数理解析研究所講究録
第1612巻 2008年 101-110

等変 HOPF 型定理へ向けての一考察

京都府立医科大学医学部・長崎　生光 (Ikumitsu Nagasaki)
Department of Mathematics
Kyoto Prefectural University of Medicine

1. はじめに

連続写像の (自由) ホモトピー集合 $[X, Y]$ を決定することは一般には難しい問題だが，n 次元閉多様体 M から n 次元球面 S^n への連続写像の場合には Hopf の定理あるいは Hopf の分類定理と呼ばれる次の結果がよく知られている．

定理 1.1. M を向き付け可能な n 次元連結閉多様体，S^n を n 次元球面とする．このとき，$[f] \mapsto \deg f$ で定義される写像

$$\deg : [M, S^n] \to \mathbb{Z}$$

は全単射である．

注意. M が向き付け不可能な場合も，mod 2 写像度を考えれば，$\mathbb{Z}_2$ への全単射が成り立つ．

同変トポロジーの観点から，Hopf の定理の同変化である同変 Hopf 型定理が多くの研究者により研究されてきた．本稿では，同変写像の中でも特に等変写像 (isovariant map) に注目し，等変写像の分類定理すなわち等変 Hopf 型定理について，現時点でわかっていることをいくつか報告したい．なお，本研究は牛瀧文宏氏（京都産業大学）との共同研究である．

2. 同変 HOPF 型定理

従来，同変 Hopf 型定理が多くの研究者により研究されてきた．つまり，M を G 多様体としたとき，適切な条件の下で，同変ホモトピー集合 $[M, SV]_G$ を決定するという問題である．ここで SV は G の表現空間 V の単位球面を表す．1970 年, G. Segal [21] は有限群の表現球面 SV の同変安定ホモトピー群 $\{SV, SV\}_G$ はバーンサイド環

2000 *Mathematics Subject Classification*. 57S17, 55M35, 55M25.

と同型であることを発表し，同変ホモトピー論への道をひらいた．後に tom Dieck [2] はコンパクト・リー群のバーンサイド環を定義したが，Segal の結果はコンパクト・リー群においても成り立つことが知られている．一方，Rubinsztein [20] は同変ホモトピー集合 $[SV, S(V \oplus U)]_G$ を考察し，ある種の同変 Hopf 型定理を得た．その後，tom Dieck-Petrie [4, 5], Tornehave [22], Laitinen [12], Kushkuley-Balanov [11], Ferrario [10] らが同変 Hopf 型定理に関連する研究を行った．その結果として，良い条件の下では同変写像の同変ホモトピー類は写像度（写像度関数）により区別できることがわかる．これは上記の Hopf の定理の単射性の一般化といえる．

一方，全射性は一般にはいえない．つまり，写像度の値には制限がつく．もっとも簡単な場合でその例を述べよう．位数 2 の巡回群 C_2 が $\mathbb{R}^n$ に対心的に作用している表現を U とし，表現球面 SU を考える．このとき，次が成り立つ．

命題 2.1. $\deg : [SU, SU]_{C_2} \to \mathbb{Z}$ は単射で $\operatorname{Im}\deg = 1 + 2\mathbb{Z}\ (\subset \mathbb{Z})$ である．

実際，C_2 写像 f すなわち $f(-x) = -f(x)$ をみたす連続写像（奇写像）の写像度が奇数であることは Borsuk [1] をはじめとしてよく知られた事実である．また，すべての奇数が写像度で実現できることは，この場合には，C_2 写像を直接構成することでわかる．

注意. 一般に写像度の取り得る値は，群作用だけでなく多様体の構造にも制限されので，その決定は結構難しい問題である．たとえば [7, 8, 9] などを見られたい．

このように写像度を単純に対応させたのでは全射にならないが，すぐわかるように次のような対応を考えることで全射性がいえる．

系 2.2. $D([f]) = (\deg f - 1)/2$ と定義すると，$D : [SU, SU]_{C_2} \to \mathbb{Z}$ は全単射である．

これは同変写像の分類定理（同変 Hopf 型定理）の一つと見なされるが，我々はこれを等変写像で考えたい．

3. 等変写像と Borsuk-Ulam 型定理

G はコンパクト・リー群とし，X, Y を G-空間とする．同変写像 $f : X \to Y$ が，アイソトロピー群を保つとき，すなわち $G_x = G_{f(x)}\ (\forall x \in X)$ をみたすとき，f を等変写像(isovariant map) という．すなわち等変写像は G 空間の軌道型を保存する同変写像であり，G 空間の分類などの研究に重要なものである ([23])．同変ホモトピーが等変写像でもあるとき，等変ホモトピーという．等変写像の等変ホモトピー

類の集合を $[X,Y]_G^{\mathrm{isov}}$ で表し，等変ホモトピー集合という．等変ホモトピーは（同変）ホモトピー論の観点から Dula-Schultz [6] らの研究があるが，我々は Hopf 型定理の観点から同変ホモトピー集合を考察する．等変 Hopf 型定理とは，X を G 多様体あるいは G-CW 複体，Y を表現球面 SW としたときの $[X,SW]_G^{\mathrm{isov}}$ に関する種々の結果の総称である．

等変写像は存在するとは限らないのではじめに等変写像の存在問題について考えたい．つまり $[X,SW]_G^{\mathrm{isov}}$ は空か空でないかの問題である．この問題は，Borsuk-Ulam 型定理と密接な関係がある．古典的な Borsuk-Ulam の定理を等変写像の観点から述べると次のように述べられる．

定理 3.1. C_2 が対心的に作用する球面 S^m, S^n を考える．等変写像 $f:S^m\to S^n$ が存在するならば $m\le n$ が成り立つ．したがって，$n>m$ ならば等変写像は存在しない．

注意．上記の結果は通常同変写像に関して述べることが多いが，今は作用が自由なので，同変写像と等変写像は同じ概念になる．

このように，Borsuk-Ulam 型定理は同変写像や等変写像の非存在性を主張する定理とも解釈できる．等変写像に関する Borsuk-Ulam 型定理の研究は Wasserman [24] に始まるが，その後，[13, 14, 15, 17] などで研究されている．

[24] からの一つの帰結として以下の結果が知られている．

命題 3.2. G は可解コンパクト・リー群，V,W は G 表現とする．このとき等変写像 $f:V\to W$ が存在するならば

$$\dim V-\dim V^G\le \dim W-\dim W^G$$

が成り立つ．

定義. 上記の結果が成り立つ群を Borsuk-Ulam 群 (BUG) と呼ぶ．

従って可解コンパクト・リー群は Borsuk-Ulam 群である。非可解群の Borsuk-Ulam 群も存在する ([24]) が，非 Borsuk-Ulam 群の例は知られていない．

[17] では次のような等変 Borsuk-Ulam 型定理が示されている．

定理 3.3 ([17, Corollary B]). G は有限群，M は m 次元 mod $|G|$ ホモロジー球面とし，G は M 上に自由に作用しているとする．W は G のユニタリー表現とし SW をその表現球面とする．このとき，G 等変写像 $f:M\to SW$ が存在するならば

$$\dim M+1\le \dim SW-\dim SW^{>1}$$

が成り立つ．ここで $SW^{>1}$ は SW の特異集合（i.e. $SW^{>1} = \bigcup_{1\neq H\leq G} SW^H$）であり，$SW^{>1} = \emptyset$ ならば $\dim SW^{>1} = -1$ とおく．

注意．この結果は，W が直交表現としても成り立つ．

同様に S^1 作用に関しては [14, Proposition 1.2] を用いて次が示される．

命題 3.4. M は有理ホモロジー球面で S^1 が自由に作用しているとする．W は S^1 直交表現とする．このとき S^1 等変写像 $f : M \to SW$ が存在するならば

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ．

ここではさらに $G = \mathrm{Pin}(2)$ $(= N_{S^3}(S^1))$ の自由作用についても同様の結果が成り立つことを示したい．$\mathbb{H}$ を四元数体とし，$S^1 = \{z = a + bi \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 = 1\}$ とおくと

$$\mathrm{Pin}(2) = \langle z, j \mid z \in S^1 \rangle \subset \mathbb{H}$$

である．$\mathrm{Pin}(2)/S^1$ は位数 2 の巡回群で生成元は j によって代表される元である（b とおく）．射影を $p : \mathrm{Pin}(2) \to \mathrm{Pin}(2)/S^1$ とすると $p(j) = b$ である．

定理 3.5. M は有理ホモロジー球面で $\mathrm{Pin}(2)$ が自由に作用しているとする．W は $\mathrm{Pin}(2)$ 直交表現とする．このとき $\mathrm{Pin}(2)$ 等変写像 $f : M \to SW$ が存在するならば

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ．

はじめに次のことに注意する．

補題 3.6. 上記の状況の下，$\dim SW^{>1} = \dim SW^{C_p}$ となる素数位数の巡回群 $C_p \leq S^1$ が存在する．

証明．非自明な閉部分群 H について $H \cap S^1 \neq 1$ である．実際，$H \cap S^1 = 1$ とすると $p(H) \cong H \neq 1$ となり，したがって $H \cong C_2$ となるが，$\mathrm{Pin}(2)$ の位数 2 の部分群は $\{\pm 1\} \leq S^1$ しかないので $p(H) \neq 1$ に矛盾する．したがって $C_p \leq H \cap S^1$ となる素数位数の巡回群 C_p が存在し，特に $SW^H \subset SW^{C_p}$ となる．このことから

$$SW^{>1} = \bigcup_{1\neq H\leq G} SW^H = \bigcup_{1\neq C_p\leq S^1} SW^{C_p}$$

がいえる．右辺は可算個の和集合であるので，$\dim SW^{>1} = \max_p\{\dim SW^{C_p}\}$ となり，ある素数 p が存在して $\dim SW^{>1} = \dim SW^{C_p}$ となる．□

注意. G が有限群または S^1 のときでも上の補題は成り立つが，一般のコンパクト・リー群では成り立つとは限らない.

定理 3.5 の証明. $G = \mathrm{Pin}(2)$ とする．補題 3.6 のような $C_p \leq S^1 < G$ をとる．C_p は G の正規部分群になるので W^{C_p} は G 表現とみなされ，G ホモトピー同値写像 $h : SW \setminus SW^{C_p} \to S(W^{C_p})^\perp$ が存在する．ここで $(W^{C_p})^\perp$ は W^{C_p} の W における G 直交補空間を表す. $f(M) \subset SW \setminus SW^{C_p}$ より，G 写像 $g = h \circ f : M \to S(W^{C_p})^\perp$ が存在する．S^1 に作用を制限することで，g を S^1 写像と考えると S^1 作用の Borsuk-Ulam 型定理より，

$$\dim M \leq \dim S(W^{C_p})^\perp = \dim SW - \dim SW^{C_p} - 1$$

が成り立つ．$\dim SW^{C_p} = \dim SW^{>1}$ より

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ. □

ここで S^1 作用の Borsuk-Ulam 型定理とは以下のような結果である.

命題 3.7. S^1 が有理ホモロジー球面 M, N に滑らかに作用し，$M^{S^1} = N^{S^1} = \emptyset$ とする．このとき，S^1 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ が成り立つ.

以上のことから

系 3.8. $d = \dim SW - \dim SW^{>1}$ とおく．命題 3.3, 3.4 または定理 3.5 の状況において，$\dim M > d - 1$ ならば $[M, SV]_G^{\mathrm{isov}} = \emptyset$ である.

次に不動点をもつ半自由作用の場合を考える．この場合 M は連結で滑らかな G 多様体とする.

命題 3.9. $G \neq S^3$ とする．G が M 上に半自由かつ滑らかに作用し，G 不動点をもつとする．このとき，等変写像 $f : M \to SW$ が存在するならば

$$\dim M - \text{min-dim}\, M^G \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ．ここで min-dim は連結成分の次元の最小値を表す.

証明. スライス定理より，不動点集合の法表現には G は（原点以外に）自由に作用している．したがって，G はある球面に自由かつ線形な作用をもつ群でなければならない．このような有限群は [25] で分類されている．[24] の結果を利用するとそのような有限群は Borsuk-Ulam 群になることがわかる．一方，有限群でなければ,

$G = S^1, \mathrm{Pin}(2), S^3$ しかない．$S^1, \mathrm{Pin}(2)$ は可解なので Borsuk-Ulam 群である．(S^3 についてはいまだに不明である．)

M^G の連結成分のうち最小の次元をもつものを M^G_α とし，$x \in M^G_\alpha$ をとる．スライス定理より，ある G 表現 U, V と G 同相な x および $f(x)$ における G 不変近傍 O, O' が存在する．G 同相写像を $i : O \to U$, $j : O' \to V$ とする．O を十分小さくとれば $f(O) \subset O'$ としてよいので $g = j \circ f \circ i^{-1} : U \to V$ とおくとこれは G 等変写像である．補題 3.6 およびその下の注意により $\dim SW^{>1} = \dim SW^C$ となる巡回群 C がとれる．この C に作用を制限し，定理 3.2 を用いると

$$\dim U - \dim U^C \leq \dim V - \dim V^C$$

が成り立つ．G 作用が半自由であることに注意すると

$$\dim U - \dim U^C = \dim U - \dim U^G = \dim M - \text{min-dim} M^G$$

であり

$$\dim V - \dim V^C = \dim SW - \dim SW^C$$

であるので

$$\dim M - \text{min-dim} M^G \leq \dim SW - \dim SW^C$$

が成り立つ．故に

$$\dim M - \text{min-dim} M^G \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ． □

4. 等変ホモトピー集合

本節では，はじめに等変ホモトピー集合を次の条件下で考察する．G は有限群とする．M は連結な有向閉 C^∞ 多様体とし，G は M 上に滑らかで自由に作用してとする．W は G のユニタリー表現とする．さらに，Borsuk-Ulam 型不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

を仮定する．

G は M 上自由に作用しているので，$SW_{\mathrm{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ とおくとき

$$[M, SW]^{\mathrm{isov}}_G = [M, SW_{\mathrm{free}}]_G$$

であることに注意する．同変障害理論によって $[M, SW_{\mathrm{free}}]_G$ を調べる．

$$\mathcal{A} = \{H \in \mathrm{Iso}(W) \mid \dim SW^H = \dim SW^{>1}\},$$

$$\mathcal{A}/G = \{(H) \mid H \in \mathcal{A}\}$$

とおく．まず，[17, 18] より，次のことがわかる．

命題 4.1. $d = \dim SW - \dim SW^{>1}$ とおく．

(1) SW_{free} は $(d-2)$ 連結である．さらに，$d=2$ のときは 1 単純である．

(2) $\pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}}) \cong_G H_{d-1}(SW_{\mathrm{free}};\mathbb{Z}) \cong_G \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G}\mathbb{Z}[G/NH]$.

$\dim M < d-1$ のときは，SW_{free} の $(d-2)$ 連結性より，次のことがわかる．

命題 4.2 ([18]). $\dim M < d-1$ のとき

$$[M, SW]_G^{\mathrm{isov}} = [M, SW_{\mathrm{free}}]_G = \{*\}.$$

証明. 実際，$f, g : M \to SW_{\mathrm{free}}$ を G 写像とすると $f \coprod g : M \times \{0,1\} \to SW_{\mathrm{free}}$ は $\dim M + 1 < d$ より G 拡張 $F : M \times I \to SW_{\mathrm{free}}$ をもつ． □

したがって以後は

$$\dim M = d - 1$$

を仮定する．この場合には同変障害理論より次のことが成り立つ．

命題 4.3. G 写像 $f_0 : M \to SW_{\mathrm{free}}$ をとり固定する．任意の G 写像 $f : M \to SW_{\mathrm{free}}$ に対し，G ホモトピーに関する障害類 $\gamma_G(f, f_0)$ を対応させる写像

$$\gamma_{f_0} : [M, SW_{\mathrm{free}}]_G \to \mathfrak{H}_G^{d-1}(M;\pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}}))$$

は全単射である．ここで $\mathfrak{H}_G^{d-1}(M;\pi_{d-1}(SW_{\mathrm{free}}))$ は [3] で定義されている同変コホモロジーである．

次の定理は G 作用が向きを保つ場合の等変 Hopf 型定理である．証明の詳細は [19] で述べられる予定であるが，[16] には証明の概略が述べられている．

定理 4.4. G 作用が向きを保つとき，多重写像度から誘導される $[M, SW_{\mathrm{free}}]_G^{\mathrm{isov}} = [M, SW_{\mathrm{free}}]_G$ から $\bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G}\mathbb{Z}$ への全単射が存在する．

続いて G 作用が向きを保たないときについても少し考察したい．命題 4.3 により，同変コホモロジーの計算が重要になる．準同型 $w : G \to \{\pm 1\}$ を

$$w(g) = \begin{cases} 1 & g \in G \text{ の作用は } M \text{ の向きを保つ} \\ -1 & g \in G \text{ の作用は } M \text{ の向きを逆にする} \end{cases}$$

で定める．w により，$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}G$ 加群の構造をもつが，それを $\mathbb{Z}_w$ で表す．また，$K_w = \operatorname{Ker} w$ とおく．命題 4.1 より

$$\mathfrak{H}_G^{d-1}(M;\pi_{d-1}(SW_{\text{free}})) \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathfrak{H}_G^{d-1}(M;\mathbb{Z}[G/NH]) \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} H^{d-1}(M/G;\{\mathbb{Z}[G/NH]\})$$

に注意する．ここで $\{\mathbb{Z}[G/NH]\}$ は $\mathbb{Z}G$ 加群 $\mathbb{Z}[G/NH]$ から定まる M/G 上の局所系である．

局所系を係数にもつコホモロジーのポアンカレ双対性により

$$\begin{aligned} H^{d-1}(M/G;\{\mathbb{Z}[G/NH]\}) &\cong H_0(M/G;\{\mathbb{Z}_w[G/NH]\}) \\ &\cong \frac{\mathbb{Z}[G/NH]}{\langle x - w(g)x \mid x\in\mathbb{Z}[G/NH], g\in G\rangle} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & NH \le K_w \\ \mathbb{Z}_2 & NH \not\le K_w \end{cases} \end{aligned}$$

である．$\mathcal{C} = \{(H)\in\mathcal{A}/G \mid NH \le K_w\}$, $\mathcal{D} = \{(H)\in\mathcal{A}/G \mid NH \not\le K_w\}$ とおくと以下が成り立つ．

定理 4.5. 有限群 G が連結有向閉多様体 M に自由に作用しているとする．W は G のユニタリー表現とする．このとき，

$$[M;SW]_G^{\text{isov}} \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{C}} \mathbb{Z} \bigoplus \bigoplus_{(H)\in\mathcal{D}} \mathbb{Z}_2 \quad (\text{全単射})$$

である．

G 作用が向きを保つときは，$K_w = G$ であるから $\mathcal{C} = \mathcal{A}/G$, $\mathcal{D} = \emptyset$ であり，

$$[M;SW]_G^{\text{isov}} \cong \bigoplus_{(H)\in\mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$$

となる．

例 4.6. $M = S^2\times S^1$ 上に C_2 が S^2 に自由に作用し，S^1 に自明に作用するとする．W は $d=4$ となるユニタリー C_2 表現とする．このとき，$K_w = 1$ より，$[M,SW]_{C_2}^{\text{isov}} \cong \mathbb{Z}_2$ となる．

5. おわりに

今後の問題をいくつか述べて本稿を終えたい．

(1) 定理4.5の対応は同変障害理論から定まるものであるが，自由部分 $\bigoplus_{(H)\in\mathcal{C}}\mathbb{Z}$ は [18] と同様にして多重写像度（の差の商）から定まると予想される．
(2) 一方ねじれ部分 $\bigoplus_{(H)\in\mathcal{D}}\mathbb{Z}_2$ は多重写像度からは決まらない．たとえば例4.6では多重写像度は (mod 2 で考えたとしても) つねに 0 となる． $\bigoplus_{(H)\in\mathcal{D}}\mathbb{Z}_2$ の元を特定する不変量は何か？
(3) M が向き付け不可能な場合はどうか．
(4) M 上の作用が半自由の場合はどうか．

References

[1] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177-190.

[2] T. tom Dieck, *The Burnside ring of a compact Lie group. I*, Math. Ann. **215** (1975), 235-250.

[3] T. tom Dieck, Transformation groups, Walte de Gruyter & Co, Berlin, New York 1987.

[4] T. Dieck and T. Petrie, *Geometric modules over the Burnside ring*, Invent. Math. **47** (1978), 273-287.

[5] T. Dieck and T. Petrie, *Homotopy representations of finite groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **56** (1982), 129-170.

[6] G. Dula and R. Schultz, *Diagram cohomology and isovariant homotopy theory* Mem. Am. Math. Soc. 527, 1994.

[7] H. Duan and S. Wang, *The degree of maps between manifolds* Math. Z. **244** (2003), 67-89.

[8] H. Duan and S. Wang, *Non-zero degree maps between 2n-manifolds* Acta Math. Sin., Engl. Ser. **20** (2004), 1-14 .

[9] Y. H. Ding and J. Z. Pan, *Computing degree of maps between manifolds* Acta Math. Sin., Engl. Ser. **21** (2005), 1277-1284 .

[10] D. L. Ferrario, *On the equivariant Hopf theorem*, Topology **42** (2003), 447-465.

[11] A. Kushkuley and Z. Balanov, Geometric methods in degree theory for equivariant maps, Lecture Notes in Mathematics 1632, Springer,1996.

[12] E. Laitinen, *Unstable homotopy theory of homotopy representations*, Transformation groups, Proc. Symp., Poznań 1985, Lect. Notes Math. 1217 (1986), 210-248.

[13] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, Arch. Math. **81** (2003), 348-359.

[14] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743-757.

[15] I. Nagasaki. *The converse of isovariant Borsuk-Ulam results for some abelian groups*, Osaka. J. Math. **43** (2006), 689-710.

[16] 長崎生光, 等変 Borsuk-Ulam 定理とその周辺, 数理解析研究所講究録 **1575** (2008), 73-87.

[17] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free C_n-manifolds to representation spheres*, Topology Appli., **155** (2008), 1066-1076.

[18] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *On existence of isovariant maps under Borsuk-Ulam type inequalities*, 理解析研究所講究録講究録 **1569** (2007), 28–34.

[19] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Classification of isovariant maps between free G-manifoflds and representation sheres*, in preparation.

[20] R. S. Rubinsztein, *On the equivariant homotopy of spheres*, Dissertationes Math., Warszawa 134 (1976).

[21] G. B. Segal. *Equivariant stable homotopy theory*, Actes Congr. internat. Math. 1970, 2 (1971), 59-63.

[22] J. Tornehave, *Equivariant maps of spheres with conjugate orthogonal actions*, Current trends in algebraic topology, Semin. London/Ont. 1981, CMS Conf. Proc. 2 (1982), 275-301

[23] R. S. Palais, *Classification of G-spaces*, Mem. Am. Math. Soc. 36 (1960).

[24] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appli. **38** (1991), 155–161.

[25] J. A. Wolf, Space of constant curvature, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1984.

E-mail address: nagasaki@koto.kpu-m.ac.jp