

# シフト不変性を実現する複素数離散ウェーブレット変換 Translation-Invariance Complex Discrete Wavelet Transform

章 忠 (Zhong Zhang) \*

戸田 浩 (Hiroshi Toda) \*

\* 豊橋技術科学大学  
(Toyohashi University of Technology)

## 1 はじめに

時間と周波数の同時解析が可能な道具として知られるウェーブレットは、さまざまな信号および画像の解析、処理に重要な役割を果たしてきた。とりわけ離散ウェーブレット変換 (Discrete Wavelet Transform, DWT) は、信号処理、画像処理に重要な役割を果たしてきた。例えば信号の大まかな形状を保持したまま、ホワイトノイズを除去したり、あるいは信号に含まれるパルス成分にターゲットを絞り、他の成分を元の状態に保存したまま、パルスのみを除去、もしくは抽出する等の処理が可能である。また画像処理においては、輪郭線となるエッジの部分を保存したまま、ノイズを除去したり、あるいはエッジのみを抽出する等の処理が可能である。ところで DWT には、一般的に Mallat[1] の提案した多重解像度解析 (Multi Resolution Analysis, MRA) の高速アルゴリズムが用いられる。これはターゲットの信号を、オクターブ毎に分割された各レベルのウェーブレット成分に、ダウンサンプリングを伴いながら高速に分解する手法であるが、このような DWT の変換結果には、シフト不変性にならないという問題が指摘されている [2]。すなわちシフト不変性とは、各レベルの解析結果の関数の形状が、解析始点位置 (信号の位相) に依存しないことであるが、上記の MRA に基づいた一般的な DWT では、このシフト不変性が保たれないのである。例えば信号の中からパルス成分のみを抽出しようとしても、パルスの位置の変動により、各レベルの解析結果の関数の形状が変動してしまう。すなわち各レベルの各ウェーブレットがパルスに的確にヒットする場合もあれば、そうではない場合もあり、解析結果にムラが生じてしまうのである。従って処理結果にも当然、ムラが生じてしまい、安定した精度が保障されないのが現状である。このようなシフト不変性の欠如は、信号処理や画像処理における、DWT の深刻な問題として一般的に認識されている。

このようなシフト不変性の欠如を改善するために、これまでさまざまな手法が試みられてきた。例えば Mallat[2] はマッチング追跡 (Matching Pursuit) という手法を提案した。これは冗長性を含む過剰なウェーブレット群の中から、ターゲットの信号によりマッチングしたものを順次に抽出していく手法であるが、処理にかなりの時間を要するのが欠点であった。Fernandes ら [3] はオールパスフィルタによる信号変換手法を提案した。これはターゲットの信号を実数部と虚数部が直

交する解析信号に変換し、これらを従来のDWTにより解析するする手法であるが、ナイキスト周波数付近に僅かな歪が発生し、変換、逆変換により信号が元に戻らない、完全再構成不能となる欠点があった。

シフト不変性の欠如を改善し、従来のDWTと高い互換性を保ちながら高速処理、かつ完全再構成を有する手法として、複素数離散ウェーブレット変換 (Complex Discrete Wavelet Transform, CDWT) が掲げられる [4, 5, 6, 7]. これは位相の異なるペアのウェーブレットにより、複素数ウェーブレットの実数部と虚数部を定義し、これらによるDWTの並列処理を行う手法である。そしてこの複素数ウェーブレットの実数部と虚数部を、Hilbert変換ペア (すなわち周波数領域の振幅がすべて等しく、かつ位相が一様に直交するペア) に設計することで、周波数特性を統一した実数部と虚数部の各ペアの、局所的な直交性を生み出すことができる。そのため各ペアのウェーブレットから位相情報が入手できるだけでなく、各ペアの合成ウェーブレットのノルムが容易に計算できるため、それらを従来のDWTのウェーブレット係数と同等に扱うことで、DWTと高い互換性を保つことができる。著者ら [8] は、このようなCDWTにおいて、Hilbert変換ペアの複素数ウェーブレットの、スケーリング関数の実数部と虚数部の形状が完全に一致し、1/2サンプルずれた状態において、シフト不変性が成立することを証明した。そしてこれに基づいて、筆者らは2種類の複素数ウェーブレットの設計法を提案した。一つは任意の実数型の直交ウェーブレットより、Hilbert変換ペアの複素数ウェーブレットを設計する手法 [9] で、これによりCDWTに利用できる複素数ウェーブレットの種類を飛躍的に増大させた [10]. もう一つは、直交ウェーブレットの一種であるMeyerウェーブレットを基礎にした、完全シフト不変性 (Perfect Translation Invariance, PTI) を実現する、Hilbert変換ペアの複素数ウェーブレット [11] で、その形状も多様な種類 (連続的に可変可能な無限の種類) を持つものである (このウェーブレットを完全シフト不変複素数ウェーブレットと呼ぶことにする)。

次に本文の議論の進め方について述べる。2章で必要な公式について吟味し、3章で任意の実数型の直交ウェーブレットより Hilbert 変換ペアの複素数ウェーブレットを設計する手法 [9] を紹介し、4章では CDWT の一般的な計算法について考察する。続いて5章では Meyer ウェーブレットを基礎にした完全シフト不変複素数ウェーブレット [11] と、それによるシンプルな CDWT の計算法を紹介する。そして6章で CDWT の過去を振り返り、今後の発展を展望する。

## 2 本文の議論に必要な公式について

この章では本文の議論に必要な公式について吟味する。なお本文で扱う関数は  $L^2(\mathbb{R})$  ( $\mathbb{R}$ : 実数) に属するものとし、積分の中で扱う関数  $f(t)$  に関しては

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1)$$

が成立することを前提とする。

## 2.1 内積, ノルム, 変換式

関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  の内積  $\langle f, g \rangle$  を次のように定義する。

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (2)$$

ただし本文では上記の内積  $\langle f, g \rangle$  を,  $\langle f(t), g(t) \rangle$  あるいは  $\langle f(u), g(u) \rangle$  とも表すことにする。なお  $\overline{g(t)}$  は  $g(t)$  の複素共役を表す。次に関数  $f(t)$  のノルム (Norm)  $\|f\|$  を次のように定義する。

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (3)$$

次に本文ではウェーブレット  $\psi_k(t)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$ : 整数) による, 関数  $f(t)$  の変換を表す式, 例えば

$$g(t) = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t) \quad (4)$$

あるいは係数  $1/2$  等を含んだ式

$$g(t) = \frac{1}{2} \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t) \quad (5)$$

等をウェーブレット  $\psi_k(t)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) による関数  $f(t)$  に対する変換式, あるいは単に変換式と呼ぶ。

## 2.2 $z$ 変換, 周波数応答関数, フーリエ変換

本文では  $z$  変換を次のように定義する。すなわち数列  $\{h_n\}$  における  $z$  変換  $H_z(z)$  を次の式で表す。

$$H_z(z) = \sum_n h_n z^{-n} \quad (6)$$

さらに  $z = e^{i\omega}$  を式 (6) に代入することにより, 周波数応答関数  $H_\omega(\omega)$  を, 次のように定義する。

$$H_\omega(\omega) = H_z(e^{i\omega}) \quad (7)$$

ところで逆  $z$  変換の式である

$$h_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c H_z(z) z^{n-1} dz \quad (8)$$

において、周回積分路  $c$  を複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円とすることにより、次のような周波数応答関数  $H_\omega(\omega)$  から数列  $\{h_n\}$  への変換式が導かれる。

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_\omega(\omega) e^{in\omega} d\omega \quad (9)$$

続いて関数  $f(t)$  のフーリエ変換  $\hat{f}(\omega)$  を、次のように定義する。

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (10)$$

また逆フーリエ変換を次のように定義する。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (11)$$

### 2.3 クロネッカーのデルタ, ディラックのデルタ関数

クロネッカーのデルタ (Kronecker delta)  $\delta_{k,l}$  ( $k, l \in \mathbf{Z}$ ) に関して、次式が成立する。

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (12)$$

ディラックのデルタ関数 (Dirac delta function)  $\delta(t)$  に関して、次式が成立する。

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (14)$$

また任意の関数  $f(t)$  において次式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (15)$$

### 2.4 Hilbert 変換ペアのウェーブレットについて

ペアのウェーブレット  $\psi^R(t)$ ,  $\psi^I(t)$  が Hilbert 変換ペアであるということは、以下の関係が成立することである [6, 9].

$$\hat{\psi}^I(\omega) = \begin{cases} i\hat{\psi}^R(\omega), & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -i\hat{\psi}^R(\omega), & \omega > 0 \end{cases} \quad (16)$$

ところでウェーブレットは直流成分を含まないので、以下の式が成立する。

$$\hat{\psi}^R(0) = \hat{\psi}^I(0) = 0 \quad (17)$$

すると式 (16), (17) より次式が導かれる.

$$\hat{\psi}^R(\omega) + i\hat{\psi}^I(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0 \\ 2\hat{\psi}^R(\omega), & \omega > 0 \end{cases} \quad (18)$$

式 (18) が成立する時,  $\psi^R(t)$ ,  $\psi^I(t)$  は Hilbert 変換ペアとなる [6, 9]. なお Hilbert 変換ペアの周波数領域の振幅はすべて等しく, かつ位相は一様に直交する.

### 3 任意の直交ウェーブレットより複素数ウェーブレットを設計する手法

この章では, 任意の直交ウェーブレットより, Hilbert 変換ペアの複素数ウェーブレットを設計する手法 [9] を紹介する. まず基礎となる直交ウェーブレットに関する基本公式について吟味し, 続いて複素数ウェーブレットの設計法を述べる.

#### 3.1 直交ウェーブレットに関する基本公式 [12, 13, 14]

直交ウェーブレットの重要な公式として, 次のようなツースケール関係と呼ばれる式が掲げられる.

$$\phi(t) = \sum_n p_n \phi(2t - n) \quad (19)$$

$$\psi(t) = \sum_n q_n \phi(2t - n) \quad (20)$$

$\phi(t)$  はスケーリング関数,  $\psi(t)$  はマザーウェーブレットであり, 2つの数列  $\{p_n\}$ ,  $\{q_n\}$  は共にツースケール数列と呼ばれるもので, 以下の関係が成立する.

$$q_n = (-1)^{1-n} p_{1-n} \quad (21)$$

またスケーリング関数, マザーウェーブレットの間には, 以下のような直交関係が成立する.

$$\langle \phi(t - k), \phi(t - l) \rangle = \delta_{k,l} \quad (22)$$

$$\langle \psi(t - k), \psi(t - l) \rangle = \delta_{k,l} \quad (23)$$

$$\langle \psi(t - k), \phi(t - l) \rangle = 0 \quad (24)$$

なおスケーリング関数, およびマザーウェーブレットのノルムは以下のように1に規格化されている.

$$\|\phi(t)\| = \|\psi(t)\| = 1 \quad (25)$$

ところで CDWT の計算において、整数座標  $n \in \mathbf{Z}$  におけるスケーリング関数  $\phi(n)$  の値が必要になるので、この求め方について述べておく。例えば  $\{p_n\}$  が  $n_0 \leq n \leq n_1 \in \mathbf{Z}$  で 0 でない値を取る場合、式 (19) よりスケーリング関数  $\phi(t)$  はコンパクトサポート  $[n_0, n_1]$  を持つので、 $\phi(n)$  ( $n_0 + 1 \leq n \leq n_1 - 1 \in \mathbf{Z}$ ) の値は次のように求まる。すなわち式 (19) に  $t = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_1 - 1$  を代入することにより、 $\phi(n_0 + 1), \phi(n_0 + 2), \dots, \phi(n_1 - 1)$  に関する次の方程式が得られる。

$$P \begin{pmatrix} \phi(n_0 + 1) \\ \phi(n_0 + 2) \\ \vdots \\ \phi(n_1 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(n_0 + 1) \\ \phi(n_0 + 2) \\ \vdots \\ \phi(n_1 - 1) \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{n_0+1} & p_{n_0} & 0 & \dots & 0 \\ p_{n_0+3} & p_{n_0+2} & p_{n_0+1} & & \vdots \\ p_{n_0+5} & p_{n_0+4} & p_{n_0+3} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & p_{n_1-1} \end{pmatrix} \quad (27)$$

上記の方程式 (26), (27) は不定となるが、整数座標  $n \in \mathbf{Z}$  におけるスケーリング関数  $\phi(n)$  の和が 1 となることは既知であるから

$$\sum_{n=n_0+1}^{n_1-1} \phi(n) = 1 \quad (28)$$

と連立させることにより、スケーリング関数  $\phi(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  を求めることができる。

### 3.2 直交ウェーブレットを基にした複素数ウェーブレットの設計 [9]

一つの直交ウェーブレット  $\psi^R(t)$  のツースケール数列  $\{p_n^R\}$  を既知とし、 $\psi^R(t)$  と Hilbert 変換ペアを成す  $\psi^I(t)$  のツースケール数列  $\{p_n^I\}$  を求める手法を紹介する。この方法により、目的とする複素数ウェーブレットの実数部、虚数部のそれぞれは、 $\psi^R(t)$ ,  $\psi^I(t)$  として求めることができる。Selesnick[6] の研究によれば、ひとつの直交ウェーブレット  $\psi^R(t)$  のツースケール数列を  $\{p_n^R\}$ , もう一方の直交ウェーブレット  $\psi^I(t)$  のツースケール数列を  $\{p_n^I\}$  として

$$P_\omega^I(\omega) = P_\omega^R(\omega)H_\omega(\omega) \quad (29)$$

$$H_\omega(\omega) = e^{-i\omega/2} \quad (30)$$

が成立する時、これら 2 つの直交ウェーブレット  $\psi^R(t)$ ,  $\psi^I(t)$  は互いに Hilbert 変換ペアとなる。なお  $P_\omega^R(\omega)$ ,  $P_\omega^I(\omega)$ ,  $H_\omega(\omega)$  は、それぞれ数列  $\{p_n^R\}$ ,  $\{p_n^I\}$ ,  $\{h_n\}$

の周波数応答であり、これらは式 (6), (7) により定義される。ところで式 (30) より  $H_\omega(\omega)$  は  $\omega$  のみで表される周波数領域の関数であるから、式 (9) より数列  $\{h_n\}$  は次のように求められる。

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_\omega(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-1/2)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{i(n-1/2)} e^{i(n-1/2)\omega} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin\{(n-1/2)\pi\}}{(n-1/2)\pi} \end{aligned} \quad (31)$$

式 (29) は周波数領域における積なので、時間領域では、次の畳み込みの式に置き換えられる。

$$p_n^I = \sum_k p_k^R h_{n-k} \quad (32)$$

すなわちツースケール数列  $\{p_n^I\}$  は、既知のツースケール数列  $\{p_n^R\}$  と式 (31) で表される数列  $\{h_n\}$  との畳み込みにより求まる。なお、この複素数ウェーブレットは直交ウェーブレットを基礎とするため、ツースケール数列の実数部  $\{p_n^R\}$ 、虚数部  $\{p_n^I\}$  が求まれば、それをもとにスケーリング関数の実数部  $\phi^R(t)$ 、虚数部  $\phi^I(t)$ 、マザーウェーブレットの実数部  $\psi^R(t)$ 、虚数部  $\psi^I(t)$ 、および CDWT の計算に必要なすべての数列が求まる [12, 13, 14]。

図 1 は Daubechies 6 ウェーブレット [12] のツースケール数列  $\{p_n^R\}$  ( $0 \leq n \leq 11 \in \mathbf{Z}$  において  $\{p_n\}$  は 0 でない値を取る) より設計された複素数 RI-Daubechies 6 ウェーブレットの例である。ただし図 1 の (a) はスケーリング関数の実数部  $\phi^R(t)$  と虚数部  $\phi^I(t)$ 、(b) はウェーブレットの実数部  $\psi^R(t)$  と虚数部  $\psi^I(t)$ 、(c) はウェーブレットの周波数特性  $|\hat{\psi}^R(\omega) + i\hat{\psi}^I(\omega)|$  である。なお  $\{p_n^I\}$  が 0 でない  $n$  の範囲は有限に収まらないが、近似的に  $-4 \leq n \leq 15 \in \mathbf{Z}$  とすることで、以下に述べるように実用上、十分な精度が得られる (詳細な  $n$  の範囲の設定法は文献 [9] を参照)。ところで  $\psi^R(t)$  と  $\psi^I(t)$  が Hilbert 変換ペアであれば、式 (18) より  $\omega < 0$  において  $|\hat{\psi}^R(\omega) + i\hat{\psi}^I(\omega)| = 0$  となるが、図 1 の (c) における  $\omega < 0$  の全領域に対するエネルギーの割合は  $-66.0\text{dB}$  となり、十分に 0 に近いこと確認された。したがってこのように設計されたウェーブレットの実数部  $\psi^R(t)$ 、虚数部  $\psi^I(t)$  は、十分な精度で Hilbert 変換ペアを形成しているものと考えられる。また図 1 の (a) のように、スケーリング関数の実数部  $\phi^R(t)$  と虚数部  $\phi^I(t)$  の位置は近似的に  $1/2$  サンプルずれた状態にあり、両者の形状の差は  $-26\text{dB}$  であることが確認された (すなわち虚数部  $\phi^I(t)$  を  $-1/2$  サンプル移動して 2 つを重ね合わせて差し引いたものを誤差と考えると、実数部  $\phi^R(t)$  に対する誤差の割合は  $-26\text{dB}$  となる)。そしてこのことより 1 章で示したシフト不変条件 [8] は、実用上、問題のない精度で満足されることも確認された [9, 10]。また Daubechies 6 ウェーブレットの他にも、Daubechies 2~10, Symlet 4~10, Coiflet 2~10 [12] のそれぞれの直交ウェーブレットにおいて、同様に複素数ウェーブレットの設計が可能であることが確認された [9]。

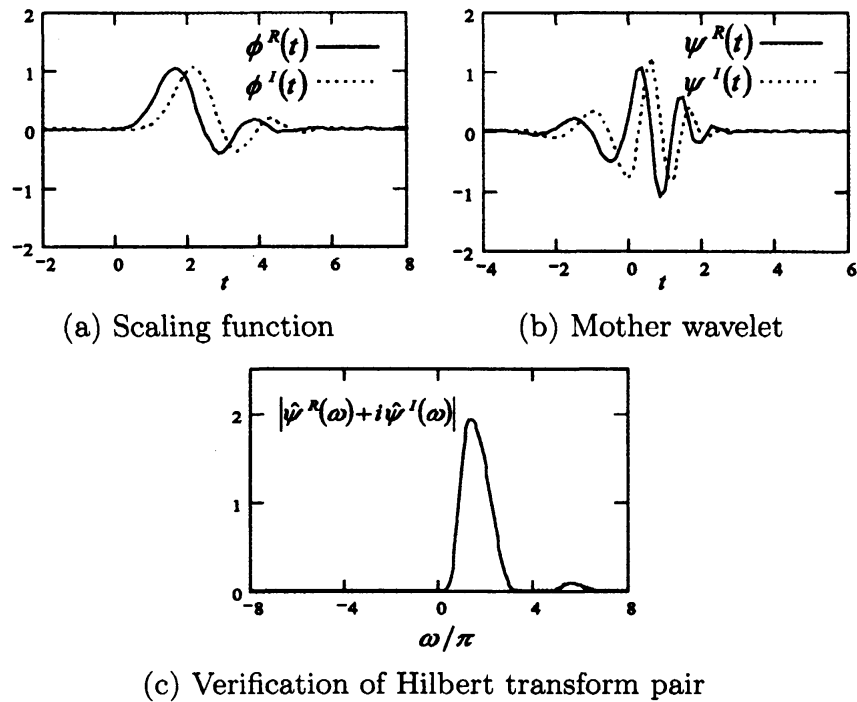


図 1: RI-Daubechies 6 ウェーブレット

## 4 CDWT の計算法

この章では、直交ウェーブレットを基礎とする複素数ウェーブレットを用いた複素数離散ウェーブレット変換 (CDWT) の計算法 [10] について考察する。まず CDWT の基本概念について吟味し、次に CDWT の計算前に必要な補間作業、続いて分解アルゴリズムによる変換、再構成アルゴリズムによる逆変換を考察する。

### 4.1 CDWT の基本概念 [10]

レベル  $j$  の  $k$  番目のスケール関数の実数部  $\phi_{j,k}^R(t)$ 、虚数部  $\phi_{j,k}^I$ 、およびウェーブレットの実数部  $\psi_{j,k}^R$ 、虚数部  $\psi_{j,k}^I$  は次のように表せる。

$$\phi_{j,k}^R(t) = \sqrt{2^j} \phi^R(2^j t - k) \quad (33)$$

$$\phi_{j,k}^I(t) = \sqrt{2^j} \phi^I(2^j t - k) \quad (34)$$

$$\psi_{j,k}^R(t) = \sqrt{2^j} \psi^R(2^j t - k) \quad (35)$$

$$\psi_{j,k}^I(t) = \sqrt{2^j} \psi^I(2^j t - k) \quad (36)$$



続いて任意の関数  $g(t)$  に対するタイトフレームな CDWT は次式で表せる.

$$g(t) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left\{ \langle g, \psi_{j,k}^R \rangle \psi_{j,k}^R(t) + \langle g, \psi_{j,k}^I \rangle \psi_{j,k}^I(t) \right\} \quad (37)$$

ところで変換式 (37) はレベル  $\pm\infty$  に及ぶ計算となるが, 実際の計算範囲は有限に限定しないといけないので次のようにする. まず式 (13)~(15) に示すディラックのデルタ関数  $\delta(t)$  をもとに, 次の関数  $f^\phi(t)$  を定義する.

$$f^\phi(t) = \sum_k f_k^\phi \delta(t-k) \quad (38)$$

式 (38) の数列  $\{f_n^\phi\}$  は, ターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  の情報をもとに決定されるが, これに関しては後述する. この関数  $f^\phi(t)$  に対して, 全ウェーブレットが張る空間によりタイトフレームな解析を行い, その中からレベル  $-1$  以下の部分空間を取り出した状態を計算する. ただしウェーブレットによる変換は, レベル  $-1$  からレベル  $J$  ( $J < 0 \in \mathbf{Z}$ ) までの有限区間とし, それ以下はレベル  $J$  のスケーリング関数による変換にまとめる. するとこのような変換式は以下のようなになるが, ここではウェーブレット係数  $\{d_{j,k}^R\}$ ,  $\{d_{j,k}^I\}$  やスケーリング係数  $\{c_{J,k}^R\}$ ,  $\{c_{J,k}^I\}$  を用いて, 内積を分離して表現している.

$$f(t) = \sum_{j=J}^{-1} \sum_k \left\{ d_{j,k}^R \psi_{j,k}^R(t) + d_{j,k}^I \psi_{j,k}^I(t) \right\} + \sum_k \left\{ c_{J,k}^R \phi_{J,k}^R(t) + c_{J,k}^I \phi_{J,k}^I(t) \right\} \quad (39)$$

$$d_{j,k}^R = \frac{1}{2} \langle f^\phi, \psi_{j,k}^R \rangle, \quad d_{j,k}^I = \frac{1}{2} \langle f^\phi, \psi_{j,k}^I \rangle \quad (40)$$

$$c_{J,k}^R = \frac{1}{2} \langle f^\phi, \phi_{J,k}^R \rangle, \quad c_{J,k}^I = \frac{1}{2} \langle f^\phi, \phi_{J,k}^I \rangle \quad (41)$$

このような変換式 (39) において  $f(t)$  がターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  を補間するよう, すなわち  $f_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  となるように, 式 (38) の数列  $\{f_n^\phi\}$  を予め求めておけばよい.

## 4.2 補間作業 [10]

変換式 (39) がターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  を補間するような, 式 (38) の数列  $\{f_n^\phi\}$  は, 以下の補間の作業により求まる [10]. まず補間に使用する補間関数  $s(t)$  を以下のように定義する.

$$s(t) = s^R(t) + s^I(t) \quad (42)$$

$$s^R(t) = \frac{1}{2} \sum_m \langle \delta(u), \phi^R(u-m) \rangle \phi^R(t-m) \quad (43)$$

$$s^I(t) = \frac{1}{2} \sum_m \langle \delta(u), \phi^I(u-m) \rangle \phi^I(t-m) \quad (44)$$

するとディラックのデルタ関数に関する式 (15) を用いて、式 (43) の  $s^R(t)$  は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} s^R(t) &= \frac{1}{2} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \overline{\phi^R(u-m)} du \phi^R(t-m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \overline{\phi^R(-m)} \phi^R(t-m) \end{aligned} \quad (45)$$

同じようにして  $s^I(t)$  は次のように展開できる。

$$s^I(t) = \frac{1}{2} \sum_m \overline{\phi^I(-m)} \phi^I(t-m) \quad (46)$$

続いて補間関数  $s(t)$  を用いたターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  の補間は、以下の手順で実行することができる。一般的に離散信号のインパルス信号  $\delta_{n,0}$  は

$$\delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (47)$$

と表されるが ( $n \in \mathbf{Z}$ )、これを用いた次のような方程式

$$\delta_{n,0} = \sum_k \beta_k s(n-k) \quad (48)$$

を解き、式 (48) が  $n \in \mathbf{Z}$  について満足するような数列  $\{\beta_k\}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) を予め求めておく ( $k, n$  の範囲は  $\pm\infty$  に広がる領域を考慮しなければいけないが、実際には適切な有限区間に限定して解く)。すると離散信号  $\{f_n\}$  は  $s(t)$  により次のように補間される (すなわち以下の式において  $f_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  が成立)。

$$f(t) = \sum_k f_k^\phi s(t-k) \quad (49)$$

$$f_n^\phi = \sum_k \beta_k f_{n-k} \quad (50)$$

このようにして得られた補間結果は、基底関数  $\phi^R(t-n)$ ,  $\phi^I(t-n)$  の成分に分配しておく必要がある。式 (49) に式 (42) を代入し、さらに式 (45) と式 (46) を代入して整理すると、補間の式は次のように表される。

$$f(t) = \sum_k \{c_{0,k}^R \phi^R(t-k) + c_{0,k}^I \phi^I(t-k)\} \quad (51)$$

$$c_{0,k}^R = \frac{1}{2} \sum_m \overline{\phi^R(-m)} f_{k-m}^\phi \quad (52)$$

$$c_{0,k}^I = \frac{1}{2} \sum_m \overline{\phi^I(-m)} f_{k-m}^\phi \quad (53)$$

### 4.3 分解アルゴリズムによる変換 [10]

式(42)~(53)の補間の作業により得られた、スケーリング係数の実数部  $\{c_{0,k}^R\}$ 、虚数部  $\{c_{0,k}^I\}$  に対し、並列して分解アルゴリズムを実行する。まず必要な数列は、予め次のように求めておく。

$$a_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{p_{-n}^R}, \quad b_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_{-n}^R} \quad (54)$$

$$a_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{p_{-n}^I}, \quad b_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_{-n}^I} \quad (55)$$

$\{a_n^R\}$  と  $\{b_n^R\}$  は分解数列の実数部、 $\{a_n^I\}$  と  $\{b_n^I\}$  は分解数列の虚数部である。続いて式(52), (53)のスケーリング係数  $\{c_{0,n}^R\}$ ,  $\{c_{0,n}^I\}$  をもとに、CDWTは以下の分解アルゴリズム [12, 13, 14] により計算される。

$$c_{j-1,n}^R = \sum_k a_{2n-k}^R c_{j,k}^R, \quad d_{j-1,n}^R = \sum_k b_{2n-k}^R c_{j,k}^R \quad (56)$$

$$c_{j-1,n}^I = \sum_k a_{2n-k}^I c_{j,k}^I, \quad d_{j-1,n}^I = \sum_k b_{2n-k}^I c_{j,k}^I \quad (57)$$

これらの分解アルゴリズムをレベル  $J$  まで繰り返すと、式(39)~(41)の変換式と同等の係数  $\{d_{j,k}^R\}$ ,  $\{d_{j,k}^I\}$ ,  $\{c_{j,k}^R\}$ ,  $\{c_{j,k}^I\}$  が得られる。

### 4.4 再構成アルゴリズムによる逆変換 [10]

まず計算に必要な数列は、予め次のように求めておく。

$$g_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} p_n^R, \quad h_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} q_n^R \quad (58)$$

$$g_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} p_n^I, \quad h_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} q_n^I \quad (59)$$

$\{g_n^R\}$  と  $\{h_n^R\}$  は再構成数列の実数部、 $\{g_n^I\}$  と  $\{h_n^I\}$  は再構成数列の虚数部である。続いて逆変換は以下の再構成アルゴリズム [12, 13, 14] により計算される。

$$c_{j,n}^R = \sum_k \{g_{n-2k}^R c_{j-1,k}^R + h_{n-2k}^R d_{j-1,k}^R\} \quad (60)$$

$$c_{j,n}^I = \sum_k \{g_{n-2k}^I c_{j-1,k}^I + h_{n-2k}^I d_{j-1,k}^I\} \quad (61)$$

4.3で得られた係数  $\{d_{j,k}^R\}$ ,  $\{d_{j,k}^I\}$ ,  $\{c_{j,k}^R\}$ ,  $\{c_{j,k}^I\}$  に対して、これらの再構成アルゴリズムを繰り返すことにより、レベル0のスケーリング係数の実数部  $\{c_{0,n}^R\}$ 、虚数部  $\{c_{0,n}^I\}$  が得られる。これら関数  $f(t)$  に戻す時には式(51)を用い、さらにターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  に戻す時は  $f_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  の関係を利用する。

## 5 完全シフト不変複素数ウェーブレット

3章の手法により設計された複素数ウェーブレットの、スケーリング関数の実数部と虚数部の形状は、完全には一致しない。すなわち近似的にシフト不変条件を満足するものである。この章では直交ウェーブレットの一種である Meyer ウェーブレットの、スケーリング関数を時間軸方向に任意に平行移動すると、新たな直交ウェーブレットが設計できることを述べ、次に2つの Meyer ウェーブレットのスケーリング関数を  $1/2$  サンプルずらして配置すると、完全シフト不変 (Perfect Translation Invariance, PTI) 複素数ウェーブレットが設計できることを示す。なお、このウェーブレットによる CDWT の計算法は、4章で示したものと基本的に変わらないものの、補間関数の持つ特殊性により補間作業が必要なくなる。そのため CDWT の計算はシンプルになるので、最後にこれに関して考察しておく。

### 5.1 Meyer ウェーブレットの特徴について

直交ウェーブレットの一種である、Meyer ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi^M(t)$  は、周波数領域において次のように定義される。

$$\hat{\phi}^M(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi/3 \\ 0, & |\omega| \geq 4\pi/3 \end{cases} \quad (62)$$

上記以外の領域においては、次のように定義される。

$$|\hat{\phi}^M(\omega - 2\pi)|^2 + |\hat{\phi}^M(\omega)|^2 = 1, \quad \frac{2\pi}{3} < \omega < \frac{4\pi}{3} \quad (63)$$

式 (63) は、 $2\pi/3 < |\omega| < 4\pi/3$  の領域における  $\hat{\phi}^M(\omega)$  の曲線部分の条件である。この部分のさまざまな設定により、Meyer ウェーブレットは、さまざまな形状のバリエーションを持つが、Daubechies[12]はこの領域に次の曲線を提案している。

$$\hat{\phi}^M(\omega) = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} \nu \left( \frac{3}{2\pi} |\omega| - 1 \right) \right\} \quad (64)$$

$$\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) \quad (65)$$

以上の  $\hat{\phi}^M(\omega)$  を逆フーリエ変換すると、Meyer ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi^M(t)$  が求まるが、ここで筆者らは、Meyer ウェーブレットのツースケール数列  $\{p_n^M\}$  が、次のようにスケーリング関数  $\phi^M(t)$  から求められることに着目した [11].

$$p_n^M = \phi^M \left( \frac{n}{2} \right) \quad (66)$$

ここで Meyer ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi^M(t)$  を時間軸方向に  $b \in \mathbf{R}$  だけ平行移動したものを、新たなスケーリング関数  $\phi^b(t)$  として次のように定義した。

$$\phi^b(t) = \phi^M(t - b), \quad b \in \mathbf{R} \quad (67)$$

$b \in \mathbf{R}$  は任意の値を取るものとする. するとこの新たなスケーリング関数  $\phi^b(t)$  をもとに, 新たな直交ウェーブレット  $\psi^b(t)$  が構成でき, そのツースケール数列  $\{p_n^b\}$  は, 次式より求まることが証明された [11].

$$p_n^b = \phi^M \left( \frac{n-b}{2} \right) \quad (68)$$

またさらに  $\{p_n^b\}$  と  $\{p_n^M\}$  の, それぞれの周波数応答  $P_\omega^b(\omega)$  と  $P_\omega^M(\omega)$  の関係が次式になることも証明された [11].

$$P_\omega^b(\omega) = P_\omega^M(\omega) e^{-ib\omega} \quad (69)$$

## 5.2 完全シフト不変複素数ウェーブレットの設計 [11]

式 (69) に着目し, 2種類の  $b$  の値  $b_1, b_2$  による 2種類の  $P_\omega^{b_1}(\omega), P_\omega^{b_2}(\omega)$  が Hilbert 変換ペアを形成するような,  $b_1, b_2$  の値を考える. すると Selesnick [6] が提示した Hilbert 変換ペアの条件である式 (29), (30) より,  $b_1, b_2$  を次のように 1/2 サンプルずれた状態に設定すればよいことがわかる. すなわち

$$b_1 = b, b_2 = b + 1/2 \quad (70)$$

を, 式 (69) の  $b$  にそれぞれ代入すると次式が得られる.

$$P_\omega^R(\omega) = P_\omega^b(\omega) = P_\omega^M(\omega) e^{-ib\omega} \quad (71)$$

$$P_\omega^I(\omega) = P_\omega^{b+1/2}(\omega) = P_\omega^M(\omega) e^{-i(b+1/2)\omega} \quad (72)$$

これら式 (71), (72) より  $P_\omega^M(\omega)$  を消去して, 式を整理すると次式が得られる.

$$P_\omega^I(\omega) = P_\omega^R(\omega) e^{-i\omega/2} \quad (73)$$

これは式 (29), (30) の関係であり, Selesnick が提示した Hilbert 変換ペア複素数ウェーブレットの条件を満たす. ところで式 (71), (72) は周波数領域に表された式であるが, これは時間領域で表すことも可能であり, 式 (68) より

$$p_n^R = p_n^b = \phi^M \left( \frac{n-b}{2} \right) \quad (74)$$

$$p_n^I = p_n^{b+1/2} = \phi^M \left( \frac{n-b-1/2}{2} \right) \quad (75)$$

と表せる. また式 (67) より, スケーリング関数の実数部と虚数部は, Meyer ウェーブレットのスケーリング関数  $\phi^M(t)$  を用いて次のように求まる.

$$\phi^R(t) = \phi^b(t) = \phi^M(t-b) \quad (76)$$

$$\phi^I(t) = \phi^{b+1/2}(t) = \phi^M \left( t-b-\frac{1}{2} \right) \quad (77)$$

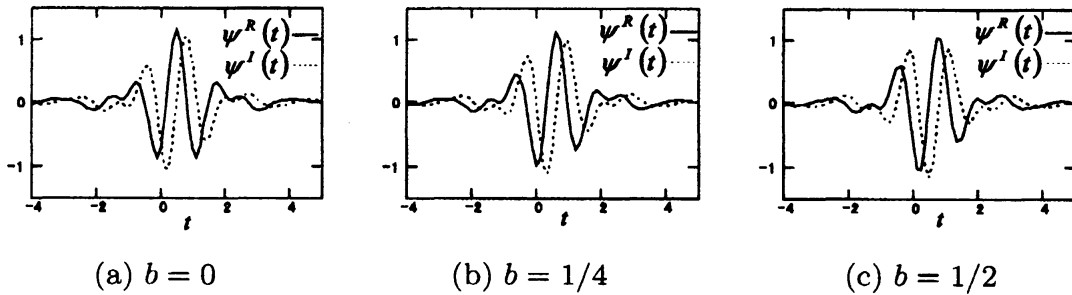


図 2: PTI 複素数ウェーブレットのバリエーション

以上のように、 $\phi^R(t)$  と  $\phi^I(t)$  は同じ形状であり、かつ  $1/2$  サンプルずれた状態にある。筆者ら [8] は、このような条件において Hilbert 変換ペアの複素数ウェーブレットの完全シフト不変性が成立することを証明している。したがってこのウェーブレットは完全シフト不変複素数ウェーブレットとなり、マザーウェーブレットの実数部と虚数部は次のように表される。

$$\psi^R(t) = \psi^b(t) \quad (78)$$

$$\psi^I(t) = \psi^{b+1/2}(t) \quad (79)$$

なお  $\psi^R(t)$ 、 $\psi^I(t)$  は、式 (74)~(77) より  $\{p_n^R\}$ 、 $\{p_n^I\}$ 、 $\phi^R(t)$ 、 $\phi^I(t)$  を求め、これらを式 (20) に代入することにより求めることができる。この完全シフト不変複素数ウェーブレットは、変数  $b$  のバリエーションにより、さまざまな形状を持つ。図 2 に  $0 \leq b \leq 1/2$  における、その形状の変化を掲げておく。  $b = 0$  の時、実数部  $\psi^R(t)$  は対称、虚数部  $\psi^I(t)$  は反対称となる。しかし  $b = 1/2$  の時は、逆に実数部が反対称、虚数部が対称となる。また  $b = 1/4$  の時には、Kingsbury ら [5] が設計した  $1/4$  サンプルシフトを有するウェーブレットの位相特性と同じになり、互いの形状が反対称の関係となる。

### 5.3 完全シフト不変複素数ウェーブレットによる CDWT の計算

完全シフト不変複素数ウェーブレットによる CDWT の計算法は、4 章で考察した CDWT の計算法と基本的に変わりない。ただし式 (42) の補間関数  $s(t)$  において次の式が成立することは、非常に重要なことである [11]。

$$s(n) = \delta_{n,0}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (80)$$

すなわち式 (80) が成立するため、完全シフト不変複素数ウェーブレットの CDWT の計算においては、4.2 の補間作業が必要なくなり、結果的に以下に示すシンプルな計算となる。すなわち式 (38) のディラックのデルタ関数  $\delta(t)$  をもとにした関数

$f^\phi(t)$  は、直接、ターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  を用いて次のように表せる。

$$f^\phi(t) = \sum_m f_m \delta(t - m) \quad (81)$$

この関数  $f^\phi(t)$  に対して、 $\phi^R(t - n)$ ,  $\phi^I(t - n)$  による次の変換式を考える。

$$f(t) = \sum_k \{c_{0,k}^R \phi^R(t - k) + c_{0,k}^I \phi^I(t - k)\} \quad (82)$$

$$c_{0,k}^R = \frac{1}{2} \langle f^\phi(t), \phi^R(t - k) \rangle \quad (83)$$

$$c_{0,k}^I = \frac{1}{2} \langle f^\phi(t), \phi^I(t - k) \rangle \quad (84)$$

すると変換式 (82) の  $f(t)$  は、直接、ターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  を補間し、 $f_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  が成立する [11]. そこで式 (83), (84) に式 (81) をそれぞれ代入し、ディラックのデルタ関数に関する式 (15) を用いて整理すると、式 (82)~(84) は次のように書き換えられる。

$$f(t) = \sum_k \{c_{0,k}^R \phi^R(t - k) + c_{0,k}^I \phi^I(t - k)\} \quad (85)$$

$$c_{0,k}^R = \frac{1}{2} \sum_m \overline{\phi^R(-m)} f_{k-m} \quad (86)$$

$$c_{0,k}^I = \frac{1}{2} \sum_m \overline{\phi^I(-m)} f_{k-m} \quad (87)$$

すなわち完全シフト不変複素数ウェーブレットにおいては、直接、式 (86), (87) により得られたスケーリング係数の実数部  $\{c_{0,k}^R\}$ , 虚数部  $\{c_{0,k}^I\}$  に対して、4.3 に示した分解アルゴリズムを実行すればよいことになる。また逆変換は 4.4 に示した再構成アルゴリズムを実行すればよく、最終的に得られたレベル 0 のスケーリング係数の実数部  $\{c_{0,n}^R\}$ , 虚数部  $\{c_{0,n}^I\}$  を関数  $f(t)$  に戻す時には式 (85) を用い、さらにターゲットの離散信号  $\{f_n\}$  に戻す時は  $f_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  の関係を利用する。

## 6 CDWT の過去と今後の展望

1998 年に Kingsbury ら [4, 5] は、運動推定の道具として CDWT を提案した。そして CDWT は、DWT のシフト不変欠如の問題を解決するのに有効であることが確認され、さまざまな分野に応用されてきた。初期の CDWT には Kingsbury ら [5] が設計した 1/4 サンプルシフトを有する直交ウェーブレットによる、近似的な Hilbert 変換ペアの複素数ウェーブレットが用いられた。Selesnick ら [6] は、より完全な CDWT を実現するために、非対称の近似的な Hilbert 変換ペアの複素数ウェーブレットの設計法を提案した。このように CDWT に関する改良が試みられているが、CDWT にはいくつかの問題点も指摘されてきた。その一つに複素数ウェーブ

レットの形状が、あまり自由には設計できないという問題があった。すなわち実用になる Hilbert 変換ペアの複素数ウェーブレットは非対称に限られ、例えば対称と反対称の Hilbert 変換ペアによる CDWT は不可能とされ、このような形状は避けて設計されるのが一般的であった。また CDWT においては実用化が先行しており、その合理性が理論的に解釈されていない部分もあった。

これに対して著者らは CDWT の重要な理論基礎 [8] を構築し、任意の直交ウェーブレットを基礎にした複素数型ウェーブレットの設計法 [9]、およびそれらによる CDWT の新たな計算法 [10] を確立した。これにより複素数ウェーブレットの形状の制約を取り払い、CDWT に利用できる複素数ウェーブレットの種類を飛躍的に増大させた。そしてこの理論をもとに、Meyer ウェーブレットを基礎にし、幅広い形状を持つ完全シフト不変複素数ウェーブレットの設計法 [11] を確立した。しかしこのような CDWT にも、まだいくつかの欠点がある。例えば信号処理においては、従来の DWT と同じように信号をオクターブに分割して解析するが、状況によっては周波数解像度が足りない場合も考えられる。画像処理においては、従来の DWT が 3 方向のエッジしか検出できないのに対し、CDWT は 6 方向の検出が可能になった [5]。しかしそれらの解像度は検出方向によって異なり、状況によっては検出精度が十分でない場合も考えられる。これらの問題点は改善され、複素数離散ウェーブレット変換は、さらに広く使われるだろうと予測している。

## 参考文献

- [1] S. Mallat: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.11, No.7, 674–693(1989).
- [2] S. G. Mallat and Z. Zhang: Matching pursuits with time-frequency dictionaries; *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.41, No.12, 3397–3415(1993).
- [3] F. C. A. Fernandes, I. W. Selesnick, R. L. C. Spaendonck and C. S. Burrus: Complex wavelet transforms with allpass filters; *Signal Processing*, Vol.33, No.8, 1689–1706(2003).
- [4] J.F.A. Magarey and N.G. Kingsbury: Motion estimation using a complex-valued wavelet transform; *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.46, No.4, 1069–1084(1998).
- [5] N. Kingsbury: Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals; *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol.10, No.3, 234–253(2001).



- [6] I. W. Selesnick: The design of approximate Hilbert transform pairs of wavelet bases; *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.50, No.5, 1144–1152(2002).
- [7] 章 忠, 戸田浩, 川畑洋昭: RI-Spline ウェーブレットおよびその非定常信号解析への応用, 第2報: RI-Spline ウェーブレットによる複素数多重解像度解析; 計測自動制御学会論文集, Vol.39, No.7, 612–623(2003).
- [8] 章 忠, 戸田 浩: シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換 第1報: 複素数離散ウェーブレット変換の理論と原理; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.11, No.5, 387–400(2007).
- [9] 戸田 浩, 章 忠: シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換 第2報: 直交ウェーブレットを基にした複素数ウェーブレット設計法の一提案; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.11, No.5, 401–412(2007).
- [10] 戸田 浩, 章 忠: シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換 第3報: 新たな複素数離散ウェーブレット変換の計算法; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.11, No.5, 413–424(2007).
- [11] 戸田 浩, 章 忠: 完全シフト不変性を実現する複素数離散ウェーブレット変換; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.12, No.2, 155–166(2008).
- [12] I. Daubechies: Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [13] C. K. Chui 著, 桜井, 新井訳: ウェーブレット入門, 東京電機大学出版局 (1993).
- [14] 戸田浩, 章 忠, 川畑洋昭: 最新ウェーブレット実践講座 入門と応用; ソフトバンク クリエイティブ, 2005.