

# 多流体問題の数値シミュレーション Numerical Simulations of Multi-fluid Flow Problems

九州大学大学院数理学研究院 田端正久 (Masahisa Tabata)<sup>1</sup>  
Faculty of Mathematics, Kyushu University

**Abstract.** Recently we have developed a finite element scheme based on energy-stable approximation for multi-fluid flow problems with interface tension [3, 4]. The scheme is stable if a quantity corresponding to  $L^2$ -norm of the curvature remains bounded in the computation. By using this scheme, some numerical simulations are performed for rising bubble problems, where the fluids are governed by the incompressible Navier-Stokes equations and surface tension is exerted on the interface. Numerical results show the robustness and the applicability of the scheme.

## 1 はじめに

気液二相流など、複数の流体からなる流れ問題を考える。それぞれの流体は Navier-Stokes 方程式に支配され、流体界面では界面張力が働いている。この問題の数値シミュレーション結果は数多くあるが(文献 [1]) およびそこに含まれる文献を参照)、それらの数値解法の正当性、すなわち、計算スキームの安定性と収束性、に関する研究はほとんどなされていない。安定性に関してはわずかに [2] の結果があるが、各時間ステップで時空要素近似から導かれる非線形問題を解かなければならず、実用に供するのは容易でないと思われる。

我々は、エネルギーの意味で実用的に安定な有限要素近似スキーム [3] を開発した。このスキームは各時間ステップで線形方程式系を解くのみである。エネルギー安定性は [4] で解析した。本稿ではこのスキームを気泡上昇問題に適用し、直管内と湾曲管内で数値シミュレーションを行う。

## 2 界面張力を考慮した多流体問題

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界領域、その境界を  $\Gamma$ 、 $T$  をある正の時刻とする。初期時刻  $t = 0$  で領域  $\Omega$  は  $m + 1$  個の非圧縮性粘性流体で占められており、その領域を  $\Omega_k^0$ 、 $k = 0, \dots, m$  とする。流体  $k (= 1, \dots, m)$  は流体 0 に囲まれているとする。その界面  $\partial\Omega_0^0 \cap \partial\Omega_k^0$  を  $\Gamma_k^0$  とする。時刻  $t \in (0, T)$  で流体は領域  $\Omega_k(t)$ 、 $k = 0, \dots, m$ 、にあり、その界面を  $\Gamma_k(t) \equiv$

---

<sup>1</sup>E-mail : tabata@math.kyushu-u.ac.jp

$\partial\Omega_0(t) \cap \partial\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , とする. 流体の密度と粘性を  $\rho_k, \mu_k$  とする. 流速と圧力  $(u, p)$  は, それぞれの領域  $Q_k(T) \equiv \{(x, t); x \in \Omega_k(t), t \in (0, T)\}$  で Navier-Stokes 方程式

$$\rho_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right\} - \nabla(2\mu_k D(u)) + \nabla p = \rho_k f, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (1b)$$

を満たしている. ここに,  $f$  は外力加速度 (重力加速度等) であり,  $D(u)$  は変形速度テンソルである. 界面  $\Gamma_k(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , で条件

$$[u] = 0, \quad [-pn + 2\mu_k D(u)n] = \sigma_k \kappa n \quad (2)$$

を課す. ここに,  $[\cdot]$  はそれぞれの流体からの極限値の差を意味し,  $\kappa$  は界面の曲率,  $\sigma_k$  は界面張力係数,  $n$  は単位法線ベクトルである.  $\Omega$  の境界  $\Gamma$ ,  $t \in (0, T)$ , で滑り境界条件 (または, 粘着境界条件), 初期条件として流速  $u^0$  を課す.

界面の挙動を取り扱いやすくするために問題を書き直し, 次の条件を満たす未知関数  $\chi : [0, 1] \times (0, T) \rightarrow (\mathbf{R}^2)^m$ ,  $(u, p) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$  を求める問題に変換する. 任意の時刻  $t \in (0, T)$  で

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} = u(\chi_k, t), \quad (s \in [0, 1], k = 1, \dots, m) \quad (3)$$

を,  $Q_k(t)$ ,  $k = 0, \dots, m$ , で (1) を, 界面で (2) を, 境界で滑り (または粘着) 境界条件を満たし, 流速の初期条件  $u^0$  と界面位置の初期条件

$$\chi(\cdot, 0) = \chi^0, \quad (4)$$

を満たす. ここに,  $\chi^0 : [0, 1] \rightarrow (\mathbf{R}^2)^m$  は  $\Omega$  の閉曲線族である. 任意の時刻  $t$  で  $\chi(1, t) = \chi(0, t)$  であり,  $C_k(t) \equiv \{\chi_k(s, t); s \in [0, 1]\}$ ,  $k = 1, \dots, m$  は  $\Omega$  内の閉曲線となる.  $s$  は曲線を表示するパラメータである.  $C_k(t)$  は時刻  $t$  での界面を示し,  $\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , はその内部として定義され,

$$\Omega_0(t) = \Omega - \bigcup \{\bar{\Omega}_k(t); k = 1, \dots, m\}$$

となる.

### 3 エネルギー安定有限要素法

有限要素スキームを作成するために, 関数空間を用意する.  $X, V, Q$  をそれぞれ, 各時刻で, 関数  $\chi, u, p$  を求める空間であり,  $V$  は滑り (または粘着) 境界条件を,  $Q$  は積分平均が零になる条件を満たしている. それらの詳細は [4] を参照していただきたい.  $X_h, V_h, Q_h$  をそれらの有限次元部分空間とする.  $\Delta t$  を時間刻みとし,  $N_T = \lfloor T/\Delta t \rfloor$  とおく. 時刻  $t = n\Delta t$  で近似関数  $\chi_h^n, u_h^n$ , と  $p_h^n$  をそれぞれ, 関数空間  $X_h, V_h$ , と  $Q_h$  に求める. 本稿の計算では,  $V_h$  は三角形 2 次要素,  $Q_h$  は三角形 1 次要素を用いる. それらは, 時間ス

テップ  $n$  に依存しない.  $X_h$  は多角形のパラメータ表示で得られる関数から成り立っている. 多角形の頂点の数  $N_{x,k}^n$  は  $n, k$  に依存して変わる. 後退差分作用素  $\bar{D}_{\Delta t}$  を

$$\bar{D}_{\Delta t} u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$$

で定義する. 次のスキームで,  $(\chi_h^{n-1}, u_h^{n-1}) \rightarrow (\chi_h^n, u_h^n, p_h^n) \in X_h \times V_h \times Q_h$  を  $n = 1, \dots, N_T$  について順次求める.

$$\frac{1}{\Delta t} (\chi_h^{n-1/2} - \chi_h^n) = \frac{3}{2} u_h^{n-1} (\chi_h^{n-1}) - \frac{1}{2} u_h^{n-2} (\chi_h^{n-1} - \Delta t u_h^{n-1} (\chi_h^{n-1})), \quad \forall s_{k,i}^n \quad (5a)$$

$$\chi_h^{n-1/2} \rightarrow \chi_h^n \quad (5b)$$

$$\left( \rho_h^{n-1} \bar{D}_{\Delta t} u_h^n + \frac{1}{2} u_h^n \bar{D}_{\Delta t} \rho_h^n, v_h \right) + a_1(\rho_h^n, u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) + a_0(\rho_h^n, u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) + \Delta t d_h(u_h^n, v_h; C_h^n) = (\rho_h^n \Pi_h f^n, v_h) - d_h(\chi_h^n, v_h; C_h^n), \quad \forall v_h \in V_h \quad (5c)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (5d)$$

であり, 初期条件は

$$\chi_h^0 = \Pi_h \chi^0, \quad u_h^0 = \Pi_h u^0. \quad (6)$$

とする. ここに,  $\Pi_h$  は対応する有限次元空間への補間作用素,  $s_{k,i}^n$  は多角形の頂点位置に対応するパラメータ値であり,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad a_1(\rho, w, u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \{ [(\nabla \cdot w)u] \cdot v - [(\nabla \cdot w)v] \cdot u \} dx, \\ a_0(\rho, u, v) = \int_{\Omega} 2\mu(\rho) \nabla u^T : \nabla v^T \, dx, \quad b(v, q) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) q \, dx, \\ d_h(u, v; C_h) = \sum_{k=1}^m \sigma_k \sum_{i=1}^{N_x} \bar{D}_{\Delta s_k} u_i \bar{D}_{\Delta s_k} v_i (s_{k,i} - s_{k,i-1})^2 / |\chi_{k,i} - \chi_{k,i-1}|$$

である. 界面  $C$  への単位接ベクトルを  $\tau$  とする. 双一次形式  $d_h(u, v)$  は

$$\sum_{k=1}^m \sigma_k \int_{C_k} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} \, dl$$

を近似している. この項は界面張力から導かれる. 関数  $\chi_h^n$  が分かると, その多角形の内部として  $\Omega_{kh}^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ , が定まり, それらの閉包の和の補集合として  $\Omega_{0h}^n$  が求まる. (5c) に現れる  $\rho_h$  は補助的な三角形定数要素関数であり, 要素  $K$  が  $\Omega_{kh}^n$  にあるとき  $\rho_h(K) = \rho_k$  として定義され, 複数の流体によって占められるときは, その面積比から密度  $\rho_h(K)$  を決める. 有限差分法の VOF 法と類似している. (5a) は常微分方程式の数値解法である Adams-Bashforth 法に基づいて (3) を解いている. 各時間ステップ  $n$  で界面を表す多角形の頂点の数は, 過度に粗密が生じないように制御し, 各流体面積が一定になるように頂点位置を適正化している. この過程を (5b) で示している. (5c) と (5d) は, 両辺の  $d_h$  に関する項がなければ [3] で示したエネルギー安定な有限要素法と一致する. 左

辺の項  $\Delta t d_h$  は曲率を未知関数  $u_h^n$  を使って陰的に近似するときに現われ、スキームの安定化に寄与している。このスキームは、界面での線積分

$$\sum_{k=1}^m \int_0^T dt \int_{C_k(t)} \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} \right|^2 dl \quad (7)$$

に対応する離散量が有界にとどまれば、有限要素解のエネルギー  $\int_{\Omega} \rho_h^n |u_h^n|^2 dx$  が有界にとどまる。(7)式の離散量は  $\chi_h^n$  を使って計算できるので、この量を計算の安定性の目安として使う。安定性に必要なのは(7)であって、曲率の最大値が有界である必要はない。

## 4 数値結果

### 4.1 直管内気泡上昇問題

$\Omega$  を  $(0, 1) \times (0, 2)$  の長方形領域とする。上下の辺を 32 分割するサイズの分割で総要素数は  $N_e = 4, 580$  のメッシュを作成し、以下の計算で用いた。界面が

$$\left\{ \left( \frac{1}{2} + r \cos 2\pi s, \frac{2}{5} + r \sin 2\pi s \right); s \in [0, 1) \right\}, \quad r = 0.2$$

で与えられる気泡の上昇問題を考える。

$$f = (0, -1)^T, \quad u^0 = 0, \quad (\rho_0, \mu_0) = (100, 2), \quad (\rho_1, \mu_1) = (0.1, 1), \quad \sigma_1 = 1.0$$

とする。 $\Omega$  の境界はすべて滑り境界条件で、初期の  $\Omega_1^0$  は図 1 の最初の図に示されている。 $T = 10$ ,  $\Delta t = 1/32$  とする。図 1 は領域形状  $\Omega_{1h}^n$  と流線の時間発展を、示している。安定性の目安となる(7)式の離散量は、45.8 であり、エネルギー安定な計算ができています。初期に静止していた気泡が界面張力の下でほぼ一定形状を保って上昇する様子が観察される。

### 4.2 湾曲管内気泡上昇問題

図 2 に示す湾曲した領域を  $\Omega$  とする。左下、右上の隅はそれぞれ、 $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  である。上下の辺を 32 分割するサイズの分割で総要素数は  $N_e = 8, 983$  のメッシュを作成し、以下の計算で用いた。半径  $r = 0.2$  の気泡の上昇問題を考える。

$$f = (0, -1)^T, \quad u^0 = 0, \quad (\rho_0, \mu_0) = (100, 2), \quad (\rho_1, \mu_1) = (0.1, 1), \quad \sigma_1 = 1.0$$

とする。 $\Omega$  の境界はすべて滑り境界条件で、初期の  $\Omega_1^0$  は図 2 の最初の図に示されている。 $T = 15$ ,  $\Delta t = 1/16$  とする。図 2 は領域形状  $\Omega_{1h}^n$  と流線の時間発展を、示している。安定性の目安となる(7)式の離散量は、61.8 であり、エネルギー安定な計算ができています。初期に静止していた気泡が左右に揺れながら変形して上昇する様子が観察される。

## 5 おわりに

エネルギー安定有限要素近似を用いて多流体問題の計算スキームを作成し、直管内および湾曲管内気泡上昇問題の数値シミュレーションを行い、スキームの強靱性、適用可能性を確認した。このスキームは、エネルギー安定性を考慮した実用的な計算法である。気泡や液滴の併合を含む問題のシミュレーション結果は別の機会に報告する。

## 謝辞

この研究は日本学術振興会の科学研究費 (S) No.16104001 と文部科学省による 21 世紀 COE プログラム「機能数理学の構築と展開」から援助を受けた。ここに謝意を表す。

## 参考文献

- [1] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y.-J. Jan. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, pp. 708–759, 2001.
- [2] E. Bänsch. Finite element discretization of the Navier-Stokes equations with a free capillary surface. *Numerische Mathematik*, Vol. 88, pp. 203–235, 2001.
- [3] M. Tabata. Numerical simulation of Rayleigh-Taylor problems by an energy-stable finite element scheme. In B.-Y. Guo and Z.-C. Shi, editors, *Proceedings of The Fourth International Workshop on Scientific Computing and Applications*, pp. 63–73. Science Press, Beijing, 2007.
- [4] M. Tabata. Finite element schemes based on energy-stable approximation for two-fluid flow problems with surface tension. *Hokkaido Mathematical Journal*, Vol. 36, pp. 875–890, 2007.

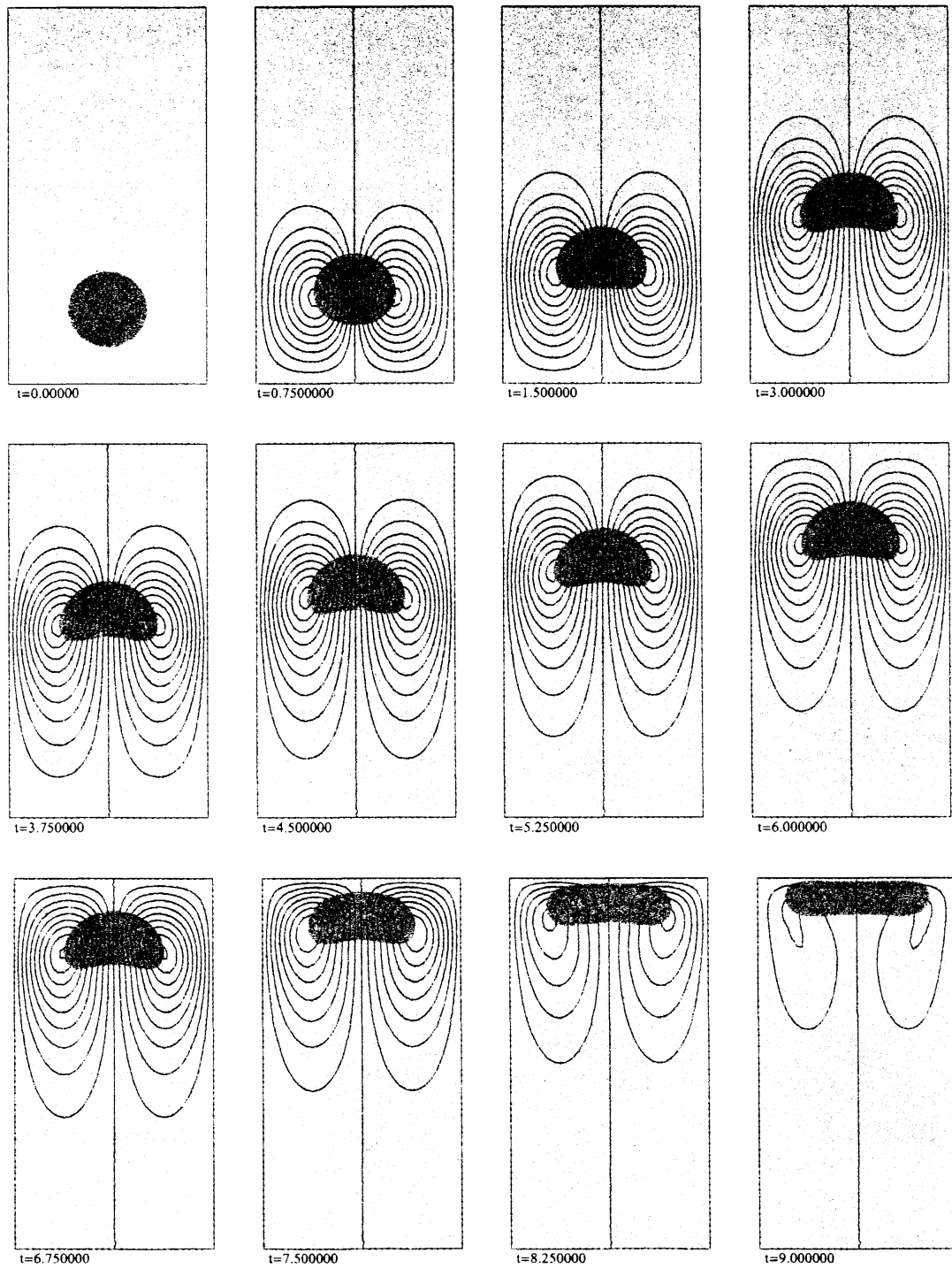


図 1: 領域  $\Omega_{1h}(t)$  と時刻  $t = 0.0, .0.75, \dots, 9.0$  での流線

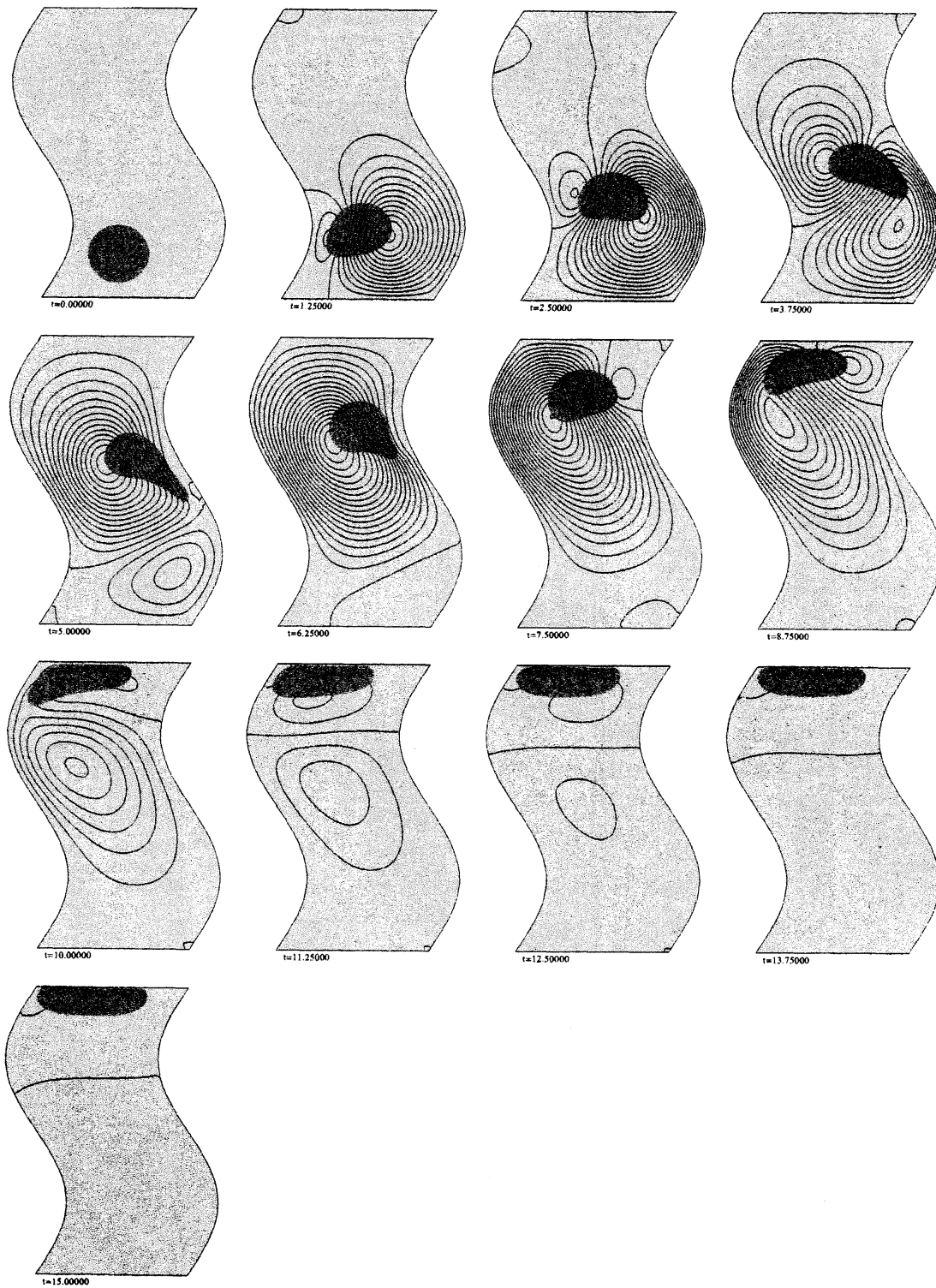


図 2: 領域  $\Omega_{1h}(t)$  と時刻  $t = 0.0, 1.25, \dots, 15.0$  での流線