

微分幾何学と特異点論

室蘭工業大学・数理科学講座 高橋 雅朋 (Masatomo Takahashi)
Mathematical Sciences, Muroran Institute of Technology

1 はじめに

応用特異点論の 1 つの例として写像の特異点論を用い、曲面の性質など微分幾何学への応用の研究がある。その歴史は、元をたどると曲線のグラフを書くために特徴的な点を捉える¹という初歩的な認識であると思われる。特異点論の微分幾何学への応用は、この流れをくんでおり、高次元の曲面における特徴的な点を捉えることや付随する新たな対象の性質などを特異点を通して考察することにあると思われる²。

ユークリッド空間の場合は、多くの研究者により様々な研究がなされており、特異点論との関わりは例えば [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 19, 20, 46, 47, 49, 50, 56, 57] などの研究がある³。

本論文はミンコフスキー空間内の擬球面(双曲空間内、ド・シッター空間、光錐)内の超曲面(部分多様体)の研究の中から近年分かってきている結果や計算例を紹介する⁴。主な内容は北海道大学の泉屋周一氏、東北師範大学の D.Peï 氏、岐阜大学の佐治健太郎氏との共同研究によるものである。

また、近年 Anti de-Sitter 空間内の部分多様体の微分幾何への応用もされている [12, 13]。さらに、特異点を許容する曲線論や曲面論も研究されつつある [17, 42, 52, 54, 55]。特異点論に関する基本的な事項は [4, 16, 21, 24, 43] を参考にするとよい。

以下の章において写像や空間はすべて滑らかな対象、 C^∞ 級とする。

¹極大・極小を調べるために特異点を見るということ。

²具体例としては、モデル曲面との接触の様子や平行曲面・焦面を通して曲面の性質を考えることなど。

³もちろん他にもたくさんの研究がある。ここに書いてあるいは、ほんの一部であるから文献など検索するとよい。

⁴本稿は、講演の内容に加筆したものであるが、筆不精のため時間不足となり間違いをしている部分もあるかもしれない。その場合は、叱咤激励、ご教授願いたい。

2 記号と概念

$n+1$ 次元ベクトル空間 \mathbb{R}^{n+1} に擬内積 \langle, \rangle を $(-, +, \dots, +)$ により入れておく。つまり、 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ とする。この空間を $\mathbb{R}_1^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle)$ と書き $n+1$ 次元ミンコフスキー空間という。ノルムを $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$ とする。擬内積であるので、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ に対して、 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, = 0, < 0$ の3つの場合が考えられ、それぞれ空間的, 光的, 時間的ベクトルと呼ばれる。その中で特徴的な超曲面は、これらのベクトルを正規化し集めてきた集合である。つまり n 次元双曲空間 (hyperbolic space) とは

$$H^n(-1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$

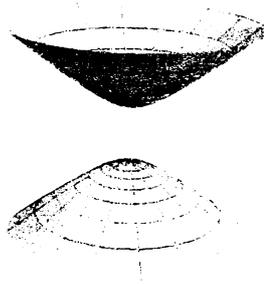
のことであり、 n 次元ド・シッター空間 (de-Sitter space) とは

$$S_1^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

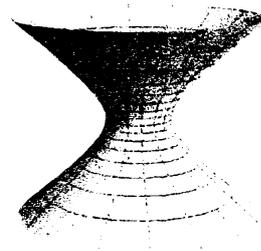
のことであり、 n 次元光錐 (light cone) とは

$$LC^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{0\} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$$

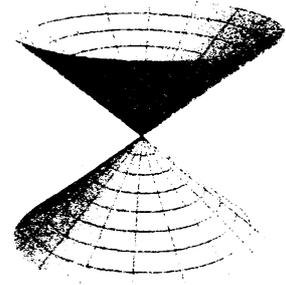
とする。 $n=2$ の場合は以下の図になる。



双曲空間



ド・シッター空間



光錐

双曲空間の連結成分を $H^n(-1) = H_+^n(-1) \cup H_-^n(-1)$ 、光錐の連結成分を $LC^* = LC_+^* \cup LC_-^*$ で表す。

ベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ に擬直交する超平面を

$$HP(\mathbf{n}, c) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = c\}$$

とする。また、擬外積を $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n := \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & \cdots & e_n \\ a_1^0 & a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^0 & a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

と定義する。このとき、 a_i ($i = 1, \dots, n$) と $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ は擬直交することが分かる。ミンコフスキー空間や双曲空間の性質については [48, 51] を参照。

3 ルジャンドル双対性

ユークリッド空間内のルジャンドル双対性は (局所的に) 1 つであり、点と法線ベクトルの双対であるが、それは射影幾何学における射影双対性である。一方、ミンコフスキー空間内のルジャンドル双対性は 1 つではなく、いくつかの対応がある。これは法線概念を拡張したと言ってもよいと思われる。

まず、ルジャンドル多様体を定義するために、接触多様体を考える (詳しくは [2, 37, 58, 59] を参照)。

(N, K) を $2n+1$ 次元多様体 N と N 上の接平面場を K とする。局所的に K は 1 形式 $\alpha = 0$ として書かれる。 K が非退化であるとは N 上のすべての点で $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ が成り立つことである。このとき、 (N, K) を接触多様体と呼び、 K を接触構造、 α を接触形式と呼ぶ。ダルブーの定理により局所的なモデルは \mathbb{R}^{2n+1} である。接触構造 K は \mathbb{R}^{2n+1} の座標を $(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$ とすると $K = \{\alpha = 0\}$, $\alpha = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ である。

接触多様体 (N, K) と (N', K') に対して、 $\phi : (N, K) \rightarrow (N', K')$ が接触微分同相であるとは、接触構造を保つ微分同相写像とする。つまり、 $d\phi(K) = K'$ (1 形式なら $\phi^* \alpha' = \lambda \alpha$, $\lambda \neq 0$) が成り立つことである。

部分多様体 $i : L \subset N$ が接触多様体 (N, K) のルジャンドル多様体とは $\dim L = n$ かつ $x \in L$ に対して $di_x(T_x L) \subset K_{i(x)}$ が成り立つことである。

ファイバー束 $\pi : E \rightarrow M$ がルジャンドル束であるとは E は接触多様体でファイバーが全てルジャンドル多様体であることをいう。さらに $i \subset E$ がルジャンドル多様体のとき、 $\pi \circ i : L \rightarrow M$ をルジャンドル写像という。また、 $\pi \circ i(L)$ を波面といい、 $W(L)$ とかく。

4 つの2重ファイブレーションを考える。

- (1) (a) $H^n(-1) \times S_1^n \supset \Delta_1 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) | \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$,
 (b) $\pi_{11} : \Delta_1 \rightarrow H^n(-1)$, $\pi_{12} : \Delta_1 \rightarrow S_1^n$,
 (c) $\theta_{11} = \langle d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|_{\Delta_1}$, $\theta_{12} = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle|_{\Delta_1}$.
- (2) (a) $H^n(-1) \times LC^* \supset \Delta_2 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) | \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -1\}$,
 (b) $\pi_{21} : \Delta_2 \rightarrow H^n(-1)$, $\pi_{22} : \Delta_2 \rightarrow LC^*$,
 (c) $\theta_{21} = \langle d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|_{\Delta_2}$, $\theta_{22} = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle|_{\Delta_2}$.
- (3) (a) $LC^* \times S_1^n \supset \Delta_3 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) | \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1\}$,
 (b) $\pi_{31} : \Delta_3 \rightarrow LC^*$, $\pi_{32} : \Delta_3 \rightarrow S_1^n$,
 (c) $\theta_{31} = \langle d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|_{\Delta_3}$, $\theta_{13} = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle|_{\Delta_3}$.
- (4) (a) $LC^* \times LC^* \supset \Delta_4 = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) | \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -2\}$,
 (b) $\pi_{41} : \Delta_4 \rightarrow LC^*$, $\pi_{42} : \Delta_4 \rightarrow LC^*$,
 (c) $\theta_{41} = \langle d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|_{\Delta_4}$, $\theta_{42} = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle|_{\Delta_4}$.

ここで、 $\pi_{i1}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$, $\pi_{i2}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\langle d\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -w_0 dv_0 + \sum_{i=1}^n w_i dv_i$, $\langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = -v_0 dw_0 + \sum_{i=1}^n v_i dw_i$ とする。注意として $\theta_{i1}^{-1}(0)$ と $\theta_{i2}^{-1}(0)$ は同じ接平面場を定める。これを K_i と書くことにする。このとき、次が成り立つ。

定理 3.1 ([26, 14]) (Δ_i, K_i) , ($i = 1, 2, 3, 4$) は接触多様体であり、 π_{ij} , ($j = 1, 2$) はルジャンドル束となる。さらに、これらの接触多様体は全て接触微分同相である。

それぞれ具体的な接触微分同相写像は

$$\begin{aligned} \Phi_{12} : \Delta_1 &\rightarrow \Delta_2, & \Phi_{12}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ \Phi_{13} : \Delta_1 &\rightarrow \Delta_3, & \Phi_{13}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ \Phi_{14} : \Delta_1 &\rightarrow \Delta_4, & \Phi_{14}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \end{aligned}$$

により与えられる。

4 双曲空間内の超曲面

双曲空間内の部分多様体、特に超曲面に対して考える。双曲空間と超平面との共通部分

$$HH(n, c) := HP(n, c) \cap H^n(-1)$$

をそれぞれ、 n が空間的、光的、時間的によって、超球面 (hypersphere)、超ホロ球 (hyperhorosphere)、等距離超曲面 (equidistant hypersurface) と呼ぶ。

開集合 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ に対して、埋め込み $\mathbf{x}^h : U \rightarrow H^n(-1)$ を考える。 $\mathbf{x}^h(U) = M$ により同一視し、

$$\mathbf{x}^d(u) = \frac{\mathbf{x}^h(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}^h(u) \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{u_{n-1}}^h(u)}{\|\mathbf{x}^h(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}^h(u) \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{u_{n-1}}^h(u)\|} \in S_1^n$$

を擬法ベクトルとする。ここで、 $\mathbf{x}_{u_i}^h(u) = (\partial \mathbf{x}^h / \partial u_i)(u)$ である。この $\mathbf{x}^d : U \rightarrow S_1^n$, $u \mapsto \mathbf{x}^d(u)$ をガウス写像みたいに思うと、等距離超曲面をモデル曲面とする微分幾何学であり、 $\mathbf{x}_\pm^\ell : U \rightarrow LC^*$, $u \mapsto \mathbf{x}_\pm^\ell(u) = \mathbf{x}^h(u) \pm \mathbf{x}^d(u)$ をガウス写像みたいに思うと、ホロ超球をモデル曲面とする微分幾何学ができる。2 つの型作用素を $S_p^d = -dx^d : T_p M \rightarrow T_p M$, $S_\pm^\ell = -dx_\pm^\ell : T_p M \rightarrow T_p M$ とする。それぞれの主曲率 (型作用素の固有値) を $\kappa^d(p)$, $\kappa_\pm^\ell(p)$ とすると、 $\kappa_\pm^\ell(p) = -1 \pm \kappa^d(p)$ という関係がある。

ド・シッターガウス曲率、ド・シッター平均曲率を

$$K_d(u_0) = \det S^d(p), \quad H_d(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S^d(p),$$

光錐ガウス曲率、光錐平均曲率を

$$K_\ell^\pm(u_0) = \det S_\pm^\ell(p), \quad H_\ell^\pm(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S_\pm^\ell(p)$$

とする。 $u_0 \in U$ または $p = \mathbf{x}^h(u_0)$ が臍点であるとは、 $S_\pm^\ell(p) = \kappa_\pm^\ell(p) id_{T_p M}$ が成り立つこと、 $M = \mathbf{x}^h(U)$ が全臍的であるとは、全ての M の点が臍点であることとする。 $S_\pm^\ell(p)$ と $S^d(p)$ の固有ベクトルは同じなので、臍点の定義は $S^d(p) = \kappa^d(p) id_{T_p M}$ と同値であることに注意する。このとき次が成り立つ。

命題 4.1 ([31]) $M = \mathbf{x}^h(U) \subset H^n(-1)$ が全臍的であるとする。このとき、 $\kappa_\pm^\ell(p)$ は定数 κ_\pm^ℓ であり、次の場合に分類される。

(a) $(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 + 2\kappa_{\pm}^{\ell} > 0$ のとき、 M は超球面 $HH(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 + 2\kappa_{\pm}^{\ell}}} (\kappa_{\pm}^{\ell} \mathbf{x}^h(u) + \mathbf{x}_{\pm}^{\ell}(u)) \in H^n(-1), \quad c = \frac{-\kappa_{\pm}^{\ell} - 1}{\sqrt{(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 + 2\kappa_{\pm}^{\ell}}}.$$

(b) $(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 + 2\kappa_{\pm}^{\ell} = 0$ のとき、 M は超ホロ球 $HH(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \kappa_{\pm}^{\ell} \mathbf{x}^h(u) + \mathbf{x}_{\pm}^{\ell}(u), \quad c = -\kappa_{\pm}^{\ell} - 1.$$

(c) $(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 + 2\kappa_{\pm}^{\ell} < 0$ のとき、 M は等距離超曲面 $HH(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{-(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 - 2\kappa_{\pm}^{\ell}}} (\kappa_{\pm}^{\ell} \mathbf{x}^h(u) + \mathbf{x}_{\pm}^{\ell}(u)) \in S_1^n, \quad c = \frac{-\kappa_{\pm}^{\ell} - 1}{\sqrt{-(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 - 2\kappa_{\pm}^{\ell}}}.$$

計算すれば、 $(\kappa_{\pm}^{\ell})^2 + 2\kappa_{\pm}^{\ell} = (\kappa^d)^2 - 1$ となることが分かる。また、 $\kappa_{\pm}^{\ell} \mathbf{x}^h(u) + \mathbf{x}_{\pm}^{\ell}(u) = \pm(\kappa^d \mathbf{x}^h(u) + \mathbf{x}^d(u))$ である。

注意として、ここで、使われるルジャンドル双対性は (1) と (2) である。

5 ド・シッター空間内の超曲面

ド・シッター空間内の部分多様体、特に空間的超曲面に対して考える。ド・シッター空間と超平面との共通部分

$$HS(\mathbf{n}, c) := HP(\mathbf{n}, c) \cap S_1^n$$

をそれぞれ、 \mathbf{n} が空間的、光的、時間的によって、**双曲2次超曲面 (hyperbolic hyperquadric)**、**放物2次超曲面 (parabolic hyperquadric)**、**楕円2次超曲面 (elliptic hyperquadric)** と呼ぶ。

考え方は双曲空間の場合と同じであるが、開集合 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ に対して、空間的埋め込み $\mathbf{x}^d : U \rightarrow S_1^n$ を考える⁵。空間的とは偏微分 $\mathbf{x}_{u_i}^d$ が全て空間的ベクトルとする意味である。 $\mathbf{x}^d(U) = M$ により同一視し、

$$\mathbf{x}^h(u) = \frac{\mathbf{x}^d(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}^d(u) \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{u_{n-1}}^d(u)}{\|\mathbf{x}^d(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}^d(u) \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{u_{n-1}}^d(u)\|} \in H^n(-1)$$

⁵時間的埋め込みの場合も考えることができるが、その場合ルジャンドル双対は S_1^n の自己双対となることが分かる。[25, 41] を参照。

を擬法ベクトルとする。 \mathbf{x}^d が空間的埋め込みなので $\mathbf{x}^h(u)$ が時間的になることが分かる。この $\mathbf{x}^h : U \rightarrow H^n(-1)$, $u \mapsto \mathbf{x}^h(u)$ をガウス写像みたいに思うと、楕円2次超曲面をモデル曲面とする微分幾何学であり、 $\mathbf{x}_\pm^\ell : U \rightarrow LC^*$, $u \mapsto \mathbf{x}_\pm^\ell(u) = \mathbf{x}^h(u) \pm \mathbf{x}^d(u)$ をガウス写像みたいに思うと、放物2次超曲面をモデル曲面とする微分幾何学ができる。2つの型作用素を $S_p^h = -dx^h : T_pM \rightarrow T_pM$, $S_\pm^\ell = -dx_\pm^\ell : T_pM \rightarrow T_pM$ とする。それぞれの主曲率(型作用素の固有値)を $\kappa^h(p)$, $\kappa_\pm^\ell(p)$ とすると、 $\kappa_\pm^\ell(p) = \kappa^h(p) \mp 1$ という関係がある。双曲ガウス曲率、双曲平均曲率を

$$K_h(u_0) = \det S^h(p), H_h(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S^h(p),$$

光錐ガウス曲率、光錐平均曲率を

$$K_\ell^\pm(u_0) = \det S_\pm^\ell(p), H_\ell^\pm(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S_\pm^\ell(p)$$

とする。 $u_0 \in U$ または $p = \mathbf{x}^d(u_0)$ が臍点であるとは、 $S_\pm^\ell(p) = \kappa_\pm^\ell(p) \text{id}_{T_pM}$ が成り立つこと、 $M = \mathbf{x}^d(U)$ が全臍的であるとは、全ての M の点が臍点であることとする。 $S_\pm^\ell(p)$ と $S^h(p)$ の固有ベクトルは同じなので、臍点の定義は $S^h(p) = \kappa^h(p) \text{id}_{T_pM}$ と同値であることに注意する。このとき次が成り立つ。

命題 5.1 ([37]) $M = \mathbf{x}^d(U) \subset S_1^n$ が全臍的であるとする。このとき、 $\kappa_\pm^\ell(p)$ は定数 κ_\pm^ℓ であり、次の場合に分類される。

(a) $(\kappa_\pm^\ell)^2 \pm 2\kappa_\pm^\ell > 0$ のとき、 M は双曲2次超曲面 $HS(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(\kappa_\pm^\ell)^2 \pm 2\kappa_\pm^\ell}} (\kappa_\pm^\ell \mathbf{x}^d(u) + \mathbf{x}_\pm^\ell(u)) \in S_1^n, c = \frac{\kappa_\pm^\ell \pm 1}{\sqrt{(\kappa_\pm^\ell)^2 \pm 2\kappa_\pm^\ell}}.$$

(b) $(\kappa_\pm^\ell)^2 \pm 2\kappa_\pm^\ell = 0$ のとき、 M は放物2次超曲面 $HS(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \kappa_\pm^\ell \mathbf{x}^d(u) + \mathbf{x}_\pm^\ell(u) \in LC^*, c = \kappa_\pm^\ell \pm 1$$

(c) $(\kappa_\pm^\ell)^2 \pm 2\kappa_\pm^\ell < 0$ のとき、 M は楕円2次超曲面 $HS(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{-(\kappa_\pm^\ell)^2 \mp 2\kappa_\pm^\ell}} (\kappa_\pm^\ell \mathbf{x}^d(u) + \mathbf{x}_\pm^\ell(u)) \in H^n(-1), c = \frac{-\kappa_\pm^\ell - 1}{\sqrt{-(\kappa_\pm^\ell)^2 \mp 2\kappa_\pm^\ell}}.$$

計算すれば、 $(\kappa_\pm^\ell)^2 \pm 2\kappa_\pm^\ell = (\kappa^h)^2 - 1$ となることが分かる。また、 $\kappa_\pm^\ell \mathbf{x}^d(u) + \mathbf{x}_\pm^\ell(u) = \kappa^h \mathbf{x}^d(u) + \mathbf{x}^h(u)$ である。

注意として、ここで、使われるルジャンドル双対性は(1)と(3)である。

6 光錐内の超曲面

光錐内の部分多様体、特に空間的超曲面に対して考える。光錐と超平面との共通部分

$$HL(n, c) := HP(n, c) \cap LC^*$$

をそれぞれ、 n が空間的、光的、時間的によって、ド・シッター空間の場合と同じく、それぞれ**双曲2次超曲面 (hyperbolic hyperquadric)**、**放物2次超曲面 (parabolic hyperquadric)**、**楕円2次超曲面 (elliptic hyperquadric)**と呼ぶ。

双曲空間、ド・シッター空間の場合と同様に考えたいが、この場合うまくいかない。それは、光錐上、計量が退化しているので擬外積を用い擬法ベクトルを取る操作が意味をなさないからである。そこで、ルジャンドル双対性を用いる⁶。

空間的埋め込み $\mathbf{x}_+^\ell : U \rightarrow LC^*$ を考える⁷。空間的とは偏微分 $(\mathbf{x}_+^\ell)_{u_i}$ が全て空間的ベクトルとする意味である。ルジャンドル双対性 (2), (3), (4) により、それぞれ

$$\mathbf{x}^h : U \rightarrow H^n(-1), \mathbf{x}^d : U \rightarrow S_1^n, \mathbf{x}_-^\ell : U \rightarrow LC^*$$

が存在し、 \mathbf{x}_+^ℓ とのペアがそれぞれ $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ に属する。よって、これらを擬法ベクトルと思うことによって、微分幾何学ができる。 $\mathbf{x}_+^\ell(U) = M$ により U と M を同一視する。

3つの型作用素 $S_p^h = -dx^h : T_pM \rightarrow T_pM$, $S_p^d = -dx^d : T_pM \rightarrow T_pM$, $S_p^\ell = -dx_-^\ell : T_pM \rightarrow T_pM$ とする。それぞれの主曲率(型作用素の固有値)を $\kappa^h(p), \kappa^d(p), \kappa^\ell(p)$ とすると、

$$\kappa^h(p) = \frac{\kappa^\ell(p) - 1}{2}, \quad \kappa^d(p) = \frac{-\kappa^\ell(p) - 1}{2}$$

という関係がある。双曲ガウス曲率、双曲平均曲率を

$$K_h(u_0) = \det S^h(p), \quad H_h(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S^h(p),$$

ド・シッター曲率、ド・シッター平均曲率を

$$K_d(u_0) = \det S^d(p), \quad H_d(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S^d(p),$$

⁶ここがポイントである。

⁷時間的埋め込みも考えられる。問題として、この場合の微分幾何学を構成せよ。

光錐ガウス曲率、光錐平均曲率を

$$K_\ell(u_0) = \det S^\ell(p), \quad H_\ell(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace } S^\ell(p)$$

とする。 $u_0 \in U$ または $p = \mathbf{x}_+^\ell(u_0)$ が臍点であるとは、 $S^\ell(p) = \kappa^\ell(p) id_{T_p M}$ が成り立つこと、 $M = \mathbf{x}_+^\ell(U)$ が全臍的であるとは、全ての M の点が臍点であることとする。 $S^\ell(p)$ と $S^h(p), S^d(p)$ の固有ベクトルは同じなので、臍点の定義は $S^h(p) = \kappa^h(p) id_{T_p M}, S^d(p) = \kappa^d(p) id_{T_p M}$ と同値であることに注意する。このとき次が成り立つ。

命題 6.1 ([26, 37]) $M = \mathbf{x}_+^\ell(U) \subset LC^*$ が全臍的であるとする。このとき、 $\kappa^\ell(p)$ は定数 κ^ℓ であり、次の場合に分類される。

(a) $\kappa^\ell < 0$ のとき、 M は双曲2次超曲面 $HL(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \frac{-1}{2\sqrt{-\kappa^\ell}} (\kappa^\ell \mathbf{x}_+^\ell(u) + \mathbf{x}_-^\ell(u)) \in S_1^n, \quad c = \frac{1}{\sqrt{-\kappa^\ell}}.$$

(b) $\kappa^\ell = 0$ のとき、 M は放物2次超曲面 $HL(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_-^\ell(u) \in LC^*, \quad c = -2$$

(c) $\kappa^\ell > 0$ のとき、 M は楕円2次超曲面 $HL(\mathbf{n}, c)$ に含まれる。ここで、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa^\ell}} (\kappa^\ell \mathbf{x}_+^\ell(u) + \mathbf{x}_-^\ell(u)) \in H^n(-1), \quad c = -\frac{1}{\sqrt{\kappa^\ell}}.$$

7 双曲空間内の曲線に対する2つの縮閉線

この章では、 $n = 2$ の2次元双曲空間 $H^2(-1)$ 内の正則曲線について考える。連結成分を考えるので、

$$H_+^2(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_0 \geq 1\}$$

を考える。慣習により埋め込み $\mathbf{x}^h : U \rightarrow H_+^2(-1)$ の代わりに、正則曲線 $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$ と書く。 γ に対して、弧長パラメータをとることにより、 $\mathbf{t}(t) = \gamma'(t) = 1$ とする。また、 $\mathbf{x}^d : U \rightarrow S_1^2$ を $\mathbf{e} : I \rightarrow S_1^2$ と書く。このとき、次のフレネ・セレ型公式が成り立つ。

$$\begin{cases} \gamma'(t) &= \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{t}'(t) &= \gamma(t) + \kappa_g(t) \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}'(t) &= -\kappa_g(t) \mathbf{t}(t) \end{cases}$$

この $\kappa_g(t)$ を (測地的) 曲率と呼ぶ。

ユークリッド空間内の平面曲線の場合、縮閉線は、平行曲線の特異点の軌跡 (特異点集合) として捉えられるし、または、曲線の法方向の直線の包絡線としても捉えられる。

双曲空間内の平面曲線の場合、 \mathbf{e} を法ベクトルと思う立場だと

$$HE^\pm(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(t) - 1}} (\kappa_g(t)\boldsymbol{\gamma}(t) + \mathbf{e}(t))$$

が縮閉線である [32]。これは \mathbf{e} 方向に平行移動した曲線の特異点集合として縮閉線を捉える立場である。この $HE^\pm(t)$ は次の高さ関数

$$H^T : I \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H^T(t) = \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{v} \rangle$$

の分岐集合として捉えることができ、ラグランジュ特異点論が適応される [33]。一方、ホロ円を法ベクトルと思う立場だと

$$Ev^h(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \frac{1}{\kappa_g(t)} \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2\kappa_g(t)} (\boldsymbol{\gamma}(t) + \mathbf{t}(t))$$

が縮閉線である [22]。これは \mathbf{e} に接するホロ円による包絡線として縮閉線を捉える立場である。この $Ev^h(t)$ は次の高さ関数 (もどき)

$$H : I \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t) = \langle \boldsymbol{\gamma}(t) + \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle + 1$$

の判別集合として捉えることができ、ルジャンドル特異点論が適応される。

この違いが面白いのだが、性質などの研究は始まったばかりといえる。しかし、どちらも普及的⁸な特異点は同じカusp特異点であり、曲率 κ_g の条件によりそれぞれ記述することが出来る。

一般に、ホロ円の1パラメータ族は $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow H_+^2(-1)$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 : I \rightarrow S_1^2$ で、 \mathbb{R}_1^3 の正規直交基底 $\{\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ とすると、

$$F_{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}(s, t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + s\mathbf{a}_1(t) + \frac{s^2}{2}(\boldsymbol{\gamma}(t) + \mathbf{a}_2(t))$$

により与えられる。 $Ev^h(t)$ は $F_{(\boldsymbol{\gamma}, -\mathbf{e}, t)}(s, t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - s\mathbf{e}(t) + \frac{s^2}{2}(\boldsymbol{\gamma}(t) + \mathbf{t}(t))$ の包絡線であることが分かる。

⁸ジェネリック (generic) の石川剛郎氏による訳語である。

8 双曲空間内の曲面に対するホロ平坦曲面

この章では、 $n = 3$ の 3 次元双曲空間 $H_+^3(-1)$ 内でホロ球を平面と思う立場をとったとき、どのような微分幾何学が成り立つのか特異点論的立場から考察したい。7 章のホロ円を直線と思う場合に対応する。

もう 1 つの縮平面の場合は、曲面 $\mathbf{x}^h : U \rightarrow H_+^3(-1)$ に対して、主曲率 $\kappa^d(u, v)$, $(u, v) \in U$ を用いて

$$HE^\pm(u, v) = \pm \frac{1}{\sqrt{(\kappa^d(u, v))^2 - 1}} (\kappa^d(u, v) \mathbf{x}^h(u, v) + \mathbf{x}^d(u, v))$$

として、定義される。ただし、 $(\kappa^d(u, v))^2 > 1$ を満たすとする。この場合、普及的な特異点は cuspidal edge, swallowtail, pyramid, purse であることが分かる [33]。

さて、実はホロ球的幾何学の舞台は \mathbf{x}_\pm^ℓ よりも次で定義されるガウス写像の方が適していることが知られている [10, 26, 35]。

$$\widetilde{\mathbf{x}}_\pm^\ell : U \rightarrow S_+^2, u \mapsto \widetilde{\mathbf{x}}_\pm^\ell(u)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in LC_+^*$ に対して

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \right) \in S_+^2 = \{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in LC_+^* \mid x_0 = 1 \}$$

である。この $\widetilde{\mathbf{x}}_\pm^\ell$ をガウス写像と思うわけだが、この微分写像は $T_p M \rightarrow T_p M$ への写像ではないので、 $\Pi : T\mathbb{R}_+^4 = TM \oplus NM \rightarrow TM$ を考え合成する。 $\tilde{S}_\pm^\ell(p) = -\Pi_p \circ d\widetilde{\mathbf{x}}_\pm^\ell : T_p M \rightarrow T_p M$ とし、ホロ球的型作用素という。主曲率を $\tilde{\kappa}_\pm^\ell(p)$ とすると、 $\tilde{\kappa}_\pm^\ell(p) = (1/\ell_0^\pm(u))\kappa_\pm^\ell(p)$ という関係がある。よって、ホロ的ガウス曲率、ホロ的平均曲率を

$$\tilde{K}_\pm^\ell(u_0) = \det \tilde{S}_\pm^\ell(p), \quad \tilde{H}_\pm^\ell(u_0) = \frac{1}{2} \text{Trace} \tilde{S}_\pm^\ell(p)$$

とすると、

$$\tilde{K}_\pm^\ell(u) = \left(\frac{1}{\ell_0^\pm(u)} \right)^2 K_\pm^\ell(u), \quad \tilde{H}_\pm^\ell(u_0) = \frac{1}{\ell_0^\pm(u)} H_\pm^\ell(u)$$

という関係があることが分かる。4 章より、

命題 8.1 ([36]) $K_\ell^\pm = 1 \mp 2H_d + K_d = 2 \mp 2H + K_I$ が成り立つ。ここで K_I は内在的なガウス曲率⁹とする。

以下では土の+のみを考える。

$M = \mathbf{x}(U)$ がホロ平坦曲面 (horo-flat surface) とは、 $\tilde{K}_\ell(u) \equiv 0$ となることである。関係から $K_\ell(u) \equiv 0$ と同値であり、命題から linear Weingarten surface of non-Bryant type [9, 18] となることが分かる ($a = 1, b = -1$)。よって表現公式が (今のところ) 知られていない曲面の例である。ここで、 $aK_I + b(2H - 2) = 0, (a, b) \neq (0, 0)$ となる曲面が linear Weingarten surface で $a + b \neq 0$ が Bryant type と呼ばれている。

一方、 $M = \mathbf{x}(U)$ が horocyclic surface とは、ホロ円の1パラメータ族で局所的にパラメータ付けられる曲面とする。

具体的に定式化すると、 $\gamma: I \rightarrow H_+^3(-1), \mathbf{a}_i: I \rightarrow S_1^3, (i = 1, 2, 3)$ で、 \mathbb{R}_1^4 の正規直交基底 $\{\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ とする。このとき $F_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}: \mathbb{R} \times I \rightarrow H_+^3(-1)$ を

$$F_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}(s, t) = \gamma(t) + s\mathbf{a}_1(t) + \frac{s^2}{2}\ell(t) = \gamma(t) + s\mathbf{a}_1(t) + \frac{s^2}{2}(\gamma(t) + \mathbf{a}_2(t))$$

とすると、これが horocyclic surface の表示である。 t_0 を止めるごとに

$$F_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}(s, t_0) = \gamma(t_0) + s\mathbf{a}_1(t_0) + \frac{s^2}{2}\ell(t_0)$$

はホロ円 (generating horocycle と呼ぶ) になることが曲線論から分かる [30]。フルネ・セレ型公式のように、

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \langle \gamma'(t), \mathbf{a}_1(t) \rangle, & c_4(t) &= \langle \mathbf{a}'_1(t), \mathbf{a}_2(t) \rangle, \\ c_2(t) &= \langle \gamma'(t), \mathbf{a}_2(t) \rangle, & c_5(t) &= \langle \mathbf{a}'_1(t), \mathbf{a}_3(t) \rangle, \\ c_3(t) &= \langle \gamma'(t), \mathbf{a}_3(t) \rangle, & c_6(t) &= \langle \mathbf{a}'_2(t), \mathbf{a}_3(t) \rangle \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{cases} \gamma'(t) &= c_1(t)\mathbf{a}_1(t) + c_2(t)\mathbf{a}_2(t) + c_3(t)\mathbf{a}_3(t) \\ \mathbf{a}'_1(t) &= c_1(t)\gamma(t) + c_4(t)\mathbf{a}_2(t) + c_5(t)\mathbf{a}_3(t) \\ \mathbf{a}'_2(t) &= c_2(t)\gamma(t) - c_4(t)\mathbf{a}_1(t) + c_6(t)\mathbf{a}_3(t) \\ \mathbf{a}'_3(t) &= c_3(t)\gamma(t) - c_5(t)\mathbf{a}_1(t) - c_6(t)\mathbf{a}_2(t) \end{cases}$$

⁹ $K_d = K_I + 1$ となる。

が成り立つ。

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3,1)$$

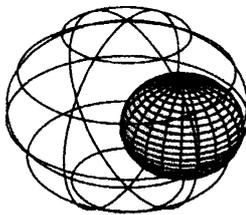
の $c_i(t)$ 達が全てを統制しており、この空間 $C(t)$ が horocyclic surface の空間と思える。ここで、 $\mathfrak{so}(3,1)$ はローレンツ群 $SO_0(3,1)$ のリー環である。このとき次が成り立つ。

定理 8.2 ([36]) 臍点がないホロ平坦曲面は(少なくとも局所的には) horocyclic surface $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t)$ である。しかも $\ell(t)$ は光的法ベクトルである。逆に、 $\ell(t)$ を光的法ベクトルとする horocyclic surface $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ はホロ平坦曲面である。

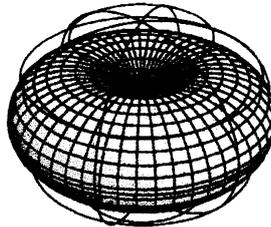
この $\ell(t)$ が光的法ベクトルとなる条件は、 $c_2 = c_1 - c_4 = 0$ である。よって、この条件を満たす horocyclic surface を horo-flat horocyclic surface と呼ぶ。

ユークリッド空間内の平坦 (flat) な ruled surface が局所的に錐面、柱面、接線曲面のどれかになるように、horo-flat horocyclic surface の場合もいろいろな曲面がある。

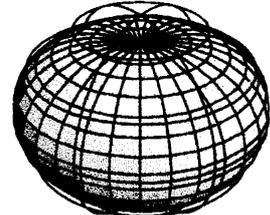
例 8.3 ポアンカレ球モデルにおける図を觀賞する。詳しくは [36] を参照。



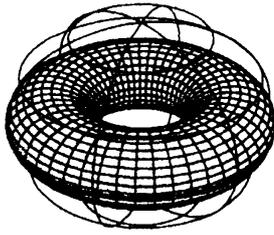
Horosphere



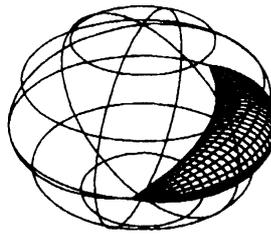
Horo-cone1



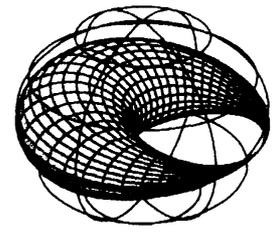
Horo-cone2



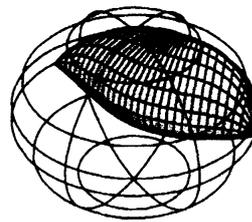
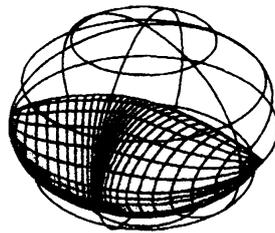
Horo-torus



Banana



Croissant



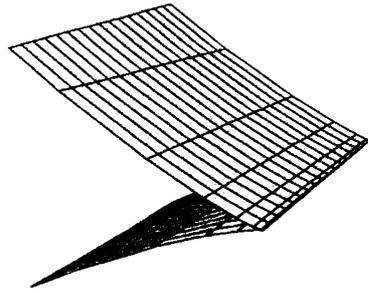
Hips

その中で特異点論的に興味があるのはユークリッド空間内における接線曲面に対応する **horo-flat tangent horocyclic surface** であるが、これは $c_3 = 0$ により与えられる曲面である。つまり、 $c_2 = c_1 - c_4 = c_3 = 0$ となる場合である。このとき普及的な特異点は以下で与えられる。

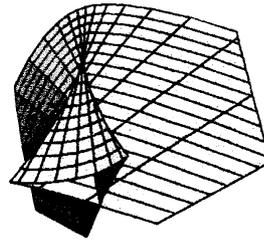
定理 8.4 ([36]) 普及的な *horo-flat tangent horocyclic surface* $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(\mathbb{R} \times I)$ の特異点は *cuspidal edge*、*swallowtail*、*cuspidal cross cap* または *cuspidal beaks* のどれかと同値である。その特異点は *generating horocycle* 上にあり、以下の場合となる：

- (1) 2 つ特異点があり、両方とも *cuspidal edge* である。
- (2) 2 つ特異点があり、1 つは *cuspidal edge* で1 つは *swallowtail* である。
- (3) 1 つだけ特異点があり、*cuspidal cross cap* である。
- (4) 1 つだけ特異点があり、*cuspidal beaks* である。

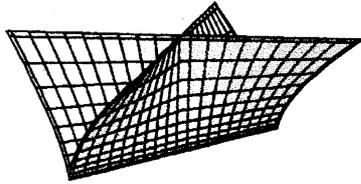
ここで、*cuspidal edge* は $CE = \{(x, y, z) | x^2 = y^3\}$ 、*swallowtail* は $SW = \{(x, y, z) | x = 3u^4 + u^2v, y = 4u^3 + 2uv, z = v\}$ 、*cuspidal cross cap* は $CCR = \{(x, y, z) | x = u, y = uv^3, z = v^2\}$ 、*cuspidal beaks* は $CBK = \{(x, y, z) | x = v, y = -2u^3 + uv^2, z = 3u^4 - u^2v^2\}$ に微分同相な写像芽のことである。この標準形を図に書くと、



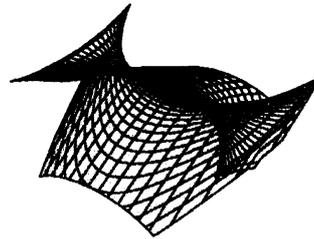
cuspidal edge



swallowtail



cuspidal cross cap



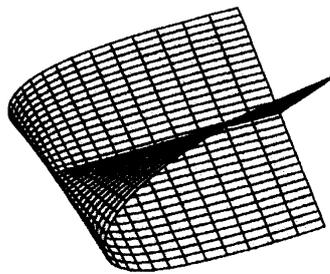
cuspidal beaks

である。

注意として、ユークリッド空間内の接線曲面の普及的な特異点は cuspidal edge, swallowtail, cuspidal cross cap であることが知られている [15, 23, 44, 45]。よって、horo-flat tangent horocyclic surface の普及的な特異点の分類とは異なることが分かる。また、次が成り立つ。

定理 8.5 ([36]) 普及的な horocyclic surface $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(\mathbb{R} \times I)$ の特異点は *cross cap* である。

ここで、cross cap は $CR = \{(x, y, z) | x = u^2, y = v, z = uv\}$ に微分同相な写像芽のことである。この標準形を図に書くと、



cross cap

である。

ユークリッド空間内の ruled surface の普及的な特異点は cross cap であることが知られている [38]。よって、horocyclic surface の普及的な特異点の分類と一致することが分かる。

9 終わりに

ミンコフスキー空間や双曲空間における接触の様子や大域的な性質など他の話題は、[11, 27, 28, 29, 34, 39, 40] を参照してください。

また、光錐内の空間的曲線から双曲空間内の horocyclic surface を構成することもでき、特異点が調べられている [53]。

そこで、最後に問題としてド・シッター空間や光錐内の空間的曲線に対して、 $n=2$ の場合のホロ円に対応する縮閉線を考察せよ。また、 $n=3$ の場合も考察し、特に双対性の観点から統一的にこれらの概念を調べよという問題がある。さらに、これらの概念を”色々な意味”で一般化することも面白いかもしれない。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, *Topological invariants of plane curves and caustics*, University Lecture Series 5, Amer. Math. Soc. 1994.
- [2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps, vol. I*. Birkhäuser, 1986.
- [3] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory: *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Mathematics, 55, Pitman, 1982.
- [4] Th. Bröcker, *Differential Germs and Catastrophes*, Mathematical Society Lecture Note Series, 17. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1975.
- [5] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and singularities (second edition)*, Cambridge University press, 1992.
- [6] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 125 (1999), 243–268.
- [7] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, Ridges, Crests and Sub-parabolic lines of evolving surfaces, *Int. J. Computer Vision* 18 (1996), 195–210.
- [8] J. W. Bruce and T. C. Wilkinson, Folding maps and focal sets, Lecture Notes in Math., 1462, 63–72, Springer, Berlin, 1991.

- [9] R. L. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space in *Théorie des variétés minimales et applications* (Palaiseau, 1983–1984), *Astérisque* No. 154–155, (1987), **12**, 321–347, 353 (1988).
- [10] M. Buosi, S. Izumiya and M. A. Soares Ruas, Total Absolute Horospherical curvature of Submanifolds in Hyperbolic Space, Preprint.
- [11] T. E. Cecil and P. J. Ryan, Distance functions and umbilic submanifolds of hyperbolic space, *Nagoya Math. J.* **74** (1979) 67–75.
- [12] L. Chen, On spacelike surfaces in Anti de Sitter 3-space from the contact viewpoint, Preprint.
- [13] L. Chen and S. Izumiya, Singularities of Anti de Sitter Torus Gauss maps, Preprint.
- [14] L. Chen and S. Izumiya, A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in semi-Euclidean space, Preprint.
- [15] J. P. Cleave, The form of the tangent developable at points of zero torsion on space curves, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **88** (1980) 403–407.
- [16] T. Fukuda, G. Ishikawa and S. Izumiya, 特異点の数理, 共立出版, 2001.
- [17] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada Singularities of maximal surfaces, *Math. Z.* **259** (2008), 827–848.
- [18] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A plateau problem at infinity, *Trans. A.M. S.* **356**, (2004), 3405–3428.
- [19] P. J. Giblin and F. Tari, Perpendicular bisectors, duality and local symmetry of plane curves, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **125** (1995), 181–194.
- [20] P. J. Giblin and F. Tari, Local reflexional and rotational symmetry in the plane, *Lecture Notes in Math.*, 1462, 154–171, Springer, Berlin, 1991.
- [21] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [22] K. Ichiwara, 双曲平面におけるホロ円の1径数族の包絡線について, Master Thesis, Hokkaido University, (2008).
- [23] G. Ishikawa, Topological classification of the tangent developables of space curves, *J. London Math. Soc.* **62** (2000), 583–598.
- [24] G. Ishikawa and S. Izumiya, 応用特異点論, 共立出版, 1998.
- [25] S. Izumiya, Timelike hypersurfaces in de Sitter space and Legendrian singularities, To appear in *J. Math. Science*.

- [26] S. Izumiya, Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, To appear in *Moscow Math. J.*
- [27] S. Izumiya, D. Pei and M. C. Romero-Fuster, The horospherical geometry of surfaces in Hyperbolic 4-space, *Israel Journal of Mathematics*, **154** (2006), 361–379.
- [28] S. Izumiya, D. Pei, M. C. Romero-Fuster and M. Takahashi, On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2 in Hyperbolic n -space. *Bull. Braz. Math. Soc.* **35** (2004), 177–198.
- [29] S. Izumiya, D. Pei, M. C. Romero-Fuster and M. Takahashi, Horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic n -space, *J. London Math. Soc.* **71** (2005), 779–800.
- [30] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, Horospherical surfaces of curves in Hyperbolic space, *Publ. Math. Debrecen* **64** (2004), 1–13.
- [31] S. Izumiya, D-H. Pei and T. Sano, Singularities of hyperbolic Gauss maps. *Proc. London Math. Soc.* **86** (2003), 485–512.
- [32] S. Izumiya, D-H. Pei, T. Sano and E. Torii, Evolutes of hyperbolic plane curves, *Acta Mathematica Sinica* **20** (2004), 543–550.
- [33] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, Singularities of evolutes of hypersurfaces in hyperbolic space, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **47** (2004), 131–153.
- [34] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, Curves and surfaces in Hyperbolic space, *Banach Center Publications* **65**, Geometric singularity theory (2004), 197–123.
- [35] S. Izumiya and M. C. Romero-Fuster, The horospherical Gauss-Bonnet type theorem in hyperbolic space, *J. Math. Soc. Japan* **58** (2006), 965–984.
- [36] S. Izumiya, K. Saji, M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space, Preprint.
- [37] S. Izumiya and M. Takahashi, Spacelike parallels and evolutes in Minkowski pseudo-spheres, *J. Geometry and Physics* **57** (2007), 1569–1600.
- [38] S. Izumiya and N. Takeuchi, Geometry of ruled surfaces, *Applicable math. in the golden age* (2003), 305–338.
- [39] S. Izumiya and F. Tari, Projections of surfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes, To appear in *Rev. Mat. Iberoamericana*.
- [40] S. Izumiya and F. Tari, Pairs of foliations on timelike surfaces in the de Sitter space S_1^3 , Preprint.
- [41] S. Izumiya, F. Tari and M. Takahashi Folding maps on spacelike and timelike surfaces and duality, Preprint.

- [42] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space. *Pacific J. Math.* **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [43] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*. Translated from the French by Carl P. Simon. London Mathematical Society Lecture Note Series, 58. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.
- [44] D. Mond, On the tangent developable of a space curve, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **91** (1982), 351–355.
- [45] D. Mond, Singularities of the tangent developable surface of a space curve, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **40** (1989), 79–91.
- [46] R. J. Morris, Symmetry of curves and the geometry of surfaces: two explorations with the aid of computer graphics, PhD Thesis, University of Liverpool, 1991.
- [47] R. J. Morris, The sub-parabolic lines of a surface, The mathematics of surfaces, VI (Uxbridge, 1994), 79–102, *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.*, 58, Oxford Univ. Press, 1996.
- [48] B. O’neil, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [49] I. Porteous, The normal singularities of submanifold, *J. Diff. Geom.* **5** (1971), 543–564.
- [50] I. Porteous, *Geometric differentiation for intelligence of curves and surfaces*, Cambridge University Press (1994).
- [51] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 149. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [52] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Behavior of corank-one singular points on wave fronts, *Kyushu J. Math.* **62** (2008), 259–280.
- [53] C. Takizawa and K. Tsukada, *Horocyclic surfaces in hyperbolic 3-space*, Preprint.
- [54] M. Umehara and K. Yamada, Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space, *Ann. of Math.* **137** (1993), 611–638.
- [55] M. Umehara and K. Yamada, Surfaces of constant mean curvature c in $H^3(-c^2)$ with prescribed hyperbolic Gauss map, *Math. Ann.* **304** (1996), 203–224.
- [56] H. Whitney, *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space*, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 247–293.
- [57] T. C. Wilkinson, The geometry of folding maps, PhD Thesis, University of Newcastle-upon-Tyne, 1991.
- [58] V. M. Zakalyukin, Lagrangian and Legendrian singularities, *Funct. Anal. Appl.*, **10** (1976), 23–31.
- [59] V. M. Zakalyukin, Reconstructions of fronts and caustics depending one parameter and versality of mappings, *J. Sov. Math.*, **27** (1984), 2713–2735.