

Conley 指数を用いた偏微分方程式の解の分岐の数値検証

松江 要
京都大学理学研究科

1 序

非線形現象を記述する非線形偏微分方程式の解析手法として、数値計算を援用した手法があり、近年は計算上の誤差を評価し数学的厳密性を伴った精度保証つき数値計算法が広く研究されている。そんな中、Zgliczynski, Mischaikow は楕円型半線型偏微分方程式の定常解の存在を、精度保証つき数値計算と位相幾何学的手法を併用して検証する方法を与えた。その後、平岡, Mischaikow, 小川は定常解のブランチの検証に [5] の手法を発展させ、Day, 平岡, Mischaikow, 小川により、定常解、そのブランチの一意存在検証の方法が与えられた。しかし彼らの方法は定常解の双曲性に依っているため、零固有値を持つ分岐点を含む定常解ブランチの検証ができない。そこで本稿では、不動点あるいは力学系の不変集合の分岐現象（サドル・ノード分岐、ピッチフォーク分岐に対応するもの）を位相幾何学的手法で捉えるための枠組を構築し、精度保証つき数値計算を併用して定常解の分岐を厳密に検証できる事を述べる。

2 Conley 指数

本稿の趣旨は力学系の分岐現象を位相的に捉えることにある。力学系を位相的に特徴付けるための方法の 1 つとして、ここで定義される、力学系の不変集合で特別なものである孤立不変集合、それに対応する位相不変量である Conley 指数を用いる方法が挙げられる。

X を局所コンパクト距離空間、 φ を X 上の flow とする。

2.1 孤立不変集合・Conley 指数

定義 2.1. X の部分集合 N 内の最大不変集合を、

$$\text{Inv}(N) := \{x \in X \mid x \cdot \mathbb{R} \subset N\}$$

で定義する。さらに部分集合 $S \subset X$ が $\text{Inv}(S) = S$ を満たす時、 S は不変集合であるという。

定義 2.2. コンパクト部分集合 $N \subset X$ が次を満たす時、 N は (φ についての) 孤立化近傍であるという：

$$\text{Inv}(N) \subset \text{int}(N).$$

また、 X の部分集合 S が、ある孤立化近傍 $N (\subset X)$ により

$$S = \text{Inv}(N)$$

と表される時、 S は (φ についての) 孤立不変集合である、という。

定義 2.3. X の部分集合 S を孤立不変集合とする. この時, S の Conley 指数は次のホモロジー群で定義される:

$$CH_*(S) = CH_*(S, \varphi) := H_*(N, L).$$

ただし, (N, L) はコンパクト集合対 ($N, L \subset X$ はともにコンパクトで, $L \subset N$) であり, 次を満たすものである:

- $\overline{N \setminus L}$ は S の孤立化近傍.
- L は N -正不変. すなわち, $x \in L, x \cdot [0, t] \subset N$ なら, $x \cdot [0, t] \subset L$.
- L は N の出口. すなわち, $x \in N, x \cdot [0, t] \not\subset N$ のとき, ある $t_0 \in (0, t)$ が存在して, $x \cdot [0, t_0] \subset N, x \cdot t_0 \in L$ を満たす.

上記の条件を満たすコンパクト対 (N, L) を S の index pair という.

Conley 指数が満たす性質については, [4] を参照されたい.

次に, 孤立不変集合の1つの「分解」を定義する.

定義 2.4. 部分集合 $S \subset X$ を孤立不変集合とする. この時, S の有限個の部分集合の集まり $\{M(p)\}_{p \in P}$ が次を満たす時, S の Morse 分解という:

- 各 $M(p)$ は互いに素な孤立不変集合.
- 任意の $x \in S \setminus \bigcup_{p \in P} M(p)$ に対して, 相異なる P の元 p, q が存在して, 次を満たす:

$$\omega(x) \subset M(p), \alpha(x) \subset M(q). \quad (1)$$

- 有限添字集合 P 上に, 次を満たすような半順序が定義できる: $(1) \Rightarrow p < q$.

なお, 各 $M(p)$ は Morse 集合と呼ばれる.

3 C型孤立化近傍

この節で, 不動点の分岐現象の中でも基本的な, サドル・ノード分岐, ピッチフォーク分岐を位相的に捉えるための概念である C 型孤立化近傍を定義する. この孤立化近傍は分岐点の近くの不変集合の情報のみを与え, それにより孤立化近傍内部の分岐現象を記述する.

3.1 定義

X を局所コンパクト距離空間, Λ を \mathbb{R} 内のコンパクトな区間とし, $\{\varphi^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\lambda \in \Lambda$ に連続的に依存する X 上の flow の族, $\Phi: \mathbb{R} \times X \times \Lambda \rightarrow X \times \Lambda$ を

$$\Phi(t, x, \lambda) := (\varphi^\lambda(t, x), \lambda)$$

とし, $\{\varphi^\lambda\}$ に対応する parameterized flow とする.

直積空間 $X \times \Lambda$ の部分集合 N に対して, N の $\lambda \in \Lambda$ への制限を, $N^\lambda := N \cup (X \times \{\lambda\})$ とする.

まず, サドル・ノード型の孤立化近傍を与える.

定義 3.1. 部分集合 $N \subset X \times \Lambda$ を孤立化近傍とする時, これが次を満たす時, $[\lambda_0, \lambda_1](\subset \Lambda)$ 上 C -サドル・ノード型であると定義する:

(CSN1) $\text{Inv}(N^{\lambda_0}) = \emptyset$.

(CSN2) 互いに素な φ^{λ_1} についての孤立化近傍 $N(0), N(1)(\subset N^{\lambda_1})$ が存在して, 次の2つを満たす:

- $\{\text{Inv}(N(0)), \text{Inv}(N(1))\}$ は $\text{Inv}(N^{\lambda_1})$ の Morse 分解.
- $CH_*(\text{Inv}(N(i)), \varphi^{\lambda_1}) \neq 0, i = 0, 1$.

次にピッチフォーク型の孤立化近傍を与えるが, 先の設定に加え次を仮定する:

- 群 \mathbb{Z}_2 が X に作用する.
- 任意の $g \in \mathbb{Z}_2, t \in \mathbb{R}, x \in X, \lambda \in \Lambda$ に対し, 次を満たす:

$$\varphi^\lambda(t, gx) = g \circ \varphi^\lambda(t, x).$$

定義 3.2. 部分集合 $N \subset X \times \Lambda$ を孤立化近傍とする時, これが次を満たす時, $[\lambda_0, \lambda_1](\subset \Lambda)$ 上 C -ピッチフォーク型であると定義する:

(CPF1) $\text{Inv}(N^{\lambda_0}) \neq \emptyset$ で, かつ $U: \lambda_0$ の開近傍で, 次を満たすものが存在する:

$$\forall \lambda \in U, \text{Inv}(N^\lambda) \subset \text{Fix}(\mathbb{Z}_2).$$

(CPF2) 互いに素な φ^{λ_1} についての孤立化近傍 $N(0), N(1), N(2)(\subset N^{\lambda_1})$ で, 次を満たすものが存在する:

$\{\text{Inv}(N(0)), \text{Inv}(N(1)), \text{Inv}(N(2))\}$ は $\text{Inv}(N^{\lambda_1})$ の Morse 分解で,

$$0 < 2, 1 < 2 \text{ または } 0 > 2, 1 > 2$$

を満たす.

(CPF3) $g\text{Inv}(N(i)) = \text{Inv}(N(1-i)), i = 0, 1, g \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{1\}$.

(CPF4) $g\text{Inv}(N(2)) = \text{Inv}(N(2)), g \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{1\}$.

(CPF5) $CH_*(\text{Inv}(N(i)), \varphi^{\lambda_1}) \neq 0, i = 0, 1$.

(CPF6) $CH_*(\text{Inv}(N(2)), \varphi^{\lambda_1}) \neq 0$.

これらは分岐が起こるパラメータ値前後の不変集合の振る舞いを記述したものであり, 通常の意味のサドル・ノードあるいはピッチフォーク分岐点に対して, 対応する型の孤立化近傍で分岐点を含むものが取れることは容易に示される.

3.2 性質

パラメータ λ の集合 $[\lambda_0, \lambda_1]$ の部分集合を2つ, 以下のように定める:

$$\Lambda_{\text{SN}} := \{\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \mid \exists N(0), N(1)(\subset N^\lambda) :$$

互いに素な φ^λ についての孤立化近傍で, (CSN2) を満たす.}

$$\Lambda_{\text{PF}} := \{\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \mid \exists N(0), N(1), N(2)(\subset N^\lambda) :$$

互いに素な φ^λ についての孤立化近傍で, (CPF2) – (CPF5) を満たす.}

さらに,

$$\lambda_{\text{SN}} := \inf \Lambda_{\text{SN}}, \quad \lambda_{\text{PF}} := \inf \Lambda_{\text{PF}}$$

とする. 孤立化近傍, Morse 分解の robustness より, $\Lambda_{\text{SN}}, \Lambda_{\text{PF}}$ はともに $[\lambda_0, \lambda_1]$ の開集合となる.

C 型孤立化近傍は, 次の性質を持っている.

定理 3.3. (弧状連結な) 孤立化近傍 $N \subset X \times \Lambda$ が $[\lambda_0, \lambda_1]$ 上 C-サドル・ノード型ならば, 次が満たされる.

- (1) $\lambda_{\text{SN}} \in \Lambda_{\text{SN}}$.
- (2) 任意の $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_{\text{SN}}]$ と, 任意の $\text{Inv}(N^\lambda)$ の Morse 分解 $\{M(p)\}_{p \in P}$ について,

$$CH_*(M(p), \varphi^\lambda) = 0, \quad p \in P.$$

- (3)

$$M(i)^{\lambda_{\text{SN}}} := \bigcap_{\mu > 0} \overline{\bigcup_{\lambda \in (\lambda_{\text{SN}}, \lambda_{\text{SN}} + \mu)} M_i^\lambda}, \quad i = 0, 1,$$

とする. ここで, $N(i)$ ($M(i) = \text{Inv}(N(i))$), $i = 0, 1$ は互いに素な $\text{Inv}(N^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda_{\text{SN}}, \lambda_{\text{SN}} + \mu)$ 内の孤立化近傍で, (CSN2) を満たすものである. この時, 次のいずれかが成り立つ:

- $M(0)^{\lambda_{\text{SN}}} \cap M(1)^{\lambda_{\text{SN}}} \neq \emptyset$.
- $M(0)^{\lambda_{\text{SN}}} \cap M(1)^{\lambda_{\text{SN}}} = \emptyset$ かつ, 連結なコンパクト不変集合 \tilde{M} で, $M(i)^{\lambda_{\text{SN}}} \cap \tilde{M} \neq \emptyset, i = 0, 1$ を満たすものが存在する.

定理 3.4. (弧状連結な) 孤立化近傍 $N \subset X \times \Lambda$ が $[\lambda_0, \lambda_1]$ 上 C-ピッチフォーク型ならば, 次が満たされる.

- (1) $\lambda_{\text{PF}} \in \Lambda_{\text{PF}}$.
- (2) 任意の $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_{\text{PF}}]$ と, 任意の $\text{Inv}(N^\lambda)$ の Morse 分解 $\{\text{Inv}(N(0)), \text{Inv}(N(1)), \text{Inv}(N(2))\}$ で, (CPF2)-(CPF4) を満たすものについて,

$$CH_*(\text{Inv}(N(i)), \varphi^\lambda) = 0, \quad i = 0, 1.$$

- (3)

$$M(i)^{\lambda_{\text{PF}}} := \bigcap_{\mu > 0} \overline{\bigcup_{\lambda \in (\lambda_{\text{PF}}, \lambda_{\text{PF}} + \mu)} M_i^\lambda}, \quad i = 0, 1, 2$$

とする. ここで, $N(i)$ ($M(i) = \text{Inv}(N(i))$), $i = 0, 1$ は互いに素な $\text{Inv}(N^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda_{\text{PF}}, \lambda_{\text{PF}} + \mu)$ 内の孤立化近傍で, (CPF2)-(CPF5) を満たすものである. この時, 次のいずれかが成り立つ:

- $\bigcap_{i=0,1,2} M(i)^{\lambda_{\text{PF}}} \neq \emptyset$.
- $M(0)^{\lambda_{\text{PF}}} \cap M(1)^{\lambda_{\text{PF}}} \neq \emptyset$ かつ $M(i)^{\lambda_{\text{PF}}} \cap M(2)^{\lambda_{\text{PF}}} = \emptyset, i = 0, 1$.
- $M(0)^{\lambda_{\text{PF}}} \cap M(1)^{\lambda_{\text{PF}}} = \emptyset$ かつ $M(i)^{\lambda_{\text{PF}}} \cap M(2)^{\lambda_{\text{PF}}} \neq \emptyset, i = 0, 1$.
- $M(i)^{\lambda_{\text{PF}}}, i = 0, 1, 2$ は互いに素で, かつ連結なコンパクト不変集合 \tilde{M} で, 次のいずれかを満たすものが存在する.
 - \tilde{M} と $g\tilde{M}$ はどちらも $M(0)^{\lambda_{\text{PF}}}, M(1)^{\lambda_{\text{PF}}}$ と交わりを持つ.
 - \tilde{M} は $M(0)^{\lambda_{\text{PF}}}, M(2)^{\lambda_{\text{PF}}}$ と交わりを持ち, $g\tilde{M}$ は $M(1)^{\lambda_{\text{PF}}}, M(2)^{\lambda_{\text{PF}}}$ と交わりを持つ.

ここで定理 3.3 の証明の概略を述べる. 定理 3.4 に対しても同様に示される. (1) は孤立化近傍, Morse 分解の robustness より従う.

(2) について. $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_{SN}]$ を任意に取る. Conley 指数が 0 でない Morse 集合があるとすると, ホモロジー-長完全列を用いて, $\text{Inv}(N^\lambda)$ の Morse 分解で, (CSN2) を満たすものが取れる. すなわち, $\lambda \in \Lambda_{SN}$. また孤立化近傍の robustness を用いると, λ より少し小さなパラメータ値についても, (CSN2) は満たされる. しかしそれは λ_{SN} の定義に反する.

(3) $M(0)^{\lambda_{SN}} \cap M(1)^{\lambda_{SN}} = \emptyset$ とする. この時集合 A を次のように定義する:

$$A := \{x \in \text{Inv}(N^{\lambda_{SN}}) \mid \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, } M_0^{\lambda_{SN}} \text{ の点から } x \text{ への } \varepsilon\text{-chain が存在する.}\}$$

この時次が示される.

補題 3.5. A 任意のコンパクト近傍 U に対して, $\text{Inv}(N^{\lambda_{SN}})$ 内アトラクタ \tilde{A} で, $A \subset \tilde{A} \subset U$ を満たすものがとれる.

これは孤立不変集合であり, 孤立化近傍の robustness を用いると, $CH_*(\tilde{A}, \varphi^{\lambda_{SN}}) \neq 0$ がわかる. さらに \tilde{A} の $\text{Inv}(N^{\lambda_{SN}})$ 内 dual リペラーをとると, これも孤立不変集合で, Conley 指数は非自明. つまり, (CSN2) を満たす. そして孤立化近傍の robustness より, λ_{SN} より小さなパラメータ値でも (CSN2) を満たす. これは λ_{SN} の定義に反する.

注意 3.6. この定理では λ_* ($= \lambda_{SN}$ または λ_{PF}) より大きなパラメータ値での不変集合の振る舞いについては述べていない. というのも, $(\lambda_*, \lambda_1]$ で不変集合がより複雑な振る舞いをする (解析的手法で特定することが困難な場合も含む) 可能性を排除しきれないからである. ここでの振る舞いを記述するにはさらに条件を課さないといけないだろう. しかし, C 型孤立化近傍は, 分岐が起こるのであるパラメータ値の前後 λ_0, λ_1 における不変集合の Conley 指数などの情報しか与えていない. その情報のみで, サドル・ノード型の場合は $\lambda = \lambda_*$ において 2 つの不変集合が交わりを持ち, $[\lambda_0, \lambda_*)$ において不変集合は Conley 指数の意味で消滅 (あるいは本当に消滅) していて, ピッチフォーク型の場合は, $[\lambda_0, \lambda_*]$ において Conley 指数の意味で非自明な構造をもつ不変集合は \mathbb{Z}_2 -対称なものだけになることがわかる.

その意味で, この 2 つの孤立化近傍内部では, 不変集合がサドル・ノード型あるいはピッチフォーク型の分岐を起こしていると言える.

4 数値検証

有限区間 $I = [0, \ell]$ ($\ell = 2\pi/L$, $L > 0$) 上で定義された Swift-Hohenberg 方程式

$$u_t = E(\nu, u) = \{\nu - (1 + \Delta)^2\} u - u^3, \quad u(\cdot, t) \in L^2(I), \quad \nu > 0 \quad (2)$$

に, 周期境界条件と偶関数条件

$$u(x, t) = u(x + \ell, t), \quad u(-x, t) = u(x, t),$$

を課した問題の, 自明解からのピッチフォーク分岐を検証する. ここに, $E : (0, \infty) \times L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ で, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$ としている.

Swift-Hohenberg 方程式の解を Fourier 級数展開することで, (偶関数条件もあわせて) 次を考える:

$$\dot{a}_k = \mu_k a_k - \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = k, n_i \in \mathbb{Z}} a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3},$$

$$\mu_k = \nu - (1 - k^2 L^2)^2$$

$$(u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(t) \cos(kLx) \text{ with } a_k = a_{-k}).$$

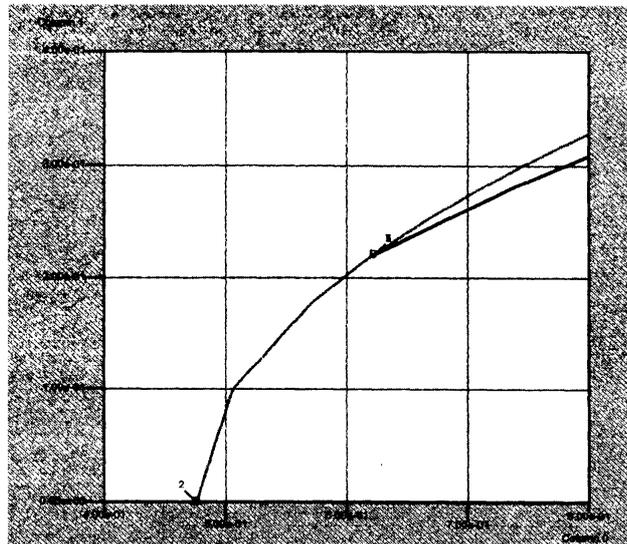
この無限次元力学系について、次の事項を検証する。今回は数値検証法として、[1] の手法を用いた。具体的な検証法についてはそちらを参照されたい。

1. m (ここでは $m = 9$) 次ガレルキン近似

$$\dot{a}_k = \mu_k a_k - \sum_{n_1+n_2+n_3=k, |n_i|<m} a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

の定常解の分岐の検証 (分岐追跡ソフト AUTO を用いて)。

2. 数値的分岐後のパラメータ値 λ_1 における、厳密な定常解 (3つ) の一意存在・非存在検証。ここで (CPF3,4) が確かめられる。
3. 厳密定常解の Conley 指数を求め、(CPF5,6) を確認。
4. 分岐後の3つの定常解を含む index pair を取り、index pair が定義する孤立化近傍 J 内の不変集合の構造を調べ、(CPF2) を確認する。これは Conley 指数理論を用いて確かめられる。
5. 分岐前のパラメータ値 λ_0 において、 J 内に1つしか定常解がないこと、さらにその解の Conley 指数を求め、(CPF1) を確認する。
6. J と $[\lambda_0, \lambda_1]$ の直積集合を取り、各パラメータ値で J の境界におけるベクトル場が消えない事を検証する。



Swift-Hohenberg 方程式の分岐図式。

横軸 ν , 縦軸 $\|u\|_2$, $L = 0.65$ としている。

$\nu = 0.476$ 付近で自明解からのピッチフォーク分岐, $\nu = 0.622$ 付近で2次分岐が起こる。

まず 1. から 4. を確かめることで、次がわかる。

定理 4.1. $L = 0.65$, $\nu = 0.477$, $m = 10$ とする。この時、表 1 で示すブロック J はちょうど 3つの定常解

表1 ブロック J

k	a_k^-	a_k^+
0	$-1.00000139556 \times 10^{-5}$	$1.00000139556 \times 10^{-5}$
1	$-1.00002936491 \times 10^{-5}$	$1.00002936491 \times 10^{-5}$
2	$-1.73305269031 \times 10^{-2}$	$1.73305269031 \times 10^{-2}$
3	$-1.00000236634 \times 10^{-5}$	$1.00000236634 \times 10^{-5}$
4	$-1.0000987842 \times 10^{-5}$	$1.0000987842 \times 10^{-5}$
5	$-1.00012203322 \times 10^{-5}$	$1.00012203322 \times 10^{-5}$
6	$-1.00270894064 \times 10^{-5}$	$1.00270894064 \times 10^{-5}$
7	$-1.00000446765 \times 10^{-5}$	$1.00000446765 \times 10^{-5}$
8	$-1.00000446765 \times 10^{-5}$	$1.00000446765 \times 10^{-5}$
$k \geq 9$	$-1.0 \times k^{-8}$	$1.0 \times k^{-8}$

u_0, u_1, u_2 を含んでいて、それらの Conley 指数が以下のようにになっている：

$$CH_n(u_i, \varphi^{0.477}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, \quad i = 0, 1,$$

$$CH_n(u_2, \varphi^{0.477}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}.$$

J の Conley 指数は以下のようになる：

$$CH_n(J, \varphi^{0.477}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}.$$

また、 $\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}$ は $u_0 < u_2, u_1 < u_2$ を満たす $\text{Inv}(J)$ の Morse 分解になっている。

5. を確かめる。すると次がわかる。

定理 4.2. $L = 0.65, \nu = 0.476$ とする。このとき、定理の J 内にはただ 1 つの真の定常解が存在する。また J の Conley 指数は以下のようにになっている：

$$CH_n(J, \varphi^{0.476}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}.$$

6. を確かめる。すると最終的な結果として、次が示される。

定理 4.3. $[0.476, 0.477] \times J$ は C -ピッチフォーク型孤立化近傍である。

これにより、自明解からのピッチフォーク分岐が C -ピッチフォーク型の意味で厳密に捉えられることが示された。なお、この自明解からの分岐のパラメータ値は厳密に求めることができ、その値は $\nu = 0.4761$ である。

表 2 1 次分岐ブランチの数値解

k	$(u_0)_k$
0	6.6643×10^{-12}
1	0
2	$2.209339562 \times 10^{-1}$
3	0
4	3.87×10^{-14}
5	0
6	$5.3494458034 \times 10^{-5}$
7	0
8	0
9	0

5 結論・展望・謝辞

今研究集会では Swift-Hohenberg 方程式の自明定常解からのピッチフォーク分岐を、本稿で述べた手法と [1] の手法を組み合わせることで位相的に厳密に捉えられる事を述べた。同様の検証が、非自明定常解からの分岐に対しても可能となることを期待している。現在はまだ検証の最中であるが、今研究集会後、Sarah Day, Marcio Gameiro, Jean-Philippe Lessard, Konstantin Mischaikow 各氏の研究 ([2], [3]) とそこで用いられるプログラムを Marcio Gameiro 氏に紹介・提供してもらい再検証を試みたところ、2 次分岐ブランチ上の (非自明) 一意定常解を捉えることができた ([1] の方法は検証に不動点の双曲性も依存しているため、2 次分岐ブランチ上の解を捉える事が非常に難しい。2008 年 6 月初旬現在、[1] の方法で 2 次分岐ブランチを捉えることはできていない)。彼らの方法は Conley 指数理論を用いていないが、Zgliczynski, Mischaikow 両氏の手法 [5] を用いると真の定常解を含む孤立化ブロックを、数値定常解の周りにかつ一意定常解を含むブロック内に作ることができ、よって一意定常解の Conley 指数を求めることができる。その結果をここで述べておこう：

記号を 1 つ定義する。 $W(r) := \prod_{k=0}^{m-1} [-r, r] \times \prod_{k \geq m} [-\frac{A_s}{k^s}, \frac{A_s}{k^s}]$ とする。

定理 5.1. $\nu = 0.6225$, $L = 0.65$, $m = 10$ とする。まず, $\bar{u}_0 = (u_0, 0, 0, 0, \dots)$, $u_0 \in \mathbb{R}^{10}$ を表 2 のようにとり, $r = 9.171948787 \times 10^{-7}$, $A_s = 1.0 \times 10^{-4}$, $s = 4$ とする。この時, $\bar{u}_0 + W(r)$ 内にただ 1 つの真の定常解が存在し, その Conley 指数も定義できて, それは

$$CH_n(\bar{u}_0, \varphi^{0.6225}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

となる。

次に, $\bar{u}_i = (u_i, 0, 0, 0, \dots)$, $u_i \in \mathbb{R}^{10}$, $i = 1, 2$, を表 3 のようにとり, $r = 4.8240334 \times 10^{-9}$, $A_s = 1.0 \times 10^{-4}$, $s = 4$ とする。この時, $\bar{u}_i + W(r)$ 内にただ 1 つの真の定常解が存在し, その Conley 指数も定義できて, それは

$$CH_n(\bar{u}_i, \varphi^{0.6225}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

表3 2次分岐ブランチの数値解

k	$(u_1)_k$	$(u_2)_k$
0	$-1.367787264 \times 10^{-4}$	$-1.367787264 \times 10^{-4}$
1	$8.4967866684 \times 10^{-3}$	$-8.4967866684 \times 10^{-3}$
2	$2.2061357791 \times 10^{-1}$	$2.2061357791 \times 10^{-1}$
3	$-1.6468745642 \times 10^{-4}$	$1.6468745642 \times 10^{-4}$
4	$-7.862633772 \times 10^{-7}$	$-7.862633772 \times 10^{-7}$
5	$-1.3609985749 \times 10^{-5}$	$1.3609985749 \times 10^{-5}$
6	$-5.3252258015 \times 10^{-5}$	$-5.3252258015 \times 10^{-5}$
7	$6.35325633 \times 10^{-8}$	$-6.35325633 \times 10^{-8}$
8	3.695472×10^{-10}	3.695472×10^{-10}
9	2.3426532×10^{-9}	$-2.3426532 \times 10^{-9}$

表4 1次分岐ブランチの数値解 (分岐前)

k	$(u_0)_k$
0	$6.1851126843 \times 10^{-9}$
2	$2.2025364532 \times 10^{-1}$
4	$3.5767702590 \times 10^{-11}$
6	$-5.3002049802 \times 10^{-5}$
8	$-8.5114010346 \times 10^{-15}$
10	$4.5330663563 \times 10^{-9}$
12	$1.0779606033 \times 10^{-18}$
14	$-3.7588438390 \times 10^{-13}$
16	$-1.1184112720 \times 10^{-22}$
18	$2.8218166757 \times 10^{-17}$
$k = 1, 3, 5, \dots, 19$	0
$k = 20, \dots, 29$	0

となる.

最後に, $\nu = 0.6216$, $m = 30$, $\bar{u} = (u, 0, 0, 0, \dots)$, $u \in \mathbb{R}^{30}$ を表4のようにとり, $r = 7.5359420 \times 10^{-9}$, $A_s = 1.0 \times 10^{-2}$, $s = 4$ とする. この時, $\bar{u}_0 + W(r)$ 内にただ1つの真の定常解が存在し, その Conley 指数も定義できて, それは

$$CH_n(\bar{u}_0, \varphi^{0.6216}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

となる.

後は [1] の定常解の非存在検証を併用することで, 非自明定常解からの「ピッチフォーク分岐」を厳密に捉える事ができるだろう.

この研究の類似として、ホップ分岐、トランスクリティカル分岐についても本稿のような概念を導入し、精度保証つきで分岐を厳密に捉えられるかどうか。これも課題のひとつとして挙げられる。

数値検証について。今回 Swift-Hohenberg 方程式に周期境界条件を課したため、数値検証ではガレルキン法を用いている。さらに 1 次元区間で定義された方程式に限定されている。より一般の偏微分方程式に適用するには、空間多次元、一般の境界条件を課した方程式の場合でも、[5] の方法のように定常解とその Conley 指数を求められる手法を確立する必要がある。それには有限要素法を用いることになるだろう。その手法が確立された時、本稿の概念と併せる事で、偏微分方程式が生成する力学系の構造の数値検証法が大きく発展するであろう。

最後に、平岡 裕章氏と Marcio Gameiro 氏には [1] の手法、[3] の手法それぞれの検証プログラムを提供してもらい（今研究ではそれらのプログラムに、[5] の手法をプログラムとして書き加え、さらに独自にアレンジしたものを用いた）、様々な助言をいただいた。この場を借りて、感謝の意を述べる。

参考文献

- [1] S.Day, Y.Hiraoka, K.Mischaikow and T.Ogawa, Rigorous Numerics for Dynamics: A Study of the Swift-Hohenberg Equation, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 4(2005), 1–31.
- [2] S.Day, J-P.Lessard and K.Mischaikow, Validated continuation for equilibria of PDEs, *SIAM J. NUMER. ANAL.*, 4(2007), 1398–1424.
- [3] M.Gameiro, J-P.Lessard and K.Mischaikow, Validated Continuation Over Large Parameter Ranges for Equilibria of PDEs, to appear.
- [4] K.Mischaikow, Conley Index Theory, in L.Arnold, et al., *Dynamical Systems* (R.Johnson,ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol.1609, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 119–207.
- [5] P.Zgliczyński and K.Mischaikow, Rigorous numerics for partial differential equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* 1(2001), 255–288.