数理解析研究所講究録
第1615巻 2008年 135-142

Clarkson不等式の最良定数について

新潟大学大学院 自然科学研究科　水口 洋康 (*Hiroyasu Mizuguchi*)
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学大学院 自然科学研究科　星 啓介 (*Keisuke Hoshi*)
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1．序文

1935年に Jordan-von Neumann はノルム空間 X が中線定理を満たすとき X におけるノルムは内積から定義されること, すなわちそのようなノルム空間は内積空間になることを示した.

具体的な例として,$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間としたとき, $L^2(= L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mu))$ では中線定理が成立するが, $p \neq 2$ のとき, $L^p(= L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu))$ では中線定理は成立しないことは周知のことである. そこで Clarkson [1] は1936年に中線定理の一般化として $L^p(1 < p < \infty)$ におけるノルム不等式, いわゆる Clarkson の不等式

$$1 < p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\Rightarrow \forall f, g \in L^p, \quad (||f+g||^{p'} + ||f-g||^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(||f||^p + ||g||^p)^{\frac{1}{p}}$$

を証明し, それらの不等式を用いて $L^p \quad (1 < p < \infty)$ が一様凸である事, すなわち $0 < \varepsilon \leq 2$ なる任意の ε に対してある正数 δ で,

$$||x|| = ||y|| = 1,\ ||x-y|| > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$$

を満たすものが存在する事を示し, Banach 空間の幾何学的性質の研究が行われるきっかけとなった.

Clarkson 不等式を証明することの本質は、以下の不等式を示すことである.

$$1 < p \leq 2 \ , \ \forall z, w \in \mathbb{C} \qquad (|z+w|^{p'} + |z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

この不等式は p とその共役指数 p' に関するものであるが, それを任意の p,q に関するものとして一般化したものが以下の不等式である.

$$0 < p, q \leq \infty \ , \ \forall a, b \in \mathbb{C} \qquad (|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

MSC(2000):46B20
keywords and phrases:Clarkson's inequality, best constant,uniformly convex

不等式 (1) において、不等式を満たす定数 $C \in \mathbb{R}$ の内最小のものを, 一般化された Clarkson 不等式の最良定数と呼ぶ. この最良定数は実数上においても同様に, 次の不等式

$$0 < p, q \leq \infty \ , \ \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad (|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

を満たす最小の定数 $C \in \mathbb{R}$ として定義される.
この複素数上・実数上 2 つの場合における最良定数の違いに関して, 2007 年 L.Malingranda-N.Sabourova [5] が興味深い論文を発表した.
本報告ではその論文の内容を紹介し, その一部について別証明を与えることを目的とする.

2. Clarkson 不等式の簡潔な証明

Clarkson 不等式

$$1 < p \leq 2 \ , \ \forall z, w \in \mathbb{C} \qquad (|z+w|^{p'} + |z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

この不等式の証明法はいくつも発見されている. 斉藤元樹, 松本尚浩 [6] が整理しているのでそちらも参照いただきたい. まず Clarkson[1] は二項展開を用いてこれを証明した. 又、栗山-宮城-岡田-三好の証明 [2] は微分の計算を繰り返す初等的手法によるものであり, Riesz-Thorin の補間定理を用いた証明方法も存在する. [5] にあるように, Friederichs の証明 [3] が最も簡潔であると思われる.

Friederichs の証明

$$1 < p \leq 2 \ , \ 0 \leq t \leq 1 \qquad (1+t)^{p'} + (1-t)^{p'} \leq 2(1+t^p)^{p'-1}$$

を示す. $0 \leq x \leq 1$ をとり

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad f(\alpha) = (1 + \alpha^{1-p'}x)(1+\alpha x)^{p'-1} + (1 - \alpha^{1-p'}x)(1-\alpha x)^{p'-1}$$

とすると

$$f(1) = (1+x)^{p'} + (1-x)^{p'} \ , \ f(x^{p-1}) = 2(1+x^p)^{p'-1}$$

$$f'(\alpha) = (p'-1)x(1-\alpha^{-p'})g(\alpha).$$

ただし, $g(\alpha) = (1+\alpha x)^{p'-2} - (1-\alpha x)^{p'-2}$ とする.

$p' > 2$ に対し, $g(\alpha) \geq 0$, $1 - \alpha^{-p'} \leq 0$ なので $f'(\alpha) \leq 0$ となり $f(\alpha)$ は α に関し減少する. 従って $x^{p-1} \leq 1$ より

$$f(1) \leq f(x^{p-1})$$

すなわち, $$(1+x)^{p'}+(1-x)^{p'}\leq 2(1+x^p)^{p'-1}.$$
この不等式

$$1<p\leq 2\ ,\ 0\leq t\leq 1 \qquad (1+t)^{p'}+(1-t)^{p'}\leq 2(1+t^p)^{p'-1}$$

において

$$t=\frac{|z|}{|w|}\qquad (|z|\geq|w|)\quad ,\quad t=\frac{|w|}{|z|}\qquad (|z|\leq|w|)$$

とすることで

$$1<p\leq 2\ ,\ \forall z,w\in\mathbb{C} \qquad (|z+w|^{p'}+|z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}}\leq 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}}$$

が証明される. ■

3．複素数上の最良定数

まずは複素数上での最良定数を求める. すなわち, 複素数上の一般化された Clarkson 不等式

$$0<p,q\leq\infty\ ,\ \forall a,b\in\mathbb{C} \qquad (|a+b|^q+|a-b|^q)^{\frac{1}{q}}\leq C(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

を満たす最良定数 $C=C_{p,q}(\mathbb{C})$ を求める.

$T(a,b)=(a+b,a-b)$ とおくと, 有界線形作用素 $T;l_2^p(\mathbb{C})\to l_2^q(\mathbb{C})$ に対し

$$\|T\|_{p,q}=sup_{(a,b)\neq(0,0)}\frac{(|a+b|^q+|a-b|^q)^{\frac{1}{q}}}{(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}}$$

$$C=C_{p,q}(\mathbb{C})=\|T\|_{p,q}$$

なので $\|T\|_{p,q}$ を求めることと同値である.

$$A_p=(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}},B_p=(|a+b|^p+|a-b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

と置いたとき, 不等式 (1) は

$$(|a+b|^q+|a-b|^q)^{\frac{1}{q}}=B_q\leq CA_p=C(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

と表現される. まず A_p,B_p に関し以下の補題が成立する.

補題 3.1 A_p,B_p は $p\in(0,\infty)$ について減少する。

証明 A_p について

$$0 < p < q < \infty \quad \text{ならば} \quad (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} = A_p \geq A_q = (|a|^q + |b|^q)^{\frac{1}{q}}$$

を示す. $A_p = 1$ とすると $A_p = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} = 1$ より $0 \leq a, b \leq 1$ である. $p < q$ より $a^q \leq a^p$, $b^q \leq b^p$. 従って

$$a^q + b^q \leq a^p + b^p = 1$$

であるから

$$(a^q + b^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1 = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}.$$

$A_p \neq 1$ ならば, $a' = \dfrac{a}{A_p}$, $b' = \dfrac{b}{A_p}$ とすればよい.

B_p についても同様に示される。 ■

また l^p-ノルムと l^q-ノルムは同値であるから,

命題 3.2 $1 < p < q < \infty$ ならば,

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^q)^{\frac{1}{q}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^{n} a_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

これより, 次の補題が成立する.

補題 3.3 $1 < p < q < \infty$

$$A_q \leq A_p \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} A_q.$$

補題 3.1,3.3 より複素数上の最良定数 $C_{p,q}(\mathbb{C})$ が次のように計算される.

定理 3.4

$$B_q = (|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} \leq CA_p = C(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (a, b \in \mathbb{C})$$

の最良定数は

I. $0 < q \leq 2 \leq p$ ならば $C = C_{p,q}(\mathbb{C}) = 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$

II. $q \geq 2,\ p \geq q'$ ならば $C = C_{p,q}(\mathbb{C}) = 2^{1-\frac{1}{p}}$

III. $p, q \leq 2$ or $q \geq 2$ ならば $C = C_{p,q}(\mathbb{C}) = 2^{\frac{1}{q}}$

証明 Classical Clarkson's inequality より

$$1 < p \leq 2\ ,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{ならば} \quad \|T\|_{p,p'} \leq 2^{\frac{1}{p'}} \tag{3}$$

p と q の値によって場合分けし、(3) 式と補題を組み合わせて考える.

I. $0 < q \leq 2 \leq p$ のとき,

$$(|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} = B_q \leq 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} B_2 = 2^{\frac{1}{q}} A_2 \leq 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} A_p = 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$(a,b)=(1,i)$ とすると

$$B_q = (|1+i|^q + |1-i|^q)^{\frac{1}{q}} = (2\sqrt{2}^q)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}$$

$$A_p = (|1|^p + |i|^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \quad \text{なので}$$

$$2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} A_p = 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} = B_q$$

となり等号が成立する.

II. $q \geq 2,\ p \geq q'$ のとき,

$$(|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} = B_q \leq 2^{\frac{1}{q}} A_{q'} \leq 2^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}-\frac{1}{p}} A_p$$
$$= 2^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}-\frac{1}{p}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{1-\frac{1}{p}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

等号成立は $(a,b)=(1,1)$.

IIIa. $p,q \leq 2$ のとき,

$$(|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} = B_q \leq 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} B_2 = 2^{\frac{1}{q}} A_2 \leq 2^{\frac{1}{q}} A_p = 2^{\frac{1}{q}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

IIIb. $q \geq 2,\ q' \geq p$ のとき,

$$(|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} = B_q \leq 2^{\frac{1}{q}} A_{q'} \leq 2^{\frac{1}{q}} A_p = 2^{\frac{1}{q}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

IIIa,IIIb ともに等号成立は $(a,b)=(1,0)$. ■

4．実数上の最良定数

次に実数上での最良定数 $C_{p,q}(\mathbb{R})$ を求め、$C_{p,q}(\mathbb{C})$ と比較する. 実数上の一般 Clarkson 不等式

$$0 < p,q \leq \infty \quad , \quad \forall a,b \in \mathbb{R} \qquad (|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

を満たす最良定数 $C = C_{p,q}(\mathbb{R})$ を求める.

$T(a,b)=(a+b,a-b)$ とおくと有界線形作用素 $T; l_2^p(\mathbb{R}) \to l_2^q(\mathbb{R})$ のノルム $\|T\|_{p,q}$ が最良定数 $C = C_{p,q}(\mathbb{R})$ になる.

定理 4.1

$$(|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

の最良定数は

Ia. $0 < q \leq 1,\ 2 < p < \infty$ ならば $C_{p,q}(\mathbb{R}) = B_{p,q} = 2^{\frac{1}{q}}$.

Ib. $1 < q < 2 < p < \infty$ ならば $C_{p,q}(\mathbb{R}) = B_{p,q}$.

ただし $B_{p,q} = \sup_{x\in[0,1]} \dfrac{((1+x)^q + (1-x)^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+x^p)^{\frac{1}{p}}}$ とおく.

更に $\max(2^{1-\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{q}}) < B_{p,q} < 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$ が成立する.
II. $q \geq 2,\ p \geq q'$ ならば $C = C_{p,q}(\mathbb{R}) = 2^{1-\frac{1}{p}}$.
III. $p, q \leq 2$ *or* $q \geq 2$ ならば $C = C_{p,q}(\mathbb{R}) = 2^{\frac{1}{q}}$.

証明 II,III は複素数の場合と同様に示される.
I. $0 < q < 2 < p < \infty$ について示していく.

$$C_{p,q}(\mathbb{R}) = \sup_{a,b\in R,|a|^p+|b|^p\neq 0} \frac{(|a+b|^q + |a-b|^q)^{\frac{1}{q}}}{(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{x\in[0,1]} \frac{((1+x)^q + (1-x)^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+x^p)^{\frac{1}{p}}}$$

なので $F(x) = \dfrac{((1+x)^q + (1-x)^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+x^p)^{\frac{1}{p}}}$, $x \in [0,1]$ をとる.

Ia. $0 < q \leq 1$ の場合,
$x \in [0,1]$ において

$$F'(x) = \frac{((1+x)^q + (1-x)^q)^{\frac{1}{q}-1}}{(1+x^p)^{1+\frac{1}{p}}} \times ([(1+x)^{q-1} - (1-x)^{q-1}](1+x^p) - x^{p-1}[(1+x)^q + (1-x)^q]) < 0$$

なので, F は $[0,1]$ 上減少し, 従って

$$C_{p,q}(\mathbb{R}) = B_{p,q} = F(0) = 2^{\frac{1}{q}}.$$

Ib. $1 < q < 2 < p < \infty$ の場合,
Classical Clarkson's inequality の証明方法 [2] と同様の方法で示すことができる. 実際に微分の計算を繰り返し,

$$F'(x) = \frac{((1+x)^q + (1-x)^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+x^p)^{\frac{1}{p}}}[(1+x)^{q-1}(1-x^{p-1}) - (1-x)^{q-1}(1+x^{p-1})]$$

の $[0,1]$ 上での変化を見ていくと、x_0 が存在し

x	0		x_0		1
F'		$+$	0	$-$	
F	$F(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$F(1)$

となることが確認できる. したがって $B_{p,q}=F(x_0)$ となる $x_0\in(0,1)$ が存在すると言える.

更に　$F(0)=2^{\frac{1}{q}},\ \ F(1)=2^{1-\frac{1}{p}}$　であるから　$\max(2^{\frac{1}{q}},2^{1-\frac{1}{p}})<F(x_0)=B_{p,q}$.

また補題3.3より

$$\begin{aligned}((1+x)^q+(1-x)^q)^{\frac{1}{q}} &< 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}((1+x)^2+(1-x)^2)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2^{\frac{1}{q}}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\\ &< 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}(1+x^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

であるから, $B_{p,q}<2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$. ■

定理3.4と定理4.1により,$0<q<2<p<\infty$ の場合に,

$$C_{p,q}(\mathbb{C})=2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$$

$$C_{p,q}(\mathbb{R})=2^{\frac{1}{q}}\quad(0<q\leq 1)$$

$$C_{p,q}(\mathbb{R})=B_{p,q}=\sup_{x\in[0,1]}\frac{((1+x)^q+(1-x)^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+x^p)^{\frac{1}{p}}}\quad(q>1)$$

となり, 差異が生じていることがわかる.

参考文献

[1] J. A. Clarkson, "Uniformly convex spaces", Trans. Amer. Math. Soc. ,40 ,1936, 396-414.

[2] K. Kuriyama, M. Miyagi, M. Okada and T. Miyoshi, "On Generalized Clarkson's Inequalities", First Korean-Japanese Colloquium on Finete or Infinite Dimensional Complex Analysis, 1993, 83-88.

[3] K. O. Friedrichs, "On Clarkson's inequalities ", Comm. Pure Appl. Math. ,23, 1970, 603-607.

[4] L. Maligranda and L. E. Persson, "On Clarkson's Inequalities and Interpolation", Math. Nachr., 155, 1992, 187-197.

[5] L. Maligranda and N. Sabourova, "On Clarkson's inequaity in the real case", Math Nachr., 280 2007, 1363-1375.

[6] 斉藤元樹, 松本尚浩,Clarkson の不等式の幾つかの証明について, 数理研講究録,1399, (2004), 51-70.