

# On injectivity, vanishing, and torsion-free theorems

単射性、消滅、捻れ不在定理について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

藤野 修\*

## 概要

In this note, we explain some generalizations of Kollár's injectivity, vanishing, and torsion-free theorems. These generalizations are indispensable for the log minimal model program for log canonical pairs.

## 目次

1	はじめに	2
2	小平の消滅定理とその一般化	3
3	単射性定理と消滅定理の証明	6
4	特異点の定義	12
5	主結果	13
6	応用	16

---

\*〒 464-8602 名古屋市千種区不老町, e-mail: fujino@math.nagoya-u.ac.jp

このノートでは、コラールの単射性、消滅、捻れ不在定理の一般化のいくつかを説明する。これらの一般化は対数的標準対に対する対数的極小モデル理論に不可欠である。

## 1 はじめに

このノートでは、小平の消滅定理の一般化を考える。最初の2章で、コラールの単射性定理と乗松の消滅定理を思い出す。どちらも小平の消滅定理の自然な一般化である。最初の目標は、コラールの単射性定理と乗松の消滅定理の両方を含む一般化を考えることである。その一つの答えが定理2.9である。個人的には、定理2.9に直接的な解析的証明は存在しないか？という疑問がある。3章では定理2.9もどきに証明を与える。定理2.9を証明するには、さらに特異点解消などの小細工が必要になるので、そのような技術的細部に惑わされないように理想的な状態での単射性定理の証明に話を限定した。ただし、これだけでも十分強力である。ホッジ理論から単射性定理が出るという本質はこの程度の説明で十分であろう。丁寧に説明を書いたつもりである。次の4章では、極小モデル理論で扱われる特異点の定義を思い出す。専門家以外には頭の痛くなる話題だと思うが、後の説明のために最低限の定義は必要であろう。5章では主結果を説明している。かなり人工的な設定に見えるかもしれないが、代数多様体の研究では自然に出てくる設定である。ここで述べた定理はすべてホッジ理論に依存しており、現在のところ、代数多様体に対してしか証明出来ていない。ケーラー多様体の世界や、開円板上に射影的に生えている複素解析空間に対してこれらの定理を一般化するのは、十分意味のあることだと思う。読者の中でチャレンジする人が出てくることを期待する。6章は極小モデル理論への消滅定理の応用を幾つか述べた。詳しくはオリジナルの文献を見ていただきたい。5章の結果が、このような応用を念頭においたものであったと言うことが伝われば十分だと思う。最後の7章では、文献についてコメントをつけておいた。今後の勉強、研究に役立てば幸いである。

今回はダラダラと講演の調子で書いたもので、前から順番に読んでもらいたい。内容はほぼ講演通りである。講演を聞き逃した人も、これを読めば十分である。

このノートでは、多様体はすべて複素数体上で考えることにする。

## 2 小平の消滅定理とその一般化

この章では  $X$  は非特異射影的代数多様体とする。次の定理は全ての定理の出発点である。

**定理 2.1 (小平の消滅定理)**  $L$  を  $X$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0$$

が全ての  $i > 0$  に対して成立する。

**注意 2.2** 小平の消滅定理は元々コンパクトケーラー多様体とその上の正な直線束に対して証明されていた。代数多様体論の立場からは上の形で十分であると思う。

小平の消滅定理の一般化はたくさん知られているが、コラールの単射性定理もそのひとつである。

**定理 2.3 (コラールの単射性定理)**  $N$  を  $X$  上の半豊富 (semi-ample) なカルティエ因子とする。  $s$  を  $H^0(X, \mathcal{O}_X(mN))$  の零でない元とする。  $s = 0$  で定まる  $X$  上の因子を  $D$  と書くことにする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + N)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + N + D))$$

は全ての  $i$  に対して単射である。ただし、上の写像は自然な包含写像  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D)$  から導かれるものとする。

**注意 2.4** コラールはタンケーエフの結果に触発されて上の定理を証明したようである。証明はだんだんと改良されている。ホッジ理論を認めれば比較的簡単に証明することが出来る。3章も見てください。

**注意 2.5** 定理 2.3 では  $N$  は半豊富と仮定したが、  $\mathcal{O}_X(N)$  は曲率が半正定値のエルミート計量を持つ、という少し弱い条件に置き換えることが出来る。証明は調和積分論を用いる。

ここで、定理 2.3 から小平の定理を導いてみよう。

2.6 (コラールから小平)  $m$  を十分大きな正の数とすると、セールの消滅定理より、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + (m+1)L)) = 0$  がすべての  $i > 0$  に対して成立する。 $H^0(X, \mathcal{O}_X(mL))$  の零でない元  $s$  をとってくると、 $\otimes s$  で  $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L))$  は  $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + (m+1)L))$  の部分空間と見なせる。ここに定理 2.3 を用いた。よって、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0$  が  $i > 0$  で成立する。

小平の消滅定理の別の一般化として乗松の消滅定理なる消滅定理がある。

定理 2.7 (乗松の消滅定理)  $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とし、 $L$  は  $X$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) = 0$$

が全ての  $i > 0$  に対して成立する。

ここで一応証明を与えておこう。後に与える証明と対比して頂きたい。

証明 2.8 (小平から乗松)  $S$  の既約成分の個数と多様体の次元についての帰納法を使う。 $S = 0$  のときは小平の消滅定理より明らかに成立する。また、多様体  $X$  の次元が 0 なら、定理は自明である。 $T$  を  $S$  の既約成分の一つとする。このとき、以下の短完全系列を考える。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + S - T + L) \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + S + L) \\ \rightarrow \mathcal{O}_T(K_T + (S - T)|_T + L|_T) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ここでは随伴公式  $(K_X + T)|_T = K_T$  を使った。 $S$  の既約成分の個数についての帰納法より、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S - T + L)) = 0$$

が全ての  $i > 0$  について成立する。また、多様体の次元についての帰納法より、

$$H^i(T, \mathcal{O}_T(K_T + (S - T)|_T + L|_T)) = 0$$

も全ての  $i > 0$  に対して成立する。従って、コホモロジーの長完全系列を考えれば、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) = 0$$

が  $i > 0$  で成立することが分かる。

今回の目標の一つは、コラールの単射性定理と乗松の消滅定理を両方とも含む形での小平の消滅定理の一般化である。一つの答えとして以下の定理がある。本質的な部分はエノーとフィーベックの本 [EV] に載っている。

**定理 2.9**  $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とし、 $N$  は  $X$  上の半豊富なカルティエ因子とする。 $s$  を  $H^0(X, \mathcal{O}_X(mN))$  の零でない元とする。 $s=0$  で定まる  $X$  上の因子を  $D$  と書くことにする。ここで、 $D$  は  $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}$  のどんな既約成分も含まないと仮定する。ただし、 $S = \sum_i S_i$  は  $S$  の既約分解である。つまり、 $D$  は  $S$  の既約成分や  $S$  の交わり部分を含まないとする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + N)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + N + D))$$

は全ての  $i$  に対して単射である。ただし、上の写像は自然な包含写像  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D)$  から導かれるものとする。

定理 2.9 がコラールの定理の一般化になっているのは明らかであるし、コラールの定理から小平の消滅定理を出したのと全く同じ議論で、定理 2.9 から乗松の消滅定理を証明することも出来る。3章で似たような議論をもう一度与えるので、そこも見ていただきたい。素朴な質問でこの章を終えることにしよう。

**質問 2.10** 定理 2.7 に解析的証明はあるのか？つまり、もっと直接的な調和積分論に依存した証明はあるのか？もしくは、 $L^2$ -手法での証明はないのか？

もちろん、他の定理にも応用出来るような自然な解析的証明を要求しているのである。小細工で既知の結果に帰着させるというような方法は期待していない。

**質問 2.11** 3章で定理 2.9 もどきの定理に証明を与える。そこではホッジ理論を使う。定理 2.9 に解析的な直接証明は存在するのであろうか？

これも夢の一つである。ホッジ理論を使った証明は、多様体自身を爆発させたり被覆を取ったりするので、一体全体なぜ証明が上手くいくのか微妙に分かりにくくなるのである。最後の質問は上の質問と密接に関係すると思われる。幾何学的な条件ではなく、解析的な条件で置き換えられるか？という質問である。

質問 2.12 定理 2.9 では  $N$  は半豊富と仮定したが、 $\mathcal{O}_X(N)$  は曲率が半正定値のエルミート計量を持つ、という少し弱い条件に置き換えることが出来るであろうか？

ウォーミングアップはこれぐらいにして、次の話題に進もう。

### 3 単射性定理と消滅定理の証明

この章では、GAGA の原理があるので、コホモロジー群は複素解析的設定で計算する。まず最初にホッジ理論の結果を用意する。

定理 3.1  $V$  を非特異射影的代数多様体とし、 $\Sigma$  を  $V$  上の単純正規交差因子とする。 $\iota: V \setminus \Sigma \rightarrow V$  を自然な開埋め込み射とする。このとき、自然な包含関係  $\iota_*\mathbb{C}_{V \setminus \Sigma} \subset \mathcal{O}_V(-\Sigma)$  は、全射

$$H_c^i(V \setminus \Sigma, \mathbb{C}) = H^i(V, \iota_*\mathbb{C}_{V \setminus \Sigma}) \rightarrow H^i(V, \mathcal{O}_V(-\Sigma))$$

を任意の  $i$  に対して引き起こす。

証明 3.2 (証明の概略)  $\iota_*\mathbb{C}_{V \setminus \Sigma}$  は複体  $\Omega_V^p(\log \Sigma) \otimes \mathcal{O}_V(-\Sigma)$  と擬同型である。この複体からホッジ-ドラームのスペクトル系列をつくる。

$$E_1^{p,q} = H^q(V, \Omega_V^p(\log \Sigma) \otimes \mathcal{O}_V(-\Sigma)) \Rightarrow H_c^{p+q}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

これが  $E_1$  で退化することが言えれば十分である。ここで、 $n = \dim V$  とおく。ポアンカレ双対より、 $H^{2n-(p+q)}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C}) \simeq H_c^{p+q}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})^*$  が成立する。一方、セール双対より、 $H^{n-q}(V, \Omega_V^{n-p}(\log \Sigma)) \simeq H^q(V, \Omega_V^p(\log \Sigma) \otimes \mathcal{O}_V(-\Sigma))^*$  をえる。ドリーニュ (Deligne) のよく知られた結果より、

$${}'E_1^{n-p, n-q} = H^{n-q}(V, \Omega_V^{n-p}(\log \Sigma)) \Rightarrow H^{2n-(p+q)}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

は  $E_1$  で退化する。よって、 $\sum_{p+q=i} \dim E_1^{p,q} = \dim H_c^i(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$  となるので、目的の  $E_1$  退化も得る。

注意 3.3 定理 3.1 で  $\Sigma = 0$  とすると、定理の主張は単なるホッジ分解から従う。つまり、 $\mathbb{C}_V \subset \mathcal{O}_V$  なる包含関係から導かれるコホモロジー群の間の写像

$$H^i(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(V, \mathcal{O}_V)$$

は、すべての  $i$  に対して全射である。以下の定理の証明で、 $S = 0$  の場合はこの注意で得られたコホモロジー群の間の全射で十分である。これはまさしく、コラール自身によるコラールの単射性定理、消滅定理の証明である。コラールの元々の証明は、もっと込み入った物であった。ここで述べたのは、彼自身による簡略化された証明である。

**注意 3.4** 定理 3.1 は、双対定理を用いることにより、ドリーニュのよく知られたホッジ理論の結果に帰着できた。コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造を考えることにより  $E_1$  退化を示す方が普通と思われる。そのためには、重みフィルトレーションを考える必要がある。ここでは証明をサボったわけである。消滅定理の証明には重みフィルトレーションを使う必要はないからである。5章で述べる結果を示すためには、もっと丁寧に混合ホッジ構造を考える必要がある。

次にコホモロジー群の間の単射性定理を示す。これだけでも十分強力な結果で、小平の消滅定理の一般化になっている。 $S = 0$  の時はコラールの結果で、 $S \neq 0$  の時はエノー-フィーベックの結果と思う。正直な話、たくさんの方が貢献しているので、誰の結果と言ってよいのかよくわからない。

**定理 3.5**  $X$  を非特異射影的な代数多様体とし、 $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とする。 $M$  は  $X$  上のカルティエ因子とする。 $X$  上に非特異な因子  $D$  が存在し、 $dD \sim mM$  が成立すると仮定する。ただし、 $d$  と  $m$  は互いに素な正の整数で、 $d < m$  を満たし、 $D$  と  $S$  は共通成分なしで、 $D + S$  は単純正規交差因子だと仮定する。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + M)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + M + bD))$$

はすべての正の整数  $b$  と任意の  $i$  に対して単射である。ただし、上の写像は自然な包含写像  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(bD)$  から導かれた物とする。

**注意 3.6** 定理 3.5 の条件で、 $dD \sim mM$  なる非特異因子  $D$  と  $(d, m) = 1$ 、 $d < m$  を満たす正の整数  $d, m$  の存在は、 $M$  が半豊富なら明らかである。 $m$  として適当な正の整数をとると、線形系  $|mM|$  は自由である。ベルティニの定理を使うと、 $|mM|$  の元として、非特異な因子  $D$  をとることが出来る。つまり、 $D \sim mM$  である。もちろん  $D + S$  が単純正規交差因子で、 $D$  と  $S$  が共通成分をもたないようにすることも可能である。

ここで、 $\mathbb{P}^1$ -束  $\pi : X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) \rightarrow \mathbb{P}^1$  を考える。  $\pi$  の切断を  $E, G$  とする。ただし、  $E^2 = -2, G^2 = 2$  と選んでおく。  $\pi$  のファイバーの一つを  $F$  とすると、  $E + 2F \sim G$  である。  $X$  上のカルティエ因子  $M = E + F$  を考える。すると、  $2M = 2E + 2F \sim G + E$  が分かる。  $D = G + E, S = 0$  とおくと、  $X, S, M, D$  は定理 3.5 の条件を満たす。ただし、  $M \cdot E = -1$  なので、  $M$  は半豊富でないし、ネフですらない。(この例では、  $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + M)) = 0$  が全ての  $i$  で成立するので、単射性定理を考えること自体あまり面白くはないが。) したがって、定理 3.5 には直線束の曲率の (なんらかの) 正值性のようなものは何も出てきていない。条件は単なる幾何学的なものである。

以下の証明は、  $S = 0$  の時のコラールの証明を一般化しただけである。

**証明 3.7**  $dD \sim mM$  より、  $D$  で分岐する  $m$  重巡回被覆  $\pi : Y \rightarrow X$  を構成出来る。  $T = \pi^*S$  とおくと、  $Y$  は非特異で  $T$  は  $Y$  上の単純正規交差因子になる。  $\iota : Y \setminus T \rightarrow Y$  を自然な開埋め込みとする。すると、包含関係  $\iota_*\mathcal{C}_{Y \setminus T} \subset \mathcal{O}_Y(-T)$  は次の全射

$$H^i(Y, \iota_*\mathcal{C}_{Y \setminus T}) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-T))$$

を任意の  $i$  に対して導く。  $\pi$  は有限射なので、高次順像はすべて消え、

$$H^i(X, \pi_*\iota_*\mathcal{C}_{Y \setminus T}) \rightarrow H^i(X, \pi_*\mathcal{O}_Y(-T))$$

が任意の  $i$  に対して全射ということがわかる。巡回群  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  の作用により、固有層分解

$$\pi_*\iota_*\mathcal{C}_{Y \setminus T} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} G_k$$

と

$$\pi_*\mathcal{O}_Y(-T) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \mathcal{O}_X(-S - kM + \lfloor \frac{kd}{m} \rfloor D)$$

をえる。ただし、  $G_k \subset \mathcal{O}_X(-S - kM + \lfloor \frac{kd}{m} \rfloor D)$  となるように添字を付けておく。直和因子をとることにより、

$$H^i(X, G_1) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

はすべての  $i$  に対して全射である。層  $G_1$  は  $D$  の周りで自明でないモノドロミーを持つので、  $H^0(U, G_1|_U) = 0$  が成立する。ただし、  $U \subset X$  は  $U \cap D \neq \emptyset$  となるような連結な開集合とする。



補題.  $F$  は位相空間  $X$  上のアーベル群の層とし、 $F_1, F_2 \subset F$  は部分層とする。 $D \subset X$  は閉部分集合とする。次の2つの条件を仮定する。

$$(1) F_2|_{X \setminus D} = F|_{X \setminus D},$$

(2) もし  $U$  が連結開集合であり  $U \cap D \neq \emptyset$  を満たすならば、 $H^0(U, F_1|_U) = 0$  が成立する。

このとき、 $F_1$  は  $F_2$  の部分層である。

証明は明らかである。この補題をつかうと、 $G_1 \subset \mathcal{O}_X(-S - M)$  は  $G_1 \subset \mathcal{O}_X(-S - M - bD) \subset \mathcal{O}_X(-S - M)$  と分解する。ただし、 $b$  は任意の正の整数である。従って、全射

$$H^i(X, G_1) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

は

$$H^i(X, G_1) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M - bD)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

と分解するので、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M - bD)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

はすべての  $i$  に対して全射である。セール双対を使うと、目的の単射をえる。

定理 3.5 の直接的な系として、乗松の消滅定理を得る。もう一度書いておこう。

系 3.8 (乗松の消滅定理)  $X$  を非特異射影的な代数多様体とし、 $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とする。 $L$  を  $X$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) = 0$$

がすべての  $i > 0$  に対して成立する。

証明 3.9  $|mL|$  が固定点自由になるような正の整数  $m \geq 2$  をとる。 $|mL|$  の一般元を  $D$  とすると、 $D \sim mL$ 、 $D$  と  $S$  は共通成分なしで、 $D + S$  は単純正規交差因子と出来る。定理 3.5 より

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L + bD))$$

がすべての正の整数  $b$  に対して単射である。セールの消滅定理より、 $i > 0$  なら右辺は  $b \gg 0$  で零である。よって、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) = 0$  が任意の  $i > 0$  で成立する。

次の定理で  $S = 0$  のときは、コラールの消滅定理としてよく知られている。

**定理 3.10**  $f: X \rightarrow Y$  を非特異射影的代数多様体  $X$  から射影的代数多様体  $Y$  への射とする。  $S$  は  $X$  上の単純正規交差因子とし、  $L$  は  $Y$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  と  $j \geq 0$  に対して成立する。

**証明 3.11**  $n$  を正の整数で  $n \geq 2$  とし、  $|nL|$  は固定点自由な線形系とする。この  $n$  は証明の途中で注意するように、十分大きく取っておく必要がある。  $D \in |nL|$  を一般の元とし、  $Z = f^{-1}(D)$  は非特異で  $Z + S$  は  $X$  上の単純正規交差因子になるように取っておく。ここで定理 3.5 を使うと、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L + bZ))$$

は任意の正の整数  $b$  とすべての  $i$  に対して単射である。以下、  $\dim Y$  についての帰納法で定理をしめす。  $\dim Y = 0$  なら自明である。短完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L) &\rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*(1+n)L) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_Z(K_Z + S|_Z + f^*L|_Z) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を考える。高次順像をとって、  $D$  が  $|nL|$  の一般元であることに注意すると、任意の  $j$  に対し、

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L) &\rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y((1+n)L) \\ &\rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_Z(K_Z + S|_Z) \otimes \mathcal{O}_D(L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。帰納法の仮定と、上の短完全列から得られるコホモロジー群の長完全列より、

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) \simeq H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y((1+n)L))$$

が  $i \geq 2$  で成立する。セールの消滅定理より

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y((1+n)L)) = 0$$

が  $n \gg 0$  で成立する。もう少し正確に言うと、最初にこのコホモロジー群が消滅する程度に  $n$  を十分大きくとっておくのである。よって

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) = 0$$

が任意の  $i \geq 2$  で成立する。全く同じ議論により、

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD)) = 0$$

が任意の  $i \geq 2$  と任意の正の整数  $b$  に対して成立することを注意しておく。次にルレイのスペクトル系列

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H^p(Y, R^q f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD)) \\ &\Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L + bZ)) \end{aligned}$$

を考える。ただし、 $b$  は非負整数とする。すでに上で示した結果より、短完全列

$$0 \rightarrow E_2^{1,j} \rightarrow E^{j+1} \rightarrow E_2^{0,j+1} \rightarrow 0$$

をえる。これから次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) & \longrightarrow & H^{j+1}(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L)) \\ & \downarrow & \downarrow \\ 0 \longrightarrow H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD)) & \longrightarrow & H^{j+1}(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L + bZ)) \end{array}$$

をえる。右の垂直方向の矢印は単射なので、左の垂直方向の矢印

$$H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) \rightarrow H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD))$$

は、任意の正の整数  $b$  に対して単射である。セールの消滅定理より、

$$H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) = 0$$

も従う。よって、目的の消滅定理を得る。

## 4 特異点の定義

ここでは特異点の定義について最低限のことだけを述べておく。詳しくは、[K森, §2.3] を見ていただきたい。極小モデル理論の専門家以外には頭の痛くなる話題であろう。

**定義 4.1**  $X$  は正規多様体で、 $K_X$  は  $\mathbb{Q}$ -カルティエ因子と仮定する。つまり、正の整数  $m$  が存在し、 $mK_X$  がカルティエになるとする。 $f: Y \rightarrow X$  は特異点解消で、 $f$  の例外集合が  $Y$  上の単純正規交差因子になるものとする。このとき

$$K_Y = f^*K_X + \sum_i a_i E_i$$

と書ける。ただし、 $E_i$  達は  $f$  の例外素因子である。ここで、すべての  $i$  に対し、 $a_i > -1$  が成立するとき、 $X$  は高々川又対数的末端特異点 (klt と略す) を持つといい、すべての  $i$  に対し、 $a_i \geq -1$  が成立するとき、 $X$  は高々対数的標準特異点 (lc と略す) を持つという。

**注意 4.2**  $X$  は高々商特異点しか持たない正規代数多様体とする。このとき、 $X$  は高々川又対数的末端特異点しか持たないということが知られている。また、川又対数的末端特異点は有理特異点であることもよく知られている。

もう少し一般的な設定も必要である。帰納的な議論をするためには、以下のように「対 (pair)」を考える方が有効なのである。

**定義 4.3** (対に対する特異点)  $(X, B)$  は正規多様体  $X$  と  $\mathbb{R}$ -因子  $B$  の対とする。ここで、 $B$  は相異なる素因子  $B_i$  を用いて、 $B = \sum_i b_i B_i$  と表示する。ただし、 $b_i$  は非負な任意の実数とする。 $K_X + B$  はカルティエ因子の  $\mathbb{R}$ -線形結合で書けるとする。 $f: Y \rightarrow X$  を  $(X, B)$  の対数的特異点解消とする。つまり、 $Y$  は非特異、 $f$  は固有双有理射、 $f$  の例外集合  $E$  は  $Y$  上の単純正規交差因子で、 $E + \sum_i f_*^{-1} B_i$  も  $Y$  上の単純正規交差因子とする。ただし、 $f_*^{-1} B_i$  は  $B_i$  の  $Y$  上への固有変換である。

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_j a_j E_j$$

と書く。全ての  $j$  に対して  $a_j > -1$  のとき、対  $(X, B)$  は川又対数的末端対 (klt と略す) といい、 $a_j \geq -1$  のとき、対  $(X, B)$  は対数的標準対 (lc と略す) という。ただし、 $f_*(\sum_j a_j E_j) = -B$  となるように  $\sum_j a_j E_j$  は選んである。

4.4 (補足)  $X$  を非特異な多様体とし、 $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とする。 $S = \sum_i S_i$  を  $S$  の既約分解としよう。このとき、 $(X, \sum_i b_i S_i)$  が川又対数的末端対であるとは、 $0 \leq b_i < 1$  がすべての  $i$  に対して成立することである。また、 $(X, \sum_i b_i S_i)$  が対数的標準対であるとは、 $0 \leq b_i \leq 1$  がすべての  $i$  に対して成立することである。このような記述を見ると、川又対数的末端という条件が、 $L^2$  条件と対応することが分かっていただけるかもしれない。

次に定義する対数的中心は、見た目より重要な概念である。各種定理の証明で大切な役割を果たす。

定義 4.5 (対数的標準中心)  $(X, B)$  を対数的標準対とする。 $X$  の閉部分集合  $C$  が対数的中心 (lc center) であるとは、 $(X, B)$  のある対数的特異点解消  $f: Y \rightarrow X$  が存在し、

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_{j \in J} a_j E_j$$

と書いたとき、 $f(E_{j_0}) = C$  かつ  $a_{j_0} = -1$  となる  $j_0 \in J$  が存在することとする。

4.6 (補足 2) 上の補足で扱った例にもどる。 $(X, \sum_i b_i S_i)$  が対数的標準対とする。このとき、 $T = \sum_{b_i=1} S_i$  と書く。 $T$  は  $X$  上の単純正規交差因子である。 $T$  の既約分解を  $T = \sum_j T_j$  と書くと、 $T_{j_1} \cap \cdots \cap T_{j_k}$  の既約成分が  $(X, \sum_i b_i S_i)$  の対数的標準中心である。これは爆発の簡単な計算から従う。

## 5 主結果

ここでは [F1] に従って対数的標準対の極小モデル理論で必要となるコラールの定理の一般化を説明する。アンブロの定式化を若干簡略化したものになっている。極小モデル理論の最近の大発展については、[藤 1] を見ていただきたい。

5.1 (設定)  $M$  を非特異代数多様体とし、 $Y$  を  $M$  上の被約な単純正規交差因子とする。 $D$  は  $M$  上の  $\mathbb{R}$ -因子で、 $D = \sum_i d_i D_i$  と書いたとき、全ての  $i$  に対して  $D_i$  は  $M$  上の素因子で、 $0 \leq d_i \leq 1$  が成立するとする。さ

らに、 $D$  と  $Y$  は共通成分を持たず、 $\text{Supp}(D + Y)$  は  $M$  上の単純正規交差因子とする。このとき  $B = D|_Y$  とおく。以下、対  $(Y, B)$  について考える。 $\nu: Y' \rightarrow Y$  を  $Y$  の正規化とし、 $K_{Y'} + B_{Y'} = \nu^*(K_Y + B)$  とおくと、 $(Y', B_{Y'})$  は対数的標準対である。 $Y$  の既約成分と、 $(Y', B_{Y'})$  の対数的標準中心 (lc center) の  $\nu$  での像を  $(Y, B)$  の階層 (stratum) とよぶ。さらに、 $Y$  上の  $\mathbb{R}$ -カルティエ因子  $A$  の台が  $(Y, B)$  のどの階層も含まないとき、 $A$  は許容可 (permissible) と呼ぶ。すると、コラールの単射性定理の一般化として次の定理を得る。

次の定理はコラールの単射性定理の究極の一般化の一つである。

定理 5.2  $Y$  は完備と仮定する。 $L$  を  $Y$  上のカルティエ因子とし、 $A$  を  $Y$  上の有効カルティエ因子で  $(Y, B)$  に関して許容可とする。さらに次を仮定する。

- (1)  $L \sim_{\mathbb{R}} K_Y + B + H$  が成立する。
- (2)  $H$  は半豊富な  $\mathbb{R}$ -カルティエ因子である。
- (3)  $(Y, B)$  に関して許容可能な有効  $\mathbb{R}$ -カルティエ因子  $A'$  と正の実数  $t$  が存在し、 $tH \sim_{\mathbb{R}} A + A'$  とかける。

このとき、包含射  $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y(A)$  から自然に引き起こされるコホモロジー群の間の射

$$H^q(Y, \mathcal{O}_Y(L)) \rightarrow H^q(Y, \mathcal{O}_Y(L + A))$$

は、任意の  $q$  に対し単射である。

定理 5.2 の証明は基本的に定理 3.5 と同じである。爆発や被覆を取るという操作は可約な多様体上ではかなり面倒になるが、頑張れば出来る。適切な混合ホッジ構造を考えて、その混合ホッジ構造に付随するホッジドラムのスペクトル系列の退化を使えば良い。やるべきことは多くない。技術的細部がかなり面倒になるだけである。

定理 5.2 から次の定理を得る。(1) はコラールの捻れ不在定理の一般化で、(2) はコラールの消滅定理の一般化である。(2) の証明は、定理 3.10 の証明と基本的に同じである。結局のところ、コホモロジー群の間の単射性さえ分かれば、後は、セールスの消滅定理、特異点解消定理、相対的な消滅定理、ルレイのスペクトル系列や次元による帰納法などを組み合わせれば、コラール型の捻れ不在定理や消滅定理の一般化は証明出来る。面倒なだけである。

定理 5.3  $f: Y \rightarrow X$  を固有射とし、 $L$  を  $Y$  上のカルティエ因子とする。さらに、 $H \sim_{\mathbb{R}} L - (K_Y + B)$  は  $f$ -半豊富と仮定する。このとき、以下の2つの主張を得る。

- (1)  $R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)$  の全ての (零でない) 局所切断の台は、 $(Y, B)$  の幾つかの階層の  $f$  での像を含む。
- (2)  $\pi: X \rightarrow V$  を射影射とし、 $X$  上の  $\pi$ -豊富な  $\mathbb{R}$ -カルティエ  $\mathbb{R}$ -因子  $H'$  によって  $H \sim_{\mathbb{R}} f^* H'$  と書けるとする。このとき、 $R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{O}_Y(L) = 0$  がすべての  $p > 0$  と  $q \geq 0$  に対して成立する。

すこし脇道にそれて川又-フィーベックの消滅定理について再考してみよう。

5.4 (川又-フィーベック) 川又対数的末端対についての極小モデル理論の基本定理 (錐定理や固定点自由定理) は以下の消滅定理より従う。

定理 5.5  $X$  を非特異射影的代数多様体とし、 $D$  は豊富な  $\mathbb{Q}$ -因子とする。 $D$  の分数部分  $\{D\}$  の台は  $X$  上の単純正規交差因子とする。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + \lceil D \rceil)) = 0$$

が  $i > 0$  に対して成立する。ただし、 $\lceil D \rceil$  は  $D$  の切り上げである。

まず、 $K_X + \lceil D \rceil - (K_X + \{-D\}) = D$  が豊富であることに注意する。定理 5.3 の (2) で  $V$  を一点、 $X$  を非特異、 $f: Y \rightarrow X$  を恒等射として定理 5.5 の状況に適用すると、定理 5.3 の (2) は定理 5.5 を導くことが分かる。通常川又-フィーベックの消滅定理は、ネフかつ巨大な  $D$  について述べてあることが多いが、実際に使うのは、ほとんどが豊富因子に対してである。定理 5.3 の (2) で  $H'$  は  $\pi$ -豊富と仮定したが、これも、 $\pi$ -ネフかつ  $\pi$ -対数的巨大なる少し弱い条件で置き換えることが出来る。ただし、この一般化は証明が大変なわりに、応用上それほど役に立たない。詳しい扱いは [F3] に載っている。

次の質問がこのノートが一番大切なところである。これを解決して欲しかったので、場違い (?) な研究集会で、連続講演をおこなったのである。

質問 5.6 定理 5.3 の (1) は、複素解析空間の間の射影射 (またはケーラー射)  $f: Y \rightarrow X$  に対して証明できるだろうか?

定理 5.3 の (2) は、 $V$  が複素解析空間 (たとえば、開円板) で  $\pi: X \rightarrow V$ 、 $f: Y \rightarrow X$  が共に射影射なる条件で証明できるだろうか?

代数多様体の幾つかの問題では、開円板の上に射影的に生えている多様体の族を考える必要が生じることがある。従って、定理 5.3 を複素解析的設定に一般化しておくことは十分意味があると思う。

定理 5.3 の証明では、結局のところ、 $f: Y \rightarrow X$  をコンパクト化し、完備な多様体間の固有射  $\bar{f}: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  の問題に帰着出来る点が重要である。そうすると、完備な多様体  $\bar{Y}$  に対して定理 5.2 が使える。定理 5.2 は混合ホッジ構造に付随するスペクトル系列の退化の話を用いて証明されている。

## 6 応用

この章では極小モデル理論への応用の幾つかを簡単に説明しておく。詳しくは [F3] を見て頂きたい。

定理 6.1  $(X, B)$  を射影的な対数的標準対とする。  $L$  を  $X$  上のカルティエ因子で、 $L - (K_X + B)$  は豊富とする。  $\{C_j\}_{j \in J}$  を  $(X, B)$  の対数的標準中心のいくつかの集合とする。  $X$  の閉部分集合  $V = \bigcup_{j \in J} C_j$  を考える。  $V$  には被約なスキーム構造をいれておく。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}_X(L)) = 0$$

が全ての  $i > 0$  に対して成立する。ただし、 $\mathcal{I}_V$  は  $V$  の  $X$  上での定義イデアルである。特に、制限写像

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(L))$$

は全射である。

証明 6.2  $f: Y \rightarrow X$  を特異点解消とする。  $K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_i a_i E_i$  と書く。ただし、 $\sum_i E_i$  は  $Y$  上の単純正規交差因子になるように特異点解消は選んでおく。広中の特異点解消定理よりこのような特異点解消は



常に存在する。また、 $f^{-1}(V)$  も  $Y$  上の単純正規交差因子になるように  $f$  を選んでおく。  $\sum_i a_i E_i = -E + F$  と書く。ただし、

$$-E = \sum_{a_i = -1, f(E_i) \subset V} a_i E_i$$

で、 $F = \sum_i a_i E_i + E$  と置いた。このとき、

$$\begin{aligned} f^*L + \lceil F \rceil^{-1} - E - (K_Y + \{-F\} - F^{-1}) \\ = f^*L - E - K_Y + F = f^*(L - (K_X + B)) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $F = \sum b_i F_i$  と書いたとき、 $F \rceil^{-1} = \sum_{b_i > -1} b_i F_i$ 、 $F^{-1} = \sum_{b_i = -1} b_i F_i$  と定義している。したがって、 $H^i(X, f_*\mathcal{O}_Y(f^*L + \lceil F \rceil^{-1} - E)) = 0$  が全ての  $i > 0$  に対して成立する。定理 5.3 の (2) を使っている。ここで、 $\lceil F \rceil^{-1}$  は有効な因子で  $f$ -例外的であることに注意する。これから、 $f_*\mathcal{O}_Y(f^*L + \lceil F \rceil^{-1}) \simeq \mathcal{O}_X(L)$  と  $f_*\mathcal{O}_Y(f^*L + \lceil F \rceil^{-1} - E) \simeq \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{O}_X(L)$  を得る。この結果、 $H^i(X, \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{O}_X(L)) = 0$  が任意の  $i > 0$  で成立する。

**注意 6.3** 上の証明をよく見ると、 $f_*\mathcal{O}_E(\lceil F \rceil^{-1}) \simeq \mathcal{O}_V$  が分かる。ここには定理 5.3 の (1) を使うのである。ここがすべての議論のキーポイントになる。固定点自由定理などの証明のように次元による帰納法を使うためには、 $V$  のような可約な多様体まで考えに入れたいといけないのである。このような可約な多様体を扱うときに、 $f_*\mathcal{O}_E(\lceil F \rceil^{-1}) \simeq \mathcal{O}_V$  が大切な役割を果たす。これらのことを組織的におこなうためには、quasi-log 多様体というカテゴリーを考える方が良い。アンブロのアイデアである。詳しくは [F3] を見て頂きたい。

手っ取り早く勉強するには、[F2] を読む方が良いであろう。[F3] は専門家の引用に耐えられるように、通常考えられるもっとも一般的な形ですべての定理を定式化している。その結果、非専門家には読むのが辛くなっているとおもう。それを補うのが [F2] である。

次の定理は川又-ショクロフの固定点自由定理の一般化である。今や証明は難しくないが、quasi-log 多様体なる概念を導入しないと説明が困難なので、証明は省略することにする。

**定理 6.4 (固定点自由定理)**  $(X, B)$  を対数的標準対とする。  $X$  は射影的で、 $D$  は  $X$  上の nef なカルティエ因子で、 $aD - (K_X + B)$  がある正の数  $a$  に対して豊富になるとする。このとき、ある正の数  $m_0$  が存在し、 $m \geq m_0$  なる全ての  $m$  に対して、線形系  $|mL|$  は固定点がない。

最後は対数的標準対に対する錐定理である。これが対数的標準対についての極小モデル理論の出発点になるべき定理である。記号と用語についての詳しい説明は省略した。極小モデル理論の標準的なテキストで通常用いられている記号と用語ばかりである。

定理 6.5 (錐定理)  $(X, B)$  は射影的な対数的標準対とする。このとき、

- (1)  $0 < -(K_X + B) \cdot C_j \leq 2 \dim X$  となるような高々可算無限個の有理曲線  $C_j \subset X$  で

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X+B) \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

を満足するものが存在する。

- (2) 任意の  $\varepsilon > 0$  と豊富な  $\mathbb{R}$ -因子  $H$  に対して、

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X+B+\varepsilon H) \geq 0} + \sum_{\text{有限本}} \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

が成立する。

- (3)  $F \subset \overline{NE}(X)$  は  $(K_X+B)$ -負な端錐面とする。このとき、 $(\varphi_F)_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$  を満たす射影多様体への射  $\varphi_F: X \rightarrow Z$  のうち、既約曲線  $C \subset X$  に対しての条件「 $\varphi_F(C) = (1 \text{ 点}) \Leftrightarrow [C] \in F$ 」を満たすものが1つだけ存在する。 $\varphi_F$  は  $F$  の収縮と呼ばれる。

- (4) 端錐面  $F$  と射  $\varphi_F: X \rightarrow Z$  は (3) の通りとする。 $L$  は  $X$  上の直線束で、 $[C] \in F$  となる任意の曲線  $C$  について  $L \cdot C = 0$  を満たすようなものとする。このとき、 $Z$  上の直線束  $L_Z$  で  $L \simeq \varphi_F^* L_Z$  となるものが存在する。

注意 6.6 定理 6.5 の証明は川又対数的末端のときと基本的に同じである。有理性定理なる定理を証明すれば十分である。この有理性定理の証明もそれほど難しくない。川又対数的末端対のときは、特異点解消と川又-フィーク消滅定理を使っていた。我々の場合は、今回新しく手に入れた消滅定理を使うのである。次元に関する帰納法を上手く回すために、巧妙に捻れ不在定理の一般化も組み合わせる。この部分は随伴公式 (adjunction) の一般化として現れる。

注意 6.7 定理 6.5 の (1) で、長さが  $2 \dim X$  以下の有理曲線で端射線が張られるという部分だけは注意が必要である。現在のところ、解析的設定では十分な消滅定理が得られていないので、[BCHM] の大結果の助けを借りないと証明出来ない。

## 7 文献について

極小モデル理論で必要となる消滅定理は、とりあえず [K 森] の §2.3 と §2.4 で十分であろう。この報告書は [K 森] と同じスタイルで書いてある。[K 森] より進んだ話題まで興味がある人には [K] がお勧めである。消滅定理の文献として認識されていないが、[K] の Part III は消滅定理についての解説である。[EV] はタイトルから分かるように、消滅定理についての講義ノートである。ドラーム複体を全面に押し出しているので、[K 森] やこのノートと見た目はかなり違うと思うが、内容的にはそれほど大きな差はない。これ以上の話題は論文を読むしかないであろう。[A] が今回の一連の発展の出発点である。ただ、証明はかなり雑である。[A] を直接理解するのはかなりの困難が伴うと思う。[A] がその重要性に反して全く普及しなかった理由はここにあると思う。[F3] に今回の話や、更なる一般化を丁寧に書いた。いずれ出版する予定なので、出版された際は購入して頂きたい。今回の話と直接的な関係はないが、[藤 3] も面白い話題だと思う。トーリック多様体上の消滅定理を一網打尽にしたという話である。結局のところ、私が消滅定理を証明するときは、問題を単射性とセールの消滅定理に帰着させてばかりだ、ということがよく分かると思う。

謝辞. JSPS から科学研究補助金、若手研究 (A)20684001 を受けている。稲盛財団からも研究費の補助を受けている。また、研究集会の世話役の先生方にも感謝する。

## 参考文献

- [A] F. Ambro, Quasi-log varieties, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.
- [BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, preprint (2006).
- [EV] H. Esnault, E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, **20**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. vi+164 pp.

- [藤 1] 藤野 修, 極小モデル理論の新展開, 雑誌数学の論説として掲載決定.
- [藤 2] 藤野 修, Kodaira vanishing theorem for log canonical varieties (対数的標準特異点をもった多様体に対する小平の消滅定理), Hodge 理論、退化、特異点の代数幾何とトポロジーの報告集に掲載予定.
- [藤 3] 藤野 修, On toric vanishing theorems (トーリック多様体上の消滅定理について), この講究録に掲載されているはず.
- [F1] O. Fujino, Vanishing and injectivity theorems for LMMP, preprint (2007).
- [F2] O. Fujino, Lectures on the log minimal model program, preprint (2007).
- [F3] O. Fujino, Introduction to the log minimal model program for log canonical pairs, preprint (2008).
- [K 森] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.
- [K] J. Kollár, *Shafarevich maps and automorphic forms*, M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995. x+201 pp.