数理解析研究所講究録
第1617巻 2008年 193-205

On traces of Hecke operators on spaces of Siegel cusp forms of degree two

金沢大学・理工研究域　若槻 聡 (Satoshi Wakatsuki)
Institute of Science and Engineering, Kanazawa University

1. Introduction

本稿の目的は, 2次の正則ジーゲルカスプ形式の空間上のヘッケ作用素の跡に関する、ある公式について解説することである. 公式は長いので, ページの制約からすべてを書くことはできないため要約した形で紹介する. この公式は, 跡の具体的な数値が計算可能な明示的公式を得るための一つのステップとなっている. 我々の公式はセルバーグ跡公式による2次の正則ジーゲルカスプ形式の空間の次元公式の研究 [6, 7, 19, 1, 9, 10, 25] が元になっており, 作用が自明な場合の跡の値は空間の次元となるので, 次元公式の一般化になっている. 我々は, それらの次元公式によって具体的な次元の数値を得ることができる. 一変数の場合の明示的跡公式については, Eichler, Hijikata たちによって与えられた. その明示的跡公式に至る過程において, Eichler は各共役類ごとの寄与を明示的に計算した跡公式を与えた. 我々の公式はその Eichler の公式の類似であると言える. そこから明示的跡公式を得るためには, 各共役類の寄与を足し上げることが可能になるように, 共役類をパラメータ化する必要がある.

また本稿では, 我々の公式の応用として, 大きな離散系列表現の重複度公式についても解説する. 我々の次元公式と楕円共役類のデータと Arthur の閉公式 [3] を用いることで, $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash Sp_2(\mathbb{R}))$ 上の大きな離散系列表現の重複度をえることができた. さらに正則離散系列表現の重複度との比較により, $Sp_2(\mathbb{Z})$ のジーゲルカスプ形式に関する, いくつかの予想を得ることもできた. 他にも我々の公式から得られた次元公式の最近の応用として, paramodular 群に関する明示的次元公式とコンパクト群上の保型形式の空間の次元との比較 (cf. [13, 14]), 低いウェイトのベクトル値ジーゲルカスプ形式および Witt operator の全射性の研究 (cf. [15]) がある. この原稿では, 大きな離散系列表現の重複度についてのみ扱う.

2. 準備

簡単にジーゲルカスプ形式とヘッケ作用素について復習する. まず

$$GSp_n(\mathbb{Q})_+ = \left\{ g \in GL_{2n}(\mathbb{Q}) \mid \exists \mu(g) \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ s.t. } gJ_n{}^tg = \mu(g)J_n \right\},$$
$$Sp_n(\mathbb{Q}) = \left\{ g \in GL_{2n}(\mathbb{Q}) \mid gJ_n{}^tg = J_n \right\}$$

と置く. ただし $J_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$, I_n は n 次の単位行列とする. そして n 次のジーゲル上半空間を

$$H_n = \{ Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z, \ \mathrm{Im}(Z) > 0 \}$$

と定義する．ただし，$M_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列全体の集合，$\mathrm{Im}(Z)$ は Z の虚部，>0 は正定値を意味する．$GSp_n(\mathbb{R})_+$ は H_n 上に $g\cdot Z=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, $g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in GSp_n(\mathbb{R})_+$, $Z\in H_n$ と作用する．ρ を $GL_n(\mathbb{C})$ の m 次元有理表現とする．そして $g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in GSp_n(\mathbb{R})_+$, $Z\in H_n$ について，保型因子を $J(g,Z)=\rho(CZ+D)^{-1}$ と定める．Γ を $Sp_n(\mathbb{Q})$ の算術的部分群とする．Γ に関する重み ρ の n 次の正則ジーゲルカスプ形式の空間 $S_\rho(\Gamma)$ が次のように定義される．

$$S_\rho(\Gamma)=\left\{\begin{array}{l} f:H_n\to\mathbb{C}^m \mid f \text{ is holomorphic,}\\ J(\gamma,Z)f(\gamma\cdot Z)=f(Z)\ (\forall\gamma\in\Gamma,\ \forall Z\in H_n),\\ \sup_{Z\in H_n}\|\rho(\mathrm{Im}(Z)^{1/2})f(Z)\|_{\mathbb{C}^m}<+\infty \end{array}\right\}.$$

$S_\rho(\Gamma)$ 上の線形作用素であるヘッケ作用素を定義しよう．各元 $\alpha\in GSp_n(\mathbb{Q})_+$ について，$\Gamma\alpha\Gamma=\cup_{t=1}^{u}\Gamma\alpha_t$, $(\alpha_t\in GSp_n(\mathbb{Q})_+)$ と分解する．この分解によって作用素 $T=[\Gamma\alpha\Gamma]$ を

$$(Tf)(Z)=\mu(\alpha)^{k_1+k_2+\cdots+k_n-\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{t=1}^{u}J(\alpha_t,Z)f(\alpha_t\cdot Z)$$

のように，$f\in S_\rho(\Gamma)$ に対して定義する．ただし，$(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ $(k_1>k_2>\cdots>k_n>0)$ は有限次元表現 ρ に対応する符号とする．そして，$Tf\in S_\rho(\Gamma)$ であり，T は $S_\rho(\Gamma)$ 上の線形作用素である．保型 L 関数はヘッケ作用素の固有値によって定義される．そのため，T の跡の値を具体的に計算したい．$n=1$ のときは，Eichler, Hijikata らによって計算可能な公式が与えられている．我々の目的は，$n=2$ の場合にそのような公式を与えることである．

3. 跡公式 ($n=1$)

このセクションでは一変数の場合を復習する．この章の結果は，基本的に Eichler によるものである．より詳しいことに関しては，[17, Chapter 6] を参照されたい．

定理 3.1. (cf. [17, Theorem 6.4.9])．$n=1$, $\rho=\det^k$, $k>2$ とする．さらに跡公式の記述を簡単にするために，$-I_2\in\Gamma$, k は偶数，$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Gamma\alpha\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\Gamma\alpha\Gamma$ を仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T)\ =\ &\sum_{\gamma\in\Gamma\alpha\Gamma\cap Z(GL_2(\mathbb{Q}))}\frac{k-1}{8\pi}\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H_1)\,\mu(\gamma)^{\frac{k}{2}-1}\\ &-\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}\frac{\mu(\gamma)^{\frac{k}{2}-1}}{\sharp(\Gamma_\gamma)}\frac{e^{-i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}-\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}\frac{\mu(\gamma)^{\frac{k}{2}-1}}{2}\frac{\lambda^{-k+1}}{\lambda-\lambda^{-1}}\\ &-\lim_{s\to+0}\frac{s}{8}\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}|m(\gamma)|^{-s-1}\,\mu(\gamma)^{\frac{k}{2}-1}.\end{aligned}$$

上の式の記号を説明する．$\{\gamma\}_\Gamma$ は代表元 γ に関する Γ-共役類である．$Z(GL_2(\mathbb{Q}))$ は $GL_2(\mathbb{Q})$ の中心全体の集合である．vol は $x+yi \in H_1$ について $y^{-2}dxdy$ と定める不変測度に対する値である．第二項の和は，代表元 γ が $\mu(\gamma)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $(\sin\theta \neq 0)$ と $SL_2(\mathbb{R})$-共役であるような共役類全体を走る．第三項の和は，代表元 γ が $\mu(\gamma)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ $(\lambda > 1)$ と $SL_2(\mathbb{R})$-共役であり，かつ γ は Γ の *cusp* を固定するような共役類全体を走る．ただし γ は $Z(GL_2(\mathbb{Q}))$ の元ではない．第四項の和は，代表元 γ が，ある元 $\xi \in SL_2(\mathbb{Q})$ について $\gamma = \mu(\gamma)^{\frac{1}{2}}\xi^{-1}\begin{pmatrix}1 & h(\gamma) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\xi$ $(h(\gamma) \neq 0)$ となるような共役類全体を走る．さらに，固定部分群は $\Gamma_\gamma = \xi^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1 & nh \\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}\xi$ となり，$m(\gamma) = h(\gamma) \times h^{-1}$ と定める．

この段階の公式では，まだ明示的とは言い難い．何らかの形で Γ-共役類をパラメータ化する必要がある．もっとも簡単な例として，$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の場合を紹介する．

$$T(m) = \left\{\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = m\right\}$$

と置く．$T(m) = \cup_{ab=m,\, a|b}\Gamma\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}\Gamma$ より，上で定義した $\Gamma\alpha\Gamma$ のヘッケ作用素の和として見ることができる．

定理 3.2. (cf. [26]) $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, $k > 2$, k は偶数とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T(m)) &= -\frac{1}{2}\sum_{t^2 \leq 4m} P_k(t,m)H(4m - t^2) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{dd'=m}\min(d,d')^{k-1}.\end{aligned}$$

上の記号を説明する．$\eta + \bar{\eta} = t$, $\eta\bar{\eta} = m$ とすると，

$$P_k(t,m) = \begin{cases}(k-1)m^{(k-2)/2} & (\eta = \bar{\eta}) \\ (\eta^{k-1} - \bar{\eta}^{k-1})(\eta - \bar{\eta})^{-1} & (\eta \neq \bar{\eta})\end{cases}.$$

そして $H(n)$ は，$n = 0$ のときは $H(0) = -\frac{1}{12}$ で，$n > 0$ のときは判別式が $-n$ である正定値整二次形式の $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値類を，$x^2 + y^2$ の定数倍と同値なら $\frac{1}{2}$ 倍，$x^2 + xy + y^2$ の定数倍と同値なら $\frac{1}{3}$ 倍して，カウントした数である．

上の定理の式において，第一項は中心元と楕円元の寄与，第二項が双曲元とユニポテント元の寄与となっている．この形まで来ると具体的に数値を計算することが可能となり，明示的と呼ぶに相応しい公式となる．ミンコフスキーの簡約化から $SL(2,\mathbb{Z})$ 同値類のカウントは手計算でも難しくないことに注意しよう．より一般的な場合に関して，次元公

式については [21, 第2章, 第3章] を, ヘッケ作用素の跡については [17, Theorem 6.8.4] を参照されたい.

4. 跡公式 ($n = 2$)

この章では, 定理 3.1 の類似である我々の公式について解説したい. $n = 1$ の場合と異なり, $n = 2$ の場合は共役類の種類が多いため, ページの制約から本稿で跡公式をすべて書くことは難しい. そのため, 我々の跡公式を要約した形で説明する. この公式をもとに $\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z})$ (もしくは paramodular 群などの算術的部分群) に対して計算可能な明示的跡公式 (定理 3.2 の類似など) を与えることが我々の目的である. 次元公式以外では, まだ計算可能な公式を得られていないことに注意する.

我々の跡公式について詳しく説明する前に, 定理 3.1 の公式の値の意味を解釈しよう. 定理 3.1 では, 跡の各寄与を次の値で記述していることがすぐに分かる.

(1) $SL_2(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現の指標の値.
(2) 基本領域の体積.
(3) リーマンゼータ関数の $s = 1$ での留数.

我々の公式では次の値によって, 跡の各寄与を記述する.

(1) $Sp_2(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現の指標もしくはその極限の値.
(2) 基本領域の体積.
(3) フルヴィッツゼータ関数の $s = 1$ での留数と定数項.
(4) 2元2次形式の空間に関連した
概均質ゼータ関数の $s = 3/2$ での留数.

このことから, 我々の公式は定理 3.1 の類似であることが分かる. 一般論から (1)(2) の値を用いることは明らかである (cf. [2, 3, 4]). アーサー跡公式はユニポテント元の寄与が明示的でないため, 我々の公式は概均質ゼータ関数を用いて正則離散系列表現の行列係数について消えないようなアーサー跡公式のユニポテント元の寄与を明示的に記述したと言える.

我々の公式について, 詳しく説明しよう: 我々の定式化は [9, Theorem 5-1] に従っており, それを一般化したものになっている.

$$G(\mathbb{Q}) = GSp_2(\mathbb{Q})_+, \quad G(\mathbb{Q})^1 = Sp_2(\mathbb{Q})$$

とおく. 次に極大放物部分群の一つとその Levi 分解を

$$P(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q})^1 \right\}, \quad P(\mathbb{Q}) = M(\mathbb{Q}) \cdot N(\mathbb{Q})$$

$$M(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q})^1 \right\}, \quad N(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q})^1 \right\}$$

と置こう. そして次のように両側分解を与える.

$$G(\mathbb{Q})^1 = \bigcup_{m=1}^{v} \Gamma h_m P(\mathbb{Q}) \quad \text{(disjoint union)} \ (h_m \in G(\mathbb{Q})^1,\ h_1 = I_4).$$

我々の公式には次の仮定が Γ に必要である.

仮定 4.1. 各 m $(1 \leq m \leq v)$ について

$$P_1(\mathbb{Q}) \cap (h_m^{-1}\Gamma h_m) = (M(\mathbb{Q}) \cap (h_m^{-1}\Gamma h_m)) \cdot (N(\mathbb{Q}) \cap (h_m^{-1}\Gamma h_m))$$

と分解するような $h_1, h_2, \ldots, h_v$ が存在する.

この仮定は $\Gamma\alpha\Gamma$ の中心元とユニポテント元との積からなる元の寄与を計算するのに必要となる. 主に計算する対象となる算術的部分群 $Sp_2(\mathbb{Z})$, $K(p)$ や $\Gamma_0(p)$ については成り立つことが分かっている. 一方でこの仮定を満たさない算術的離散群を, 私は知らない. もう一つ仮定が必要である.

仮定 4.2. $\alpha^* = \mu(\alpha)\alpha^{-1}$ とおく. このとき, $\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma\alpha^*\Gamma$ が成り立つ.

この仮定も中心元とユニポテント元の積からなる元の寄与の計算に使われる. つまり, それらの元が $\Gamma\alpha\Gamma$ に含まれない場合は必要ない. α が $G(\mathbb{Q})$ の中心元ならば明らかに成り立つ. また $\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z})$ の場合にも, 明らかにこの仮定は満たされる. この仮定を除くと, 二元二次形式の空間に関連した概均質ゼータ関数の $s = 3/2$ における定数項が寄与に現れる可能性がある. まだその値を計算できていないので, この仮定をつける必要がある.

我々の公式に用いる記号を説明しよう. 代表元 γ に関する Γ-共役類を $\{\gamma\}_\Gamma$ と書く. 中心化群を

$$C(\gamma; G(\mathbb{R})^1) = \{g \in G(\mathbb{R})^1 \,;\, g\gamma = \gamma g\}, \quad C(\gamma; \Gamma) = C(\gamma; G(\mathbb{R})^1) \cap \Gamma$$

とおく. また $G(\mathbb{R})^1$ の部分群 C について, $\overline{C} = \{\pm I_4\} \cdot C/\{\pm I_4\}$ とおく. ここから γ は $\Gamma\alpha\Gamma$ の元で, その共役類の寄与が消えないものとしよう. 寄与が消えるような元全体は, principal unipotent 元, $\pm \begin{pmatrix} I_2 & S \\ & I_2 \end{pmatrix}$ $(\det(S) < 0, -\det(S) \notin (\mathbb{Q}^\times)^2)$ と $G(\mathbb{Q})$-共役な元, そして, 適当な $\mathbb{Q}$ 上の放物的部分群に含まれない双曲元を因子として持つ元からなる. つまり, それら以外の元は寄与をもつ. 各共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ とその中心化群 $C(\gamma; G(\mathbb{R})^1)$ に対して, 適当な部分群 $C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1)$ を定める. すべての共役類について定義するには2,3ページを浪費してしまうので, 後で例として幾つかの共役類に対して定義を与える. $C_0(\gamma; \Gamma) = C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1) \cap \Gamma$ とおく. このような部分群 $C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1)$ は (i) $C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1)$ はコンパクトな半直積因子を持たない, (ii) $\mathrm{vol}(C_0(\gamma; \Gamma)\backslash C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1)) < +\infty$, (iii) $[C(\gamma; \Gamma) : C_0(\gamma; \Gamma)] < +\infty$, といった性質をもつ. さらに各共役類について, パラメーター s をもつダンピングファクター $v(Z, s)$ $(Z \in H_2)$ を定義する. ダンピングファクターについては本稿では説明しない. Bergman 核から得られる関数 $\psi(g, Z)$ を

$$\psi(g, Z) = C_{k,j} \cdot \mathrm{tr}\left[J(\gamma, Z)\rho\left(\frac{\gamma \cdot Z - \overline{Z}}{2i}\right)^{-1} \rho(\mathrm{Im}(Z)) \right],$$

$C_{k,j} = 2^{-6}\pi^{-3}(k-2)(j+k-1)(j+2k-3)$, $(Z \in H_2,\ g \in G(\mathbb{R}))$ と定める. 各共役類について

$$J_0(\gamma; s) = \int_{C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1)\backslash H_2} \psi(\gamma, \hat{Z}) v(\hat{Z}, s) d\hat{Z}$$

と積分 $J_0(\gamma; s)$ を定義する. $dZ = \det(Y)^{-3}dXdY$ ($Z = X+Yi$, dX,dY はルベーグ測度) は H_2 上の不変測度で, $d\hat{Z}$ は $C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1)$ のハール測度から誘導される測度とする. $J_0(\gamma; s)$ についても後で例として幾つかの値を紹介する. 各元 $\gamma \in \Gamma\alpha\Gamma$ について

$$[\gamma]_\Gamma = \left\{ \gamma' \in \Gamma\alpha\Gamma ;\ \begin{array}{l} \gamma_s = \gamma'_s, \quad C_0(\gamma'; G(\mathbb{R})^1) = C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1), \\ C(\gamma'; G(\mathbb{R})^1) \cong C(\gamma; G(\mathbb{R})^1) \end{array} \right\},$$

と定める. ただし, γ_s (resp. γ'_s) は γ (resp. γ') のジョルダン分解による半単純因子である. この $[\gamma]_\Gamma$ を γ の族と呼ぶ. この集合の共役類は一般論の $\mathcal{O}$-equivalence class (cf. [4]) を, さらに細かくしたものと見れる. 中心元とユニポテント元の積からなる元の族 $[\gamma]_\Gamma$ の Γ-共役による同値関係を $\sim$ で記す. そして, $[\gamma]_\Gamma/\sim$ を族 $[\gamma]_\Gamma$ における同値類の完全代表系とする. $Z(\Gamma)$ は Γ の中心, $\sharp(Z(\Gamma))$ はその位数とする.

定理 4.3. $T = [\Gamma\alpha\Gamma]$, $\rho = \det^k \otimes Sym_j$ (Sym_j は j 次の対称テンソル表現) とする. k を5以上とする. $\Gamma\alpha\Gamma$ が中心元とユニポテント元の積からなる元を持つときは, 仮定 *4.1*, *4.2* を仮定する. そのとき次の等式を得る.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(T) = \\
&\frac{\mu(\alpha)^{j+2k-3}}{\sharp(Z(\Gamma))} \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \frac{\operatorname{vol}(\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)\backslash\overline{C}_0(\gamma;G(\mathbb{R})^1))}{[\overline{C}(\gamma;\Gamma):\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)]} \lim_{s\to+0} J_0(\gamma;s) \\
&+\frac{\mu(\alpha)^{j+2k-3}}{\sharp(Z(\Gamma))} \sum_{[\gamma]_\Gamma} \frac{\operatorname{vol}(\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)\backslash\overline{C}_0(\gamma;G(\mathbb{R})^1))}{[\overline{C}(\gamma;\Gamma):\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)]} \lim_{s\to+0} \sum_{\gamma'\in[\gamma]_\Gamma} J_0(\gamma';s) \\
&+\frac{\mu(\alpha)^{j+2k-3}}{\sharp(Z(\Gamma))} \sum_{[\gamma]_\Gamma} \operatorname{vol}(\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)\backslash\overline{C}_0(\gamma;G(\mathbb{R})^1)) \\
&\qquad\qquad \times \lim_{s\to+0} \sum_{\gamma'\in[\gamma]_\Gamma/\sim} \frac{J_0(\gamma';s)}{[\overline{C}(\gamma';\Gamma):\overline{C}_0(\gamma';\Gamma)]}.
\end{aligned}$$

ただし, 第一項において $\{\gamma\}_\Gamma$ は寄与の消えない半単純元の Γ-共役類全体を走る, 第二項においては $[\gamma]_\Gamma$ は寄与の消えない中心でない半単純元とユニポテント元の積からなる元の族の Γ-共役類の完全代表系を走る, 第三項は寄与の消えない中心元とユニポテント元の積からなる元の族の Γ-共役類の完全代表系を走る.

いくつかの $\{\gamma\}_\Gamma$ と $[\gamma]_\Gamma$ について, その寄与の明示的な値を見ていこう. まず γ が半単純元である場合の例をあげる. γ が半単純元で寄与が消えない場合は, $\mu(\gamma)^{(j+2k)/2} \times \lim_{s\to+0} J_0(\gamma; s)$ は正則離散系列表現の指標もしくはその極限となる. このことは一般論より従う (cf. [16, 2]). 我々の証明に用いるテスト関数はコンパクトサポートを持たないので, 一般論とは別に積分の収束性を証明の多くの過程で示す必要がある. $\{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})}$ で代表元を γ とする $G(\mathbb{Q})$-共役類とする. 例えば $\gamma \in \Gamma\alpha\Gamma$ があ

る $g \in G(\mathbb{R})$ について

$$g^{-1}\gamma g = \mu(\gamma)^{1/2}\begin{pmatrix}\lambda I_2 & \\ & \lambda^{-1}I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k(\theta) & \\ & k(\theta)\end{pmatrix},$$

$\left(k(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \lambda > 1, \sin\theta \neq 0\right)$ となるとしよう. $\{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})} \cap P(\mathbb{Q}) = \emptyset$ のときは, その寄与は消える. $\{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})} \cap P(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ のときは寄与はある. この場合 $C_0(g^{-1}\gamma g; G(\mathbb{R})^1) = \{I_4\}$ と定める. Hirai の指標公式 (cf. [12]) より

$$\lim_{s\to+0} J_0(\gamma; s) = \mu(\gamma)^{-(j+2k)/2} \times \frac{\lambda^{-(j+2k-3)}(e^{-i(j+1)\mu} - e^{i(j+1)\mu})}{(\lambda-\lambda^{-1})(e^{i\mu}-e^{-i\mu})(\lambda^{-1}e^{i\mu}-\lambda e^{-i\mu})(\lambda^{-1}e^{-i\mu}-\lambda e^{i\mu})}$$

を得る. 具体的な寄与を数値で見てみよう. 簡単のため, $\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z})$,
$\gamma = \begin{pmatrix}0 & m & 0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $(m \in \mathbb{Z}_{>0})$ としよう. 明らかに $\mu(\gamma) = m$ であり, $\lambda = m^{1/2}$, $\theta = \pi/2$ と分かる. j が奇数のときは, 寄与が 0 になることはすぐに分かる. j を偶数としよう. そのとき,

$$\lim_{s\to+0} J_0(\gamma; s) = -\frac{(-1)^{j/2}}{m^{k+j/2}(1+m^{-1})(1-m^{-1})^2}.$$

中心化群は

$$C(\gamma;\Gamma) = \left\{\pm I_4, \pm\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

なので, $\{\gamma\}_\Gamma$ の寄与は

$$\frac{\mu(\gamma)^{j+2k-3}}{\sharp(Z(\Gamma))}\frac{\mathrm{vol}(\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)\backslash\overline{C}_0(\gamma;G(\mathbb{R})^1))}{[\overline{C}(\gamma;\Gamma):\overline{C}_0(\gamma;\Gamma)]}\lim_{s\to+0} J_0(\gamma;s)$$
$$= -4^{-1}(-1)^{j/2}m^{k+j/2}(m+1)^{-1}(m-1)^{-2}$$

となり, 寄与の値が得られた. j は偶数なので, 寄与の値は有理数であることが分かる.

次に半単純元とユニポテント元の積からなる元の場合の例を見よう. ある $g \in G(\mathbb{Q})$ について,

$$\gamma = g\cdot\mu(\gamma)^{1/2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot g^{-1} \in \Gamma\alpha\Gamma \quad (\lambda \neq 0)$$

となる元 γ の族 $[\gamma]_\Gamma$ の寄与を与えよう．この場合，

$$[\gamma]_\Gamma = g\left\{\mu(\alpha)^{1/2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&n+a\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\;;\;\begin{matrix}n\in\mathbb{Z},\,a\in\mathbb{Q}\\ n+a\neq 0\end{matrix}\right\}g^{-1}$$

と族が与えられる．そして

$$C_0(\gamma;G(\mathbb{R})^1) = g\left\{\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&1&0&u\\c&0&d&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\;;\;\begin{matrix}ad-bc=1\\ u\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}g^{-1}$$

と与える．$C_0(\gamma;G(\mathbb{R})^1)$ 上の不変測度は，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&w\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v&0\\0&v^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

と対応させて，g で変数変換したときに $2v^{-3}dwdv(d\theta/2\pi)\times du$ となるように定める．このとき，

$$J_0(\gamma;s) = \frac{e^{\mathrm{sgn}(\lambda)\pi i(s+1)/2}}{|\lambda|^{s+1}}\times$$
$$\left\{\mu(\gamma)^{-(j+2k)/2}\times\frac{(-1)^{k-2}(j+k-1)-(-1)^{j+k-1}(k-2)}{2^5\pi^2}+o(s)\right\}$$

となる．さらに

$$\lim_{s\to+0}\sum_{\gamma'\in[\gamma]_\Gamma}J_0(\gamma';s) = -\mu(\gamma)^{-(j+2k)/2}\times(1-i\cdot\cot^*\pi a)\times 2^{-5}\pi^{-1}$$
$$\times\{(-1)^{k-2}(j+k-1)-(-1)^{j+k-1}(k-2)\}$$

を得る．ただし，$\cot^*\theta=\cot\theta\ (\theta\neq n\pi)$, $0\ (\theta=n\pi)$ と置いた．

最後に中心元とユニポテント元の積からなる元の寄与を例に見よう．ある $g\in G(\mathbb{Q})$ によって，

$$\gamma = g\cdot\mu(\gamma)^{1/2}\begin{pmatrix}I_2&S\\&I_2\end{pmatrix}\cdot g^{-1}\in\Gamma\alpha\Gamma$$

(S は $\det(S)>0$ である 2 次の対称行列) となる元 γ の族 $[\gamma]_\Gamma$ の寄与を計算しよう．V を 2 次の対称行列全体の空間としよう．仮定 4.1 より，ある $GL_2(\mathbb{Q})$ の算術的離散群 Γ_M と，ある V の Γ_M-不変格子 L_1 と，L_1 を含む $V(\mathbb{Q})$ の Γ_M-不変部分集合 L で $[L:L_1]<+\infty$ と

$$[\gamma]_\Gamma = g\cdot\left\{\mu(\gamma)^{1/2}\begin{pmatrix}I_2&S\\&I_2\end{pmatrix}\;;\;\det(S)>0,\ S\in L\right\}\cdot g^{-1}$$

を満たし，$[\gamma]_\Gamma/\sim$ の同値類と L/Γ_M の同値類が一致するものが存在する．ただし Γ_M の L への作用は，$g\in\Gamma_M$, $x\in L$ について $x\mapsto gx\,{}^tg$ で

与えられる．また

$$C_0(\gamma; G(\mathbb{R})^1) = g \cdot \left\{ \begin{pmatrix} I_2 & T \\ & I_2 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R})^1 \right\} \cdot g^{-1}$$

と定める．さらにその不変測度は g で変数変換したときに $V(\mathbb{R})$ に関する通常のルベーグ測度になるように定める．そう定めた時に，

$$J_0(\gamma; s) = \left\{ \mu(\gamma)^{-(j+2k)/2} \times \frac{(j+1)}{2^3\pi^2} + o(s) \right\} \times \frac{e^{\pm\pi i(-3-2s)/2}}{(\det S)^{s+3/2}}$$

を得る．ただし，S が負定値のとき符号 $+$，S が正定値のとき符号 $-$ とする．仮定 4.2 と Shintani[22] のテクニックから，

$$\begin{aligned} & \lim_{s \to +0} \sum_{\gamma' \in [\gamma]_\Gamma/\sim} \frac{J_0(\gamma'; s)}{[\overline{C}(\gamma'; \Gamma) : \overline{C}_0(\gamma'; \Gamma)]} \\ = \ & \mu(\alpha)^{-(j+2k)/2} c_{k,j}^{-1} \times \frac{(j+1)}{2^2 \cdot \pi} \times \frac{1}{[\Gamma_M : (\Gamma_M)_+]} \times \frac{\mathrm{vol}((\Gamma_M)_+ \backslash H_1)}{\mathrm{vol}(L \backslash SM(2; \mathbb{R}))} \end{aligned}$$

を得る． ただし，$(\Gamma_M)_+ = \{g \in \Gamma_M ; \det(g) > 0\}$，$H_1$ 上の測度は $y^{-2}dxdy$ $(x + y\sqrt{-1} \in H_1)$，$\mathrm{vol}(L \backslash SM(2; \mathbb{R})) = [L : L_1]^{-1} \times \int_{V(\mathbb{R})/L_1} dv$ (dv はルベーグ測度) とする．

このような感じで，すべての共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ と族 $[\gamma]_\Gamma$ の寄与を明示的に計算することが可能である．もし共役類をパラメータ化することができれば，定理 4.3 から明示的跡公式が得られることが分かる．

5. 証明の概略

我々の証明では，従来の研究 [19, 6, 7, 9, 25] を元に，跡公式の一般論 [16, 4] と 半単純実 Lie 群の軌道積分の理論 [20, 5] を用いている．一般論と大きく異なる点は，半単純でない元の寄与をテスト関数である Bergman 核の具体的な形から直接強引に計算したことである．我々の証明は次の Godement の公式からスタートする．

$$\mathrm{Tr}([\Gamma\alpha\Gamma]) = \frac{\mu(\alpha)^{j+2k-3}}{\sharp(Z(\Gamma))} \int_{\Gamma \backslash H_2} \sum_{\gamma \in \Gamma\alpha\Gamma} \psi(\gamma, Z) dZ.$$

セルバーグ跡公式としては，この積分と無限和を交換して右側を共役類のごとに軌道積分と中心化群の基本領域の体積の積で展開することによって左側の値を求める．しかし，そのまま交換したのでは右側は収束しない．そのため，トランケイションやダンピングファクターの議論が必要となる．我々の公式を導く最初のステップは従来の Morita のトランケイションの議論を一般論である Arthur のトランケイションに従って修正することから始まる．一般論と異なり，我々のテスト関数はコンパクトサポートを持たない．そのため，Morita[19] と Christian[6] の収束の議論を用いる，そして彼らの結果を一般化する必要がある．収束の議論を除けば，半単純元の寄与は一般論とパラレルな議論で導くことができる．よって，我々に残された課題はユニポテント元の混じった元の寄与を明示的に計算することである．次のステップとして，トランケ

イションで積分領域が削られている軌道積分たちを, ダンピングファクターで削った部分を戻してやることなどを施して, 計算可能な重み付きもしくはダンピングファクター付きの軌道積分の形に導く. その形が積分 $J_0(\gamma; s)$ となっている. そして次に積分 $J_0(\gamma; s)$ のパラメータ s の $s \to +0$ での挙動を計算する. 計算結果の例は前のセクションで書いてある. [19, 9] での計算を手本に, 直接の計算で s に関する挙動を計算した. s に寄らない部分は [19, 9] での計算と [20, 5] の極限公式により求めることができる. そして最後に, ユニポテント元に関する大域的な値を, フルヴィッツゼータ関数の古典的な結果と [22] による結果で計算した.

6. 重複度公式

次元公式については, 楕円共役類の部分を計算する手法が従来よりあるので計算可能な公式を導くことができた. 例えば $\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z})$ の楕円共役類は Gottschling, Ueno により分類されている (cf. [24, 9]). また Hashimoto-Ibukiyama によりアデール化し, すべての局所因子を計算することによって, 主要な離散群について計算可能な楕円共役類の寄与の公式が与えられている (cf. [11, 10, 13]). 今回, 我々の公式と上述の楕円元の寄与の計算手法に Arthur の閉公式 [3] を組み合わせることで, 大きい離散系列表現の重複度を計算することができたので, 我々の公式の応用の一つとして紹介したい.

まず $L^2(\Gamma\backslash Sp_2(\mathbb{R}))$ の discrete spectrum の空間を $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash Sp_2(\mathbb{R}))$ としよう. そして, その右正則表現に関する既約直交分解が次のように与えられる.

$$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash Sp_2(\mathbb{R})) \cong \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\pi \cdot \pi, \quad (m_\pi < +\infty).$$

ここで $\hat{G}$ は $Sp_2(\mathbb{R})$ の unitary dual で, m_π はユニタリ表現 π の重複度である. $\pi(m_1, m_2)$ を Harish-Chandra parameter (m_1, m_2) に関する離散系列表現としよう. ただし $m_1 > m_2 > 0$ (resp. $0 > m_1 > m_2$) のとき $\pi(m_1, m_2)$ は minimal K-type $\det^{m_2+2} \otimes Sym_{m_1-m_2-1}$ (resp. $\det^{m_2-1} \otimes Sym_{-m_1+m_2+1}$) な正則 (resp. 反正則) 離散系列表現であり, $m_1 > -m_2 > 0$ (resp. $-m_2 > m_1 > 0$) のとき $\pi(m_1, m_2)$ は minimal K-type $\det^{m_2} \otimes Sym_{m_1-m_2+1}$ (resp. $\det^{m_2-1} \otimes Sym_{m_1-m_2+1}$) な大きな離散系列表現であるとする.

$l_1 > l_2 > 0$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{Z})$ と固定する. もし $l_1 \neq l_2 + 1$ かつ $l_2 \neq 1$ とすると, Arthur の閉公式と楕円元の寄与の計算法から我々は重複度

$$m_{\pi(l_1,l_2)} + m_{\pi(l_1,-l_2)} + m_{\pi(l_2,-l_1)} + m_{\pi(-l_2,-l_1)}$$

を計算することができる. さらに次のことが知られている.

$$m_{\pi(l_1,l_2)} = \dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_2+2} \otimes Sym_{l_1-l_2-1}}(\Gamma),$$

$$m_{\pi(l_1,l_2)} = m_{\pi(-l_2,-l_1)}, \quad m_{\pi(l_1,-l_2)} = m_{\pi(l_2,-l_1)}.$$

その結果, 我々は大きい離散系列表現の重複度 $m_{\pi(l_1,-l_2)}$ を得ることができる. ここで $\Gamma_2(1) = Sp_2(\mathbb{Z})$, $\Gamma_2(N) = \{\gamma \in \Gamma_2(1) \mid \gamma \equiv I_4 \pmod N\}$ と定める. そのとき以下の結果をえる.

定理 6.1. $l_1-l_2\geq 2$, $l_2\geq 3$ とする. $\Gamma=\Gamma_2(N)$, $N\geq 3$ とき,

$$\begin{aligned} m_{\pi(l_1,-l_2)} &= [\Gamma_2(1):\Gamma_2(N)]\times\{2^{-8}3^{-3}5^{-1}l_1l_2(l_1^2-l_2^2)\\ &+2^{-6}3^{-2}(l_1^2-l_2^2)N^{-2}-2^{-5}3^{-1}(l_1-l_2)N^{-3}\\ &-2^{-4}3^{-1}(l_1+l_2)N^{-3}+2^{-3}N^{-4}\}. \end{aligned}$$

$\Gamma=\Gamma_2(2)$, l_1-l_2 が奇数のとき,

$$\begin{aligned} m_{\pi(l_1,-l_2)} &= 2^{-3}3^{-1}l_1l_2(l_1^2-l_2^2)+2^{-3}\cdot 5(l_1^2-l_2^2)\\ &-2^{-3}\cdot 3\cdot 5(l_1-l_2)-2^{-2}\cdot 3\cdot 5(l_1+l_2)\\ &+2^{-2}\cdot 3^2\cdot 5+2^{-3}\cdot 5(-1)^{l_2}l_1l_2\\ &-2^{-3}\cdot 3\cdot 5(-1)^{l_2}(l_1+l_2)+2^{-3}\cdot 3^2\cdot 5(-1)^{l_2}. \end{aligned}$$

$\Gamma_2(1)$ のときは公式が長いので, 正則離散系列表現の重複度 $m_{\pi(l_1,l_2)}$ と一変数カスプ形式の空間の次元 $\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^k}(SL_2(\mathbb{Z}))$ を用いて記述する.

定理 6.2. $l_1-l_2\geq 2$, $l_2\geq 3$, l_1-l_2 は奇数とする. $\Gamma=\Gamma_2(1)$ のとき,

$$m_{\pi(l_1,-l_2)}=m_{\pi(l_1,l_2)}+\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_1-l_2+1}}(SL_2(\mathbb{Z}))\times\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_1+l_2+1}}(SL_2(\mathbb{Z})).$$

重複度 $m_{\pi(l_1,l_2)}$ と $\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^k}(SL_2(\mathbb{Z}))$ は, 具体的な数値の計算できる明示的次元公式があることに注意する. 重複度 $m_{\pi(l_1,l_2)}$ については, [23] または [25] を参照されたい. そのため $m_{\pi(l_1,-l_2)}$ の具体的な数値も得られる. $\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_1-l_2+1}}(SL_2(\mathbb{Z}))\times\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_1+l_2+1}}(SL_2(\mathbb{Z}))$ の部分は Endoscopy から来る大きな離散系列表現に関連したのカスプ形式であることが予想される. アーサー予想から, 大きな離散系列表現に関連したカスプ形式に Saito-Kurokawa lifting type のものは存在せず, $Sp_2(\mathbb{Z})$ の正則ジーゲルカスプ形式には Yoshida lifting type のものは存在しないことが予想される. そのため, この等式からウェイト $\det^k\otimes Sym_j$ $(k\geq 5,\ j>0)$, $Sp_2(\mathbb{Z})$ の正則ジーゲルカスプ形式には Saito-Kurokawa lifting type は存在せず, それらの L-packet の相方は $Sp_2(\mathbb{Z})$-fixed vector をもつような無限素点の表現が大きな離散系列表現である保型表現であることが予想される.

Hiraga[12] の結果から, regular condition を満たさないときの pseudo-coefficient の挙動が分かるので, 以下の結果を得る.

定理 6.3. $l_1-l_2=1$, $l_2\geq 3$ とする. $\Gamma=\Gamma_2(1)$ のとき,

$$m_{\pi(l_1,-l_2)}=m_{\pi(l_1,l_2)}-\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_1+l_2+1}}(SL_2(\mathbb{Z}))+m(l_1+l_2+1).$$

ただし, $m(k)$ は, $\mathfrak{q}$ はある *θ-stable Siegel parabolic subalgebra* で *minimal K-type* は $\det^{1-k}\otimes Sym_{2k-2}$ である表現 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma_2(1)\backslash Sp_2(\mathbb{R}))$ における重複度とする.

Miyazaki[18] の結果として, k が奇数のとき, $S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ から $m(k)$ に関連した空間へのリフティングが構成されている. もしそのリフトが全単射であるなら, $\dim_{\mathbb{C}} S_{\det^{l_1+l_2+1}}(SL_2(\mathbb{Z}))-m(l_1+l_2+1)$ は Maass space に対応すると予想される. そのため, この等式から, Saito-Kurokawa lifting から得られないウェイト $\det^k$, $Sp_2(\mathbb{Z})$ の正則ジーゲルカスプ形式の L-packet の相方は $Sp_2(\mathbb{Z})$-fixed vector をもつような無

限素点の表現が大きな離散系列表現である保型表現であることが予想される．また $Sp_2(\mathbb{Z})$-fixed vector をもつような無限素点の表現がパラメータ $(l_1, -l_1+1)$ の大きな離散系列表現である保型表現には Yoshida lifting type のものが存在しないことが予想される．

REFERENCES

[1] T. Arakawa, The dimension of the space of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two related to a quaternion unitary group, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), 125–145.

[2] J. Arthur, The characters of discrete series as orbital integrals, Inv. Math. **32** (1976), 205–261.

[3] J. Arthur, The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators, Inv. Math. **97** (1989), 257–290.

[4] J. Arthur, An introduction to the trace formula, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[5] M. Božičević, A limit formula for elliptic orbital integrals, Duke Math. J. **113** (2002), 331–353.

[6] U. Christian, Untersuchung einer Poincaréschen Reihe I, J. Reine Angew. Math. **233** (1968), 37–88; II, J. Reine Angew. Math. **237** (1969), 12–25.

[7] U. Christian, Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. **277** (1975), 130–154; Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. **296** (1977), 108–118.

[8] T. Hirai, Explicit form of the characters of discrete series representations of semisimple Lie groups, Harmonic analysis on homogenous spaces, Proc. Sympos. Pure Math. (Amer. Math. Soc.) **26** (1972), 281–288.

[9] K. Hashimoto, The dimension of the spaces of cusp forms on Siegel upper half-plane of degree two I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA **30** (1983), 403–488.

[10] K. Hashimoto, The dimension of the spaces of cusp forms on Siegel upper half-plane of degree two II. The $\mathbb{Q}$-rank one case. Math. Ann. **266** (1984), 539–559.

[11] K. Hashimoto, T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 549–601.

[12] K. Hiraga, On the multiplicities of the discrete series of semisimple Lie groups, Duke Math. J. **85** (1996), 167–181.

[13] T. Ibukiyama, On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,R)$ and its compact twist $Sp(2)$ (I), Automorphic forms and number theory, Adv. Stud. Pure Math. **7** (1985), 7–30.

[14] T. Ibukiyama, Paramodular forms and compact twist, 第９回整数論オータムワークショップ報告集 (2006), 37–48.

[15] T. Ibukiyama, S. Wakatsuki, Siegel modular forms of small weight and the Witt operator, preprint.

[16] R. P. Langlands, The dimension of spaces of automorphic forms, Amer. J. Math. **85** (1963), 99–125.

[17] T. Miyake, Modular forms, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[18] T. Miyazaki, On Saito-Kurokawa lifting to cohomological Siegel modular forms, Manuscripta Math. **114** (2004), 139–163.

[19] Y. Morita, An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **21** (1974), 167–248.

[20] W. Rossmann, Nilpotent orbital integrals in a real semisimple Lie algebra and representations of Wely groups, Progr. Math. **92**, Birkhäuser, Boston, 1990, 263–287.

[21] 清水英男, 保型関数 I, 岩波書店.

[22] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA **22** (1975), 25–65.

[23] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $Sp(2,\mathbb{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser A **59** (1983), 139–142.

[24] K. Ueno, On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2. I. Singular fibres of the first kind. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **18** (1971), 37–95; II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **19** (1972), 163–199.

[25] S. Wakatsuki, Dimension formula for the spaces of Siegel cusp forms of degree two, preprint.

[26] D. Zagier, The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$. Introduction to modular forms by S. Lang, Appendix, pp. 44–54, Springer, Berlin, 1976.

FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS, INSTITUTE OF SCIENCE AND ENGINEERING, KANAZAWA UNIVERSITY, KAKUMAMACHI, KANAZAWA, ISHIKAWA, 920-1192, JAPAN

E-mail address: `wakatuki@kenroku.kanazawa-u.ac.jp`