で行われ、極めて深い意味をもつことを注意する。たとえば、Analysis のステップに到り、微分作用素を定義するとき、連続時間 t をパラメータに持つ微分、実は Fréchet （汎関数）微分 に対応するものが自然なものとして現れ、ホワイトノイズ解析で基本的な役割を果す。

またポアソンノイズの場合は [0,1] に制限するために隠れた特性などが記述できることになり、[0,1] の選択は極めて興味深い（文献 [12] 参照)。

ところが、同じコンパクト空間でも、パラメータを S^1 としたときは、フーリエ解析が自然に採用され、ヒルベルト空間も、$\sin n\theta$ や $\cos n\theta$ が登場し, 座標でみて先細りになってしまう。しかし、ガウス型のノイズを表現に用いれば、このヒルベルト空間に影響されて、可算個のベースを持つ空間が用いられ、微分も、自然に可算個の Gâteaux 微分が使われる。それは真のホワイトノイズ解析とはならない。

iv) $\mathbf{f}$ 関数濃度。

関数空間を $\mathbf{f}$ とする。任意の $f \in \mathbf{f}$ に対して Y_f が対応して系 $\{Y_f, f \in \mathbf{f}\}$

は独立確率変数系をなす。定常性にあたる性質を仮定すれば、その確率分布は R^{R^R} 上の直積測度である。

こんなときに、artificial なもの以外に有意義なものがあるのだだろうか？

4 可分連続無限次元の場合

、

I. 存在について

$\dot{B}(t)$ は普通の確率変数ではなく、テスト関数で smear して、超過程とみなさなければ意味がなかった。しかし $\dot{B}(t)$ そのものに何とかして意味がつかないだろうか？ それは Reductionism からの要請でもある。 以下はその疑問に答えるものである。

ホワイトノイズを smear したものを、あるいはブラウン運動自身を変数とする非線形関数で、分散有限なものの作る空間 (L^2) はヒルベルト空間になる。 特に、それら変数の n 次のエルミート多項式全体の張る部分空間を H_n とおけば、いわゆる Fock 空間が得られる：

$$(L^2) = \oplus_0^\infty H_n.$$

そこで、次の同型対応が わかっている：

$$H_n \cong \hat{L}^2(R^n).$$

ただし $\hat{L}^2(R^n)$ は対称な関数からなる $L^2(R^n)$ の部分空間であり、同型対応は定数 $\sqrt{n!}$ を無視する。

無限次元と近似について。

この準備のもとに、系 $\{\dot{B}(t), t \in R\}$ が R を表現する独立変数系と見なされることを示そう。

1) $\dot{B}(t)$ の近似。

それは $\frac{\Delta B}{\Delta}$ で近似されるという。そのことを主張するのなら $\dot{B}(t)$ の住む空間（実は後出の $H_1^{(-1)}$ である）をあらかじめ作っておかなければならない。それはブラウン運動の関数からなるヒルベルト空間 (L^2) の部分空間ではない。$\dot{B}(t)$ の複雑な関数を扱うときは formal な扱いではすまないから、そのきちんとした定義をして、それに identity を与えなければならない。 単

純な非線形関数 $\dot{B}(t)^2$ を定義するときさえ然りである。単純な２乗ではなく renormalization を必要とする。

2) 各点独立超過程に対する Gel'fand の立場。

定義は特性汎関数によるのが一つの自然な方法であろう、ホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ の場合でいえば、既知の概念を用いて、smeared variable $\dot{B}(\xi)$ を考える。 ただし ξ はテスト関数。そこで特性汎関数

$$C(\xi) = E(\exp[i\dot{B}(\xi)])$$

を用いて $\dot{B}(t), t \in R,$ の分布を超関数空間上に定まる。その見本関数を x と書けば、それは超関数で、 t における値 $x(t)$ は定義されない。すなわち、従来の枠組では $\dot{B}(t)$ は定義されていない。

3) $\dot{B}(t)$ に **identity を与える** ことがホワイトノイズ解析のスタートであった。

まず Fock space における H_1 は

$$H_1 = \{\dot{B}(f), f \in L^2(R)\} \ \cong \ L^2(R)$$

であるが、この同型対応をを拡張し, order -1 のソボレフ空間 $K(R)^{-1}$ をとり

$$H_1^{(-1)} \ \cong \ K(R)^{-1}$$

を達成する。Delta 関数 δ_t は $K(R)^{-1}$ に属するから　$\dot{B}(t)$ 達を $H_1^{(-1)}$ の正規のメンバーとすることができる。この H_1 と $H_1^{(-1)}$ との区別を明瞭にしなければ怪我をすることになる。$\frac{\Delta B}{\Delta}$ は H_1 の位相では　$\dot{B}(t)$ に近づけないことに注意する。

$\dot{B}(t)$ 達の非線形関数については、各次数の homogeneous chaos, i.e. multiple Wiener integrals 毎に、対称ソボレフ空間 の助けを借りて, 定数を除き

$$H_n^{(-n)} \ \cong \ \hat{K}(R^n)^{-(n+1)/2}$$

により、ホワイトノイズの n 次超汎関数空間 $H_n^{(-n)}$ を定義する。ただし, $n \geq 2$ では、いわゆる *renormalization* の技法を必要とする。すなわち n 次 Wick 積

$$: \Pi_{j=1}^{n} \dot{B}(t_j) :$$

を用いる。

以上は ホワイトノイズ解析の一つの重要なポイントである。

ホワイトノイズ超汎関数の空間では、通常のベクトル空間のように次元を用いることは適当ではないが、次の定理がなりたつ。

定理 **1** n 次 Wick 積の全体は $H_n^{(-n)}$ で total である。

証明はソボレフ空間の定義から明らか。

[註]　特に $H_1(-1)$ の場合。系 $\{\dot{B}(t), t \in R\}$ の任意の有限個は $H_1(-1)$ において 1 次独立なベクトルである。これから $H_1(-1)$ が連続無限次元ベクトル空間であるというのは不適切であろう。

同様にポアソン過程 $P(t)$ の時間微分で得られるポアソンノイズ $\dot{P}(t)$ についても並行した議論ができる。

また、跳びが 1 でないポアソン過程は $P(t)$ と同等（分布が同等）であるので、繰り返さない。

こうして Lévy 過程の微分を innovation とする確率過程の Reduction がすんだ。このとき innovation の張る空間は勿論無限次元であるが、ガウス型のときと同様に連続無限次元という言葉は避けたい。

II. 具体例の比較

表題のケースで、代表的に、ホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ とポアソン・ノイズ $\dot{P}(t)$ をとりあげて、比較対照しながら、ランダムな無限次元を考察する。

i) 情報量の比較

二つのノイズを情報量の立場から比較する。定常であるため、dt 時間の情報を比較すればよい。

イ）分散（エネルギー）一定として。ガウス分布が最大のエントロピーをもつ。すなわちホワイトノイズである。

ロ）平均を一定（たとえば $\frac{1}{\lambda}$）とすれば、密度関数が $\lambda e^{-\lambda t}$ の指数分布が最大エントロピーをもつ。ところがポアソン過程のとき $dP(t)$ の分布は dt の高次の項を除き $P(dP(t) = 0)$ で近似される。それは $e^{-\lambda dt}$ である。密度関数は指数分布のそれと一致する。

ii) 構成法の比較
見本関数を直接構成する。

イ）ホワイトノイズ（ブラウン運動）　Lévy の interporation　による構成法（近似法でもある）。

T_n を 2 進数 $k/2^{n-1}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ の集合とする。 $T_0 = \cup_{nge1} T_n$ とおく。

構成 $\{Y_n = Y_n(\omega)\}$ は 確率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上の標準ガウス分布に従う独立確率変数列とする。 $\{X_1(t)$ を

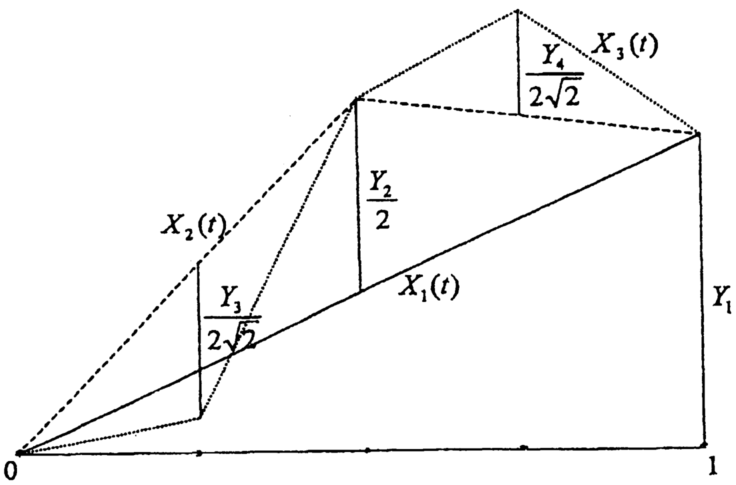
$$X_1(t) = tY_1.$$

で定める。以下帰納法による。

確率過程列 $X_j(t) = X_j(t,x), j \leq n,$ が構成されたとする。このとき, $X_{n+1}(t)$ をつぎのように定義する：

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(t) &= X_n(t), \quad t \in T_n, \\
X_{n+1}(t) &= \frac{1}{2}(X_n(t+2^{-n}) + X_n(t-2^{-n})) + 2^{(n+1)/2}Y_k, \\
& \quad\ t \in T_{n+1} - T_n, \ k = k(t) = 2^{n-1} + (2^n t + 1)/2, \\
X_{n+1}(t) &= (k+1-2^n t)X_{n+1}(k2^{-n}) + (2^n t - k)X_{n+1}((k+1)2^{-n}), \\
& \quad\ t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}],
\end{aligned}$$

下図参照。



この極限を $\tilde{X}(t)$ と書く. それは、平均０で、独立増分をもち

$$E(|\tilde{X}(t) - \tilde{X}(s)|^2) \leq |t-s|,$$

$$Cov(\tilde{X}(t), \tilde{X}(s)) = t \wedge s.$$

がわかる。

さらに、殆どすべての ω に」ついて

$$\lim_{n \to \infty} X_n(t, \omega) = X(t, \omega),$$

が存在し、それは $\tilde{X}(t)$, a.e. (μ) に等しい。

以上をまとめて

定理 2 極限の過程 $X(t,\omega), t \in [0,1]$, は確率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上のブラウン運動である。

Interporation による構成法の特徴。 ブラウン運動の構成法はいろいろあるが、我々は上のような interporation による Lévy の方法にこだわりたい。

1. 逐次（前の近似を活かして、射影的に）近似である。

2. 時間的に一様に近似している。

3. 可分連続無限の意味を理解させる。

4. 微分をとれば、ホワイトノイズの近似でもある。

5. 連続無限個の微分作用素を導入する裏づけができている。

など。

ロ）ポアソン・ノイズを指数分布をもつ独立確率変数列により構成すること。

これも確率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上で行う。

$X_n(\omega), n \geq 0$ を、密度関数が $\lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$, の、$[0,\infty)$ の指数分布に従う独立確率変数列とする。ここで、λ は正定数である。$P(t,\omega)$ を

$$(\omega; P(t,\omega) \leq n) = (\omega; \sum_{0}^{n} X_k > t)$$

によって定義する。

これを t で微分してポアソン・ノイズが構成される。パラメータ空間を [0,1] に制限しよう。

定理 3 ポアソン・ノイズの configuration space を跳びの個数で分割すると、各分割でサンプルは独立で一様に分布する δ-関数の集合に対応する。

文献 [12] 参照。可分なことは、これからもわかる。

構成方法のアイデイアはブラウン運動の Lévy による方法と対比されるが、双対性を示唆するところもあることに注意したい。

ハ）複合ポアソン過程 (ノイズ) の構成。

やはり、連続無限個の独立なポアソン過程の複合であり、連続無限に拘らざるをえない。separability を見るために u-軸の分割の細分を可算個ですます構成方法を考えなければなるまい。

一般的な注意であるが、複合ポアソン過程から、見本関数を見て、素な構成要素である各ジャンプ u のポアソン過程を取り出すというが、その intensity までをきめるのは瞬間的にはできない。例えば微小でも一定時間の行動を見なければならない。

5 Things to be done.

1. ブラウン運動の軌跡について、1次元でも、その法則の細かいことが知られている。注意したいことは、そこに unharmonic ratio がしばしば現れていることである。そして多次元パラメータの Lévy のブラウン運動において、対応するノイズの conformal invariance などが示される。これらに関連して、より詳しい特性を知りたい。

2. 多次元値ブラウン運動については、より興味深い invariance が出てくるであろう。ホワイトノイズの言葉で設定したい。ポアソン型の場合も、特性をみるためにはノイズにした方が扱いやすい。

3. 多次元（d-次元）パラメータの場合 R^d の表現になる。固有のものが欲しい。

4. ガウスとポアソン両ノイズ間の Duality について（小嶋　泉　先生の suggestion による).

あとがき

１０年以上も前の話になる。「無限次元」について、より形而上学的な立場からの、考え方についての批判を得たいと考え、哲学者の吉田民人先生の門を敲いた。異夢異床の感があり、大変失礼なことになったが、結局「それは貴方自身が解決することでしょう」というお話であった。それにもかかわらず、会話の中から教えられたところは多く、大変有難く思っている。今回の報告も、そのときのことを思い出しながら話をさせて頂きました。

参考文献

[1] W. Feller, An introduction to probability theory and its application. vol.1 (1950) (1967), vol.2 (1966). 邦訳あり。

[2] T. Hida, Stationary stochastic processes. Princeton Univ. Press. 1970.

[3] 飛田武幸、ブラウン運動。(1975) 岩波書店、第 3 刷 2007; 英訳 (1980), Springer-Verlag.

[4] T. Hida, Analysis of Brownian functionals. Carleton Math. Notes no. 13, 1975

[5] 飛田武幸、ホワイトノイズ解析入門。東京理科大学 講義ノート。June, 2007.

[6] T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals. Worlde Scientific Pub. Co. 2008.

[7] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1937.

[8] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948. 2éme ed. 1965.

[9] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1951.

[10] J.L. Lions, El planeta tierra el papel de las matematicas y de los super ordenadores. Inst. de Espana, Espasa Calpe. 1990.

[11] 佐藤健一、加法過程、紀伊国屋数学叢書　33, 1990.

[12] Si Si, Effective determination of Poisson noise. IDAQP vol. 6 (2003), 609-617.

[13] Si Si, An aspect of quadratic Hida distributions in the realization of a duality between Gaussian and Poisson noises. to aqppear.