数理解析研究所講究録
第 1623 巻 2009 年 102-110

Stability of reflective orbits of cohomogeneity one actions on compact symmetric spaces

東京理科大学大学院　理工学研究科　木村太郎 (Taro Kimura)
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology
Tokyo University of Science

1　序論

本研究の目的は, コンパクトリーマン対称空間における全測地的部分多様体の幾何学的構造と, その極小部分多様体としての安定性との関連を調べることである.

[3] において, 我々は階数 2 のコンパクト単連結既約リーマン対称空間の極大全測地的部分多様体を全て決定した. この結果から全空間の制限ルート系が G_2 型以外なら, 極大全測地的部分多様体は鏡映部分多様体であるということがわかる. また [4] において, 我々は階数 2 のコンパクト単連結既約リーマン対称空間の極大全測地的部分多様体の安定性を全て決定した. 特に, その極大全測地的部分多様体が鏡映部分多様体であり, その直交補空間が階数 1 の場合には証明が簡潔になる. この条件をみたす鏡映部分多様体は, あるリー群の等長的作用から決まる軌道であることがわかる. その作用は, cohomogeneity one action と呼ばれる. コンパクト型既約リーマン対称空間への cohomogeneity one action は, A. Kollross によって完全に与えられた ([6]). 彼の手法は, case-by-case に調べて完全に分類するというものである. この分類方法では, 我々の目的である全測地的部分多様体の幾何学的構造がはっきり明示されない. 一方, リーマン多様体へのリー群の等長的作用が cohomogeneity one action であることと, その軌道の isotropy が法空間の単位球へ推移的に作用することが同値であるという事実がある. この事実をリーマン対称空間に適用した場合, 法空間はどのような空間か？このことを関連付けた結果が, J. Berndt と田丸博士の結果である ([2]). この結果によると, 特異軌道が鏡映部分多様体の場合にはその法空間が階数 1 のリーマン対称空間となる. 以上のことを踏まえると, 我々の目標である全測地的部分多様体の幾何学的構造と, その極小部分多様体としての安定性の関連付けるには, 次に定義する cohomogeneity one action という等長的作用と鏡映部分多様体という概念が必要であると考えられる.

2 Cohomogeneity one actions on Riemannian manifolds

定義 2.1. (N, g) をリーマン多様体, G をリー群とする. このとき, 軌道 $G \cdot p$ $(p \in N)$ が**主軌道**であるとは, 任意の $q \in N$ に対して, ある G の元 g があって次をみたすこと: $G_p \subset gG_qg^{-1}$. ここで, G_p と G_q はそれぞれ点 p と 点 q の isotropy 部分群を表す.

注意 2.2. 定義より, 主軌道は最大次元の軌道であることがわかる.

定義 2.3. (N, g) をリーマン多様体, G をリー群, $G \cdot q$ $(q \in N)$ を主軌道とする. このとき, 軌道 $G \cdot p$ $(p \in N)$ が**特異軌道**であるとは, $\dim(G \cdot p) < \dim(G \cdot q)$ をみたすこと.

以上をふまえて, リーマン多様体 (N, g) への cohomogeneity one action を定義する.

定義 2.4. リーマン多様体 (N, g) への等長的作用が **cohomogeneity one action** であるとは, その主軌道の余次元が 1 になること.

[1] において, コンパクト型既約リーマン対称空間と非コンパクト型既約リーマン対称空間への cohomogeneity one action の特異軌道の個数については, 次のような事実が与えられている.

命題 2.5 ([1]). N を既約リーマン対称空間とする. このとき次が成り立つ.

> (1). N がコンパクト型なら, N への cohomogeneity one action の特異軌道は 2 つ.
>
> (2). N が非コンパクト型なら, N への cohomogeneity one action の特異軌道は高々 1 つ.

注意 2.6. [1] により, cohomogeneity one action の特異軌道は極小である.

我々が対象とする空間はコンパクト型既約リーマン対称空間であるので, 各 cohomogeneity one action に対しての 2 つの特異軌道を扱うことになる.

3 Reflective submanifolds on Riemannian manifolds

次に, D. S. P. Leung が導入した鏡映部分多様体を定義する.

定義 3.1 ([7]). リーマン多様体 (N, g) の部分多様体 M が**鏡映部分多様体**であるとは, M が N のある対合的等長変換の固定点集合の連結成分になっていることをいう.

注意 3.2. 鏡映部分多様体は等長変換の固定点集合の連結成分であるので, 全測地的部分多様体である. したがって, N がリーマン対称空間なら鏡映部分多様体 M は誘導計量に関してリーマン対称空間になる.

命題 3.3 ([7]). M をリーマン対称空間 N の部分多様体とする. このとき, M が鏡映部分多様体であるための必要十分条件は, M と直交補空間 $M^{\perp}$ が共に全測地的部分多様体となること.

次に, 鏡映部分多様体と密接に関連する Hermann action を定義する.

定義 3.4 (Hermann action). コンパクトリーマン対称空間 $N = U/L$ 上へのコンパクトリー群 H の作用が **Hermann action** であるとは, (U, H) が対称対になること.

命題 3.5. コンパクトリーマン対称空間 $N = U/L$ の鏡映部分多様体を M とする. このとき, M は U のリー部分群 H の Hermann action の全測地的軌道になる. 逆に, Hermann action の全測地的軌道は鏡映部分多様体になる.

命題 3.5 は, 我々の目的であるコンパクトリーマン対称空間の全測地的部分多様体の安定性の決定に必要な命題である.

4 Known results

非コンパクト型リーマン対称空間への cohomogeneity one action に関して, J. Berndt と田丸博士 によって与えられた次のような結果がある.

命題 4.1 ([2]). N^* を非コンパクト型リーマン対称空間とし, N をそのコンパクト双対とする. このとき, N^* の cohomogeneity one action の全測地的軌道 M^* と N の cohomogeneity one action の全測地的軌道 M は 1 対 1 に対応する.

また, 彼らは次の必要十分条件を与えた.

命題 4.2 ([2]). N^* を非コンパクト型リーマン対称空間とし, M^* を N^* の鏡映部分多様体とする. このとき, M^* が cohomogeneity one action の全測地的軌道である必要十分条件は, $(M^*)^\perp$ が階数 1 のリーマン対称空間になること.

命題 4.1 と命題 4.2 から, コンパクト型リーマン対称空間 N の cohomogeneity one action の鏡映軌道 M を見つけることができる (表 1).

5 Stability

$N = U/L$ をコンパクトリーマン対称空間とする. このとき, 全測地的埋め込み $f : M = G/K \to N = U/L$ に対して, [8] により, f の index(f) は次で与えられる:

$$\mathrm{index}(f) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_i}} \dim \mathrm{Hom}_K(V_\lambda, (\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda \qquad (\#)$$

ここで, $D(G)$ は G の既約表現 (λ, V_λ) の同値類全体の集合を表す. また, G と U のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{u}$, M と N の標準分解をそれぞれ $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ と $\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ とする. $\mathfrak{u}$ における $\mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{g}^\perp$ とすると, 単純 G-module 分解 $\mathfrak{g}^\perp = \sum_{i=1}^k \mathfrak{g}_i^\perp$ を得る. $\mathfrak{m}^\perp := \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^\perp$, $\mathfrak{m}_i^\perp := \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{g}_i^\perp$ とし, a_λ は G の既約表現 (λ, V_λ) の Casimir 作用素の固有値, a_i は G の既約表現 $(\mu_i, \mathfrak{g}_i^\perp)$ の Casimir 作用素の固有値を表す.

注意 5.1. ここで, f が安定 (M が安定) であるための必要十分条件は, index$(f) = 0$ である.

6 Stability of reflective orbits of cohomogeneity one actions

この節では, コンパクト単連結既約リーマン対称空間における cohomogeneity one action から決まる鏡映軌道の安定性を全て決定する. 以下, N はコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, 包含写像 $\iota : M = G/K \to N = U/L$ に対して, 大仁田の index 公式 (#) を用いる. いま M は鏡映部分多様体であることより, M はある $H \subset U$ の Hermann 作用から決まる全測地的軌道である. この事実より, コンパクト対称対 (U, H) を次の 3 つの場合に分けて考える.

1. U/H はエルミート対称空間.

2. U/H と $M^{\perp}$ は四元数ケーラー対称空間.
3. U/H は上記以外.

また, 仮定により $M^{\perp}$ は階数 1 のコンパクトリーマン対称空間であるから, $T_oM^{\perp}$ は単純 K-module となる.

1 の場合：
仮定より, $M = G/K$ は Hermann 作用の全測地的軌道である. よって, 自己同型群のリー環の単射準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}$ は, 対称対 $(U, T \cdot G)$ から引き起こされる. $\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$ とすると, $\mathfrak{g}^{\perp} \cong \mathbb{R} \oplus T_o(U/H)$ であり, この直和分解は単純 $\mathfrak{g}$-module 分解である. $\mathfrak{g}_1^{\perp} = \mathbb{R}, \mathfrak{g}_2^{\perp} = T_o(U/H)$ とすると, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ への作用は自明で, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_2^{\perp}$ への作用はU/H の線形イソトロピー表現の $\mathfrak{g}$ への制限と同値. これより, $(\#)$ は

$$\mathrm{index}(\iota) = \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_\rho}} \dim \mathrm{Hom}_K(V_\lambda, (T_oM^{\perp})^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda$$

となる.

2 の場合：
仮定より, $M = G/K$ は Hermann 作用の全測地的軌道である. よって, 自己同型群のリー環の単射準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}$ は, 対称対 $(U, Sp(1) \cdot G)$ から引き起こされる. $\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$ とすると, $\mathfrak{g}^{\perp} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus T_o(U/H)$ である. $\mathfrak{g}_i^{\perp} \cong \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mathfrak{g}_4^{\perp} \oplus \mathfrak{g}_5^{\perp} \cong T_o(U/H)$ とすると, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_i^{\perp}$ $(i = 1, 2, 3)$ への作用は自明で, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_j^{\perp}$ $(j = 4, 5)$ への作用はU/H の線形イソトロピー表現の $\mathfrak{g}$ への制限と同値. これより, $(\#)$ は

$$\mathrm{index}(\iota) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_\rho}} \dim \mathrm{Hom}_K(V_\lambda, (T_oM_k^{\perp})^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda$$

となる. ここで, 仮定より $M^{\perp}$ は階数 1 のコンパクトリーマン対称空間であり, また四元数ケーラー対称空間であるので, $M^{\perp} \cong \mathbb{H}P^k$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ となる. これから, 単純 K-module 分解 $T_oM^{\perp} \cong T_oM_1^{\perp} \oplus T_oM_2^{\perp}$ を得る.

3 の場合：
仮定より, $M = G/K$ は Hermann 作用の全測地的軌道である. よって, 自己同型群のリー環の単射準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}$ は, 対称対 (U, G) から引き起こされる. $\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$

とすると, $\mathfrak{g}^{\perp} \cong T_o(U/G)$ であり, $\mathfrak{g}^{\perp}$ は単純 $\mathfrak{g}$-module である. $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^{\perp}$ への作用は U/G の線形イソトロピー表現と同値. これより, (#) は

$$\mathrm{index}(\iota) = \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_\rho}} \dim \mathrm{Hom}_K(V_\lambda, (T_o M^{\perp})^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda$$

となる.

注意 6.1. a_ρ は, コンパクトリーマン対称空間 U/H の isotropy 表現 ρ のカシミール作用素の固有値を表す.

1 〜 3 の場合で, $\mathrm{index}(\iota) = 0$ となるためには, 任意の $\lambda \in D(G)$ に対して, $a_\lambda > a_\rho$ を満たす λ が自明な表現以外存在しなければよいので, 次の定理を得る.

定理 6.2 ([5])**.** N をコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, 包含写像 $\iota : M = G/K \to N = U/L$ に対して, $T_o(U/H) \cong V_{\varpi_1(G)}$ であるならば, $\mathrm{index}(\iota) = 0$.

注意 6.3. ここで, H は鏡映部分多様体 M を決める U のコンパクトリー部分群であり, $V_{\varpi_1(G)}$ は G の ϖ_1-表現空間である.

また, 定理 6.2 の仮定を満たしていない鏡映軌道の安定性は個別に議論し, 次の定理を得た.

定理 6.4 ([5])**.** N をコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, 包含写像 $\iota : M = G/K \to N = U/L$ の安定性は, 表 2 で与えられる. 特に, N が A_2 型以外ならば安定である.

表 1: Totally geodesic singular orbits of cohomogeneity one actions on simply connected irreducible compact Riemannian symmetric spaces

N	Totally geodesic singular orbits with cohomogeneity one actions	Remark
$G_k^o(\mathbb{R}^n)$	$G_{k-1}^o(\mathbb{R}^{n-1})$, $G_k^o(\mathbb{R}^{n-1})$	1*
$G_k^o(\mathbb{R}^{2k})$	$G_{k-1}^o(\mathbb{R}^{2k-1}) = G_k^o(\mathbb{R}^{2k-1})$	$k \geq 4$
$G_2^o(\mathbb{R}^{2n})$	S^{2n-2}, $G_2^o(\mathbb{R}^{2n-1})$, $\mathbb{C}P^{n-1}$	$n \geq 3$
$G_3^o(\mathbb{R}^6) = AI(4)$	$G_2^o(\mathbb{R}^5) = G_3^o(\mathbb{R}^5)$, $S^1 \cdot AI(3)$	
$G_k(\mathbb{C}^n)$	$G_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1})$, $G_k(\mathbb{C}^{n-1})$	2*
$G_k(\mathbb{C}^{2k})$	$G_{k-1}(\mathbb{C}^{2k-1}) = G_k(\mathbb{C}^{2k-1})$	$k \geq 3$
$G_2(\mathbb{C}^{2n})$	$G_2(\mathbb{C}^{2n-1})$, $\mathbb{C}P^{2n-2}$, $\mathbb{H}P^{n-1}$	$n \geq 3$
$G_k(\mathbb{H}^n)$	$G_{k-1}(\mathbb{H}^{n-1})$, $G_k(\mathbb{H}^{n-1})$	3*
$G_k(\mathbb{H}^{2k})$	$G_{k-1}(\mathbb{H}^{2k-1}) = G_k(\mathbb{H}^{2k-1})$	$k \geq 2$
$AI(n)$	$S^1 \cdot AI(n-1)$	4*
$AII(n)$	$S^1 \cdot AII(n-1)$	$n \geq 4$
$AII(3)$	$S^1 \cdot S^5$, $SU(3)$	
$DIII(n)$	$DIII(n-1)$	$n \geq 5$
$CI(n)$	$S^2 \times CI(n-1)$	$n \geq 3$
$SU(n)$	$S(U(1) \times U(n-1))$	$n \geq 5$
$SU(4)$	$S(U(1) \times U(3))$, $Sp(2)$	
$SU(3)$	$S^1 \cdot S^3$, $AI(3)$	
$Spin(n)$	$Spin(n-1)$	5*
$Sp(n)$	$Sp(n-1) \times Sp(1)$	$n \geq 3$
EII	FI	
$EIII$	$\mathbb{O}P^2$	
EIV	$S^1 \cdot S^9$, $AII(3)$	
FI	$G_4^o(\mathbb{R}^9)$	
F_4	$Spin(9)$	

1*: $1 < k < n-k, (k,n) \neq (2,2m), m > 2$,
2*: $1 < k < n-k, (k,n) \neq (2,2m), m > 2$,
3*: $1 < k < n-k$, 4*: $n = 3$ or $n \geq 5$, 5*: $n = 5$ or $n \geq 7$.

N	M	stability
$AI(n)$	$S^1 \cdot AI(n-1)$	stable
$AII(n)$	$S^1 \cdot AII(n-1)$	stable
$AII(3)$	$S^1 \cdot S^5$	stable
$AII(3)$	$SU(3)$	unstable
$DIII(n)$	$DIII(n-1)$	stable
$CI(n)$	$S^2 \times CI(n-1)$	stable
$SU(n)$	$S(U(1) \times U(n-1))$	stable
$SU(4)$	$S(U(1) \times U(3))$	stable
$SU(4)$	$Sp(2)$	stable
$SU(3)$	$S^1 \cdot S^3$	stable
$SU(3)$	$AI(3)$	unstable
$Spin(n)$	$Spin(n-1)$	stable
$Sp(n)$	$Sp(n-1) \times Sp(1)$	stable

N	M	stability
EII	FI	stable
$EIII$	$\mathbb{O}P^2$	stable
EIV	$S^1 \cdot S^9$	stable
EIV	$AII(3)$	unstable
FI	$G^o_4(\mathbb{R}^9)$	stable
F_4	$Spin(9)$	stable

N	M	stability
$G^o_k(\mathbb{R}^n)$	$G^o_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$	stable
$G^o_k(\mathbb{R}^n)$	$G^o_k(\mathbb{R}^{n-1})$	stable
$G^o_k(\mathbb{R}^{2k})$	$G^o_{k-1}(\mathbb{R}^{2k-1})$	stable
$G^o_2(\mathbb{R}^{2n})$	S^{2n-2}	stable
$G^o_2(\mathbb{R}^{2n})$	$G^o_2(\mathbb{R}^{2n-1})$	stable
$G^o_2(\mathbb{R}^{2n})$	$\mathbb{C}P^{n-1}$	stable
$G^o_3(\mathbb{R}^6)$	$G^o_3(\mathbb{R}^5)$	stable
$G^o_3(\mathbb{R}^6)$	$S^1 \cdot AI(3)$	stable

N	M	stability
$G_k(\mathbb{C}^n)$	$G_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1})$	stable
$G_k(\mathbb{C}^n)$	$G_k(\mathbb{C}^{n-1})$	stable
$G_k(\mathbb{C}^{2k})$	$G_k(\mathbb{C}^{2k-1})$	stable
$G_2(\mathbb{C}^{2n})$	$G_2(\mathbb{C}^{2n-1})$	stable
$G_2(\mathbb{C}^{2n})$	$\mathbb{C}P^{2n-2}$	stable
$G_2(\mathbb{C}^{2n})$	$\mathbb{H}P^{n-1}$	stable
$G_k(\mathbb{H}^n)$	$G_{k-1}(\mathbb{H}^{n-1})$	stable
$G_k(\mathbb{H}^n)$	$G_k(\mathbb{H}^{n-1})$	stable
$G_k(\mathbb{H}^{2k})$	$G_k(\mathbb{H}^{2k-1})$	stable

表 2: Stability of reflective orbits of cohomogeneity one actions on simply connected irreducible compact Riemannian symmetric spaces

参考文献

[1] J. Berndt and M. Brück, *Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math. **541** (2001), 209–235.

[2] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit*, Tohoku Math. J., **56** (2004), 163–177.

[3] T. Kimura and M. S. Tanaka, *Totally geodesic submanifold in compact symmetric spaces of rank two*, to appear in Tokyo J. Math.

[4] T. Kimura and M. S. Tanaka, *Stability of certain minimal submanifolds in compact symmetric spaces of rank two*, to appear in Differential Geom. Appl.

[5] T. Kimura, *Stability of certain reflective submanifolds in compact symmetric spaces*, to appear in Tsukuba J. Math.

[6] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 571–612.

[7] D. S. P. Leung, *On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, Indiana Univ. Math. J, **24** (1974), 327–339; Errata, Indiana Univ. Math. J, **24** (1975), 1199.

[8] Y. Ohnita, *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Composito Math., **64** (1987), 157–189.

Present Addresses:
TARO KIMURA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE
NODA, CHIBA, 278-8510 JAPAN
e-mail: kimura_tarou@ma.noda.tus.ac.jp