

大学講義における数式処理の活用

工学院大学・工学部 牧野 潔夫 (Isao Makino)
Faculty of Engineering,
Kogakuin University

I. はじめに

筆者は工学院大学工学専攻科および情報学専攻科で講義を担当しています。その1つが工学専攻科の『応用関数解析特論』です。この講義で数式処理ソフト maxima を利用した内容を以下に報告します。

II. 講義について

内容は直交多項式の一般論と直交多項式による関数近似（いわゆる Lagrange 補間）および近似多項式を積分してもとの関数の積分の近似積分を求める。いわゆる Gauss 型近似積分を扱っている。この分野は線形代数学と微分積分学が融合し、数学の内容も計算もそれほど難しくないので、数学に興味を持つ学生（院生）に適度な題材であると思われる。

講義対象は電気系、機械系の大学院生（1年生が多い）で期間は半期である。この講義における数式処理の利用は以前から行っていたが、気が向いたとき計算例を示すにとどまっていた。2年ほど前から系統的に教材を作り始めた。

講義で例示するものは demo ファイルで作ってあるが html ファイルで作ったほうが使いやすいので8月の講演の後で書き換えている。

III. 講義内容詳細

講義内容は以下のとおりである。

1. 計量ベクトル空間の概要
2. (一変数) n 次多項式のなす $n+1$ 次元ベクトル空間とその計量
 n 次以下の多項式がなす線形空間 $V(n)$ に内積

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

をいれる。ただし $a < b$ で $w(x)$ は区間 (a, b) で適当な条件をみたす非負の関数である。

3. 正規直交基底の存在とその計算法。
4. 具体的な計量に関する正規直交基底。(次ページの例)
5. 直交多項式の様々な性質。

Rodrigues の公式

直交性
漸化式
微分方程式

6. Christoffer-Darboux の公式

7. 直交多項式の根の性質と近似解法

全て実根で単根かつ (a, b) に存在する。

次数が 1 つ異なる直交多項式の根は交互に存在する。

近似解法のいくつか。

Graeffe の方法 (多倍長が本質的)

(注意!! Laguerre の多項式の根は求めにくい。)

8. Lagrange 近似

9. Gauss 型近似積分

10. 直交多項式が満たす微分方程式

11. 母関数

12. 詳しい計算例

以下にあげる具体的な直交多項式に関するさまざまな例 (講義中の課題の解答等も含む)

以下の例は全て

$$C_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{F(x)w(x)\}$$

の形をしている。

III. 直交多項式の具体例

扱った具体的な $a, b, w(x)$ に対する直交多項式 (直交系) は以下のとおりである。ただし (*) 印は結果の一部のみ示しただけで細かい計算は示さなかった。

i) Legendre の多項式

$$a = -1, b = 1, w(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

ii) Tchebycheff の多項式

$$a = -1, b = 1, w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$$

iii) Laguerre の多項式 (* $\alpha = 0$ のときのみ詳しく取り扱った)

$$a = 0, b = \infty, w(x) = e^{-x}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^x x^{n+\alpha})$$

とくに $\alpha = 0$ にしたものを L_n とおく。即ち

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x}$$

iv) Hermite の多項式

$$a = -\infty, b = \infty, w(x) = e^{-x^2}$$

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

v) Jacobi の多項式 (*)

$$a = 0, b = 1, w(x) = x^\alpha(1-x)^{\alpha-\gamma}, (\text{ただし } \alpha > \gamma + 1 > 0)$$

$$G_n(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\}$$

以上の多項式が内積

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

に関し直交する。ただしこれらの直交多項式は iii) の $\alpha = 0$ (即ち L_n) を除いて正規化されていないので正規直交基底 $\{\phi_n(x)\}$ にするには、例えば i) では

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$$

のように $P_n, T_n, L_n^{(\alpha)}, H_n, G_n$ のノルムで割っておく必要がある。ii), iii), iv), v) の正規直交基底はそれぞれ

ii)

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{\pi}} T_n(x)$$

iii)

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}} L_n^{(\alpha)}(x)$$

iv)

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$$

v)

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{(\alpha+2n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}{n!\Gamma(n+\alpha-\gamma+1)\Gamma(\gamma)^2}} G_n(\alpha, \gamma; x)$$

となる。

このようにすれば

$$(\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$$

が任意の負でない整数 n, m に対して成立する。

Darboux-Christoffel の公式

定理 (Darboux-Christoffel)

正規直交多項式 $\phi_n(x)$ は上のとおり。

$$K_\ell(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell} \phi_k(x)\phi_k(y)$$

とおくと

$$K_\ell(x, y) = C_n \frac{\phi_{\ell+1}(x)\phi_\ell(y) - \phi_{\ell+1}(y)\phi_\ell(x)}{x - y}$$

が成立する。ここで C_n は定数である。

系

$$K_\ell(x, x) = C_n(\phi_{\ell+1}(x)\phi'_\ell(x) - \phi'_{\ell+1}(x)\phi_\ell(x))$$

である。

さらに ℓ 次以下の多項式 f に関し

$$(K_\ell(*, y), f) = f(y)$$

が成立する。

V. 課題デモで示すようにただ単に積分コマンドを作用させても求める簡単な表現の結果はでてこない。かなり煩雑な解が表示される。この解を簡約化して求める結果を出すのはかなり面倒であり、簡約化コマンドに精通する必要がある。これをどのように学生に教えるかが課題の1つ目である。

講義で行っている上記の話の続き、即ち直交多項式の解の近似値を求めることおよびその解を使って Gauss 型数値積分（以下に簡単に解説してある）を行うデモプログラムを作ることが課題の2つめである。これは数式処理だけで可能ではあるが数値、数式融合計算になる。

Gauss 型定積分の計算 $\phi_n(x) = 0$ の根 x_1, x_2, \dots, x_n が全て単根で a と b の間にあるということが示されるので（この証明もすばらしい）、この事実を使った解法を用いる。ただし他の直交多項式はそうでもないが Laguerre の多項式の根は解法を工夫しないとかなりの誤差がでる。

連続な関数 $f(x)$ に対し x_1, x_2, \dots, x_n を用いて

$$F(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{\phi_n(x)}{(x - x_k)\phi'_n(x_k)}$$

とおくと F は区間 $[a, b]$ で f の”良い”近似多項式になっている。 $f(x)$ の性質により誤差評価ができる。さらに $F(x)$ に $w(x)$ を乗じて区間 (a, b) で積分すると

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} f(x_k)$$

(但し

$$\lambda_{k,n} = \int_a^b \frac{\phi_n(x)}{(x-x_k)\phi'_n(x_k)} dx$$

である) となり, この値は

$$\int_a^b f(x)w(x)dx$$

の”良い”近似値になる。これも $f(x)$ の満たす性質により誤差評価ができる。

i),iii),iv) に対し $\lambda_{k,n}$ は以下のとおりとなる。

i)

$$\lambda_{k,n} = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2 P_{n-1}(x_k)^2}$$

iii)

$$\lambda_{k,n} = \frac{n!x_k}{L_{n+1}(x_k)^2}$$

iv)

$$\lambda_{k,n} = \frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{H_{n+1}(x_k)^2}$$

これ以外の直交多項式に対し $\lambda_{k,n}$ の計算も必要である。

VI. まとめ

以上の直交多項式を生成したり, 定理の具体的な例や内積の計算例を数式計算で示すのに数式処理は大変便利である。

講義中はこれだけを一週に行うわけではないが何回かに分けて適当な分量だけ実行した。(同じデモを2回以上行う事もある)

ただしその前に数式処理の簡単な紹介が必要である。今年度は簡単な使い方と立ち上げ時に現われるデモを解説したが来年度以降は1コマ使って Maxima の用法、例えば:(代入);(式末 結果表示),\$(式末 結果非表示),%(前の結果),%o1,%o2,...,%on(n番目の出力),%i1,%i2,...,%in(n番目の入力), integrate(f,x,a,b)(= $\int_a^b f(x)dx$), diff(f,x,n)(= $\frac{d^n f}{dx^n}$), ratsimp(式の簡約),sum(a_k, k, i, n)(= $\sum_{k=i}^n a_k$), などの記号を説明する必要がある。V 課題で述べた簡約化の話もする必要がある。

また講義中に出す課題を手計算で行った後、数式処理ソフトを使って結果を確認するよう指導しているが、そのようにしているかどうかの確認を行いたい。

demo ファイル

```
load(orthopoly); /* Ortogonal Polynomial の Package を load */
```

```
/*Legendre Polynomial diff((x^2-1)^2,x,n) */
```

```
legendre_p(3,x);
```

```
P3:ratsimp(%);
```

```
P5:ratsimp(legendre_p(5,x));
```

```
integrate(P3*P5,x,-1,1);
```

```

integrate(P3^2,x,-1,1);
integrate(P5^2,x,-1,1);
Phi_p(n,x):=sqrt((2*n+1)/2)*legendre_p(n,x);
integrate(Phi_p(3,x)^2,x,-1,1);
integrate(Phi_p(6,x)^2,x,-1,1);
H(x,y,n):=sum(Phi_p(i,x)*Phi_p(i,y),i,0,n);
HD(n):=H(x,y,n)*(x-y)/
(Phi_p(n+1,x)*Phi_p(n,y)-Phi_p(n+1,y)*Phi_p(n,x));
HD(2);
ratsimp(%);
HD(10);
ratsimp(%);
for i:1 thru 10 do print(ratsimp(HD(i)));
T(y,k,n):=integrate(H(x,y,n)*Phi_p(k,x),x,-1,1)-Phi_p(k,y);
for i:0 thru 11 do print(ratsimp(T(y,i,10)));
TT(y,k,n):=integrate(H(x,y,n)*x^k,x,-1,1)-y^k;
for i:0 thru 11 do print(ratsimp(TT(y,i,10)));

```

デモの実行結果 (一部)

```

Maxima 5.15.0 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) demo(orthopoly);
batching #pC:/PROGRA~1/MAXIMA~2.0/share/maxima/5.15.0/demo/orthopoly.dem

```

```

At the _ prompt, type ';' followed by enter to get next demo
(%i2) load(orthopoly)
(%o2) C:/PROGRA~1/MAXIMA~2.0/share/maxima/5.15.0/share/orthopol\
y/orthopoly.lisp

```

```

(%i3) P (x)
3
3 2
5 (1 - x) 15 (1 - x)
(%o3) - ---- + ---- - 6 (1 - x) + 1
2 2

```

```

(%i4) P3 : ratsimp(%)
3

```

```

                    5 x  - 3 x
(%o4)  -----
                    2
(%i5)  P5 : ratsimp(P (x))
                    5
                    5      3
                    63 x  - 70 x  + 15 x
(%o5)  -----
                    8
(%i6)  integrate(P3 P5, x, - 1, 1)
(%o6)  0
                    2
(%i7)  integrate(P3 , x, - 1, 1)
                    2
(%o7)  -
                    7
                    2
(%i8)  integrate(P5 , x, - 1, 1)
                    2
(%o8)  --
                    11
                    1 + 2 n
(%i9)  Phi_p(n, x) := sqrt(-----) "P" (x)
                    2      n
                    1 + 2 n
(%o9)  Phi_p(n, x) := sqrt(-----) "P" (x)
                    2      n
                    2
(%i10)  integrate(Phi_p (3, x), x, - 1, 1)
(%o10)  1
                    2
(%i11)  integrate(Phi_p (6, x), x, - 1, 1)
(%o11)  1
(%i12) H(x, y, n) := sum(Phi_p(i, x) Phi_p(i, y), i, 0, n)
(%o12) H(x, y, n) := sum(Phi_p(i, x) Phi_p(i, y), i, 0, n)
(%i13) HD(n) :=
                    H(x, y, n) (x - y)
-----
                    Phi_p(1 + n, x) Phi_p(n, y) - Phi_p(1 + n, y) Phi_p(n, x)
(%o13) HD(n) :=

```

$$H(x, y, n) (x - y)$$

```

-----
Phi_p(1 + n, x) Phi_p(n, y) - Phi_p(1 + n, y) Phi_p(n, x)
(%i16) HD(10)
10 9
3 x y 46189 (1 - x) 230945 (1 - x)
(%o16) ((x - y) (----- + (21 (----- - -----
2 256 128
8 7 6
984555 (1 - x) 36465 (1 - x) 105105 (1 - x)
+ ----- - ----- + -----
128 2 4
5 4 3
189189 (1 - x) 105105 (1 - x) - 4290 (1 - x)
- ----- + ----- -
8 8
2
1485 (1 - x)
+ ----- - 55 (1 - x) + 1)
2
10 9 8
46189 (1 - y) 230945 (1 - y) 984555 (1 - y)
(----- - ----- + -----
256 128 128
7 6 5
36465 (1 - y) 105105 (1 - y) 189189 (1 - y)
- ----- + ----- - -----
2 4 8
4 2
105105 (1 - y) 4290 (1 - y) 1485 (1 - y)
+ ----- - 4290 (1 - y) + ----- - 55 (1 - y)
8 2
9 8
12155 (1 - x) 109395 (1 - x)
+ 1))/2 + (19 (----- + -----
128 128
7 6 5
6435 (1 - x) 105105 (1 - x) 63063 (1 - x)
- ----- + ----- - -----
2 16 8

```

$$\begin{aligned}
& + \frac{45045 (1-x)^4}{8} - 2310 (1-x)^3 + 495 (1-x)^2 - 45 (1-x) \\
& + 1) \left(- \frac{12155 (1-y)^9}{128} + \frac{109395 (1-y)^8}{128} - \frac{6435 (1-y)^7}{2} \right. \\
& \left. + \frac{105105 (1-y)^6}{16} - \frac{63063 (1-y)^5}{8} + \frac{45045 (1-y)^4}{8} \right. \\
& \left. - 2310 (1-y)^3 + 495 (1-y)^2 - 45 (1-y) + 1) \right) / 2 \\
& + (17 \left(- \frac{6435 (1-x)^8}{128} - \frac{6435 (1-x)^7}{16} + \frac{21021 (1-x)^6}{16} \right. \\
& \left. - \frac{9009 (1-x)^5}{4} + \frac{17325 (1-x)^4}{8} - 1155 (1-x)^3 + 315 (1-x)^2 \right. \\
& \left. - 36 (1-x) + 1) \left(- \frac{6435 (1-y)^8}{128} - \frac{6435 (1-y)^7}{16} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{21021 (1-y)^6}{16} - \frac{9009 (1-y)^5}{4} + \frac{17325 (1-y)^4}{8} \right. \right. \\
& \left. \left. - 1155 (1-y)^3 + 315 (1-y)^2 - 36 (1-y) + 1) \right) / 2 \\
& + (15 \left(- \frac{429 (1-x)^7}{16} + \frac{3003 (1-x)^6}{16} - \frac{2079 (1-x)^5}{4} \right. \\
& \left. + \frac{5775 (1-x)^4}{4} - 525 (1-x)^3 + 189 (1-x)^2 - 28 (1-x) + 1) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \\
& \left(- \frac{429 (1-y)^7}{16} + \frac{3003 (1-y)^6}{16} - \frac{2079 (1-y)^5}{4} + \frac{5775 (1-y)^4}{8} \right. \\
& \left. - 525 (1-y)^3 + 189 (1-y)^2 - 28 (1-y) + 1 \right) / 2 \\
& + (13 \left(- \frac{231 (1-x)^6}{16} + \frac{693 (1-x)^5}{8} - \frac{1575 (1-x)^4}{8} \right. \\
& \left. - 210 (1-x)^3 + 105 (1-x)^2 - 21 (1-x) + 1 \right) \\
& \left(- \frac{231 (1-y)^6}{16} + \frac{693 (1-y)^5}{8} - \frac{1575 (1-y)^4}{8} - 210 (1-y)^3 \right. \\
& \left. + 105 (1-y)^2 - 21 (1-y) + 1 \right) / 2 \\
& + (11 \left(- \frac{63 (1-x)^5}{8} + \frac{315 (1-x)^4}{8} - 70 (1-x)^3 \right. \\
& \left. + \frac{105 (1-x)^2}{2} - 15 (1-x) + 1 \right) \\
& \left(- \frac{63 (1-y)^5}{8} + \frac{315 (1-y)^4}{8} - 70 (1-y)^3 + \frac{105 (1-y)^2}{2} \right. \\
& \left. - 15 (1-y) + 1 \right) / 2 + (9 \left(- \frac{35 (1-x)^4}{8} + \frac{35 (1-x)^3}{2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{45(1-x)^2}{2} - 10(1-x) + 1 \\
 & \left(\frac{35(1-y)^4}{8} - \frac{35(1-y)^3}{2} + \frac{45(1-y)^2}{2} - 10(1-y) + 1 \right) / 2 \\
 & + \left(7 \left(-\frac{5(1-x)^3}{2} + \frac{15(1-x)^2}{2} - 6(1-x) + 1 \right) \right. \\
 & \left. - \left(-\frac{5(1-y)^3}{2} + \frac{15(1-y)^2}{2} - 6(1-y) + 1 \right) \right) / 2 \\
 & + \frac{5 \left(\frac{3(1-x)^2}{2} - 3(1-x) + 1 \right) \left(\frac{3(1-y)^2}{2} - 3(1-y) + 1 \right)}{2} \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{88179(1-x)^{11}}{256} + \frac{969969(1-x)^{10}}{256} \right. \\
 & - \frac{1154725(1-x)^9}{64} + \frac{6235515(1-x)^8}{128} - \frac{328185(1-x)^7}{4} \\
 & \left. + \frac{357357(1-x)^6}{4} - 63063(1-x)^5 + \frac{225225(1-x)^4}{8} \right. \\
 & \left. - \frac{15015(1-x)^3}{2} + \frac{2145(1-x)^2}{2} - 66(1-x) + 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{46189 (1-y)^{10}}{256} - \frac{230945 (1-y)^9}{128} + \frac{984555 (1-y)^8}{128} \right. \\
& - \frac{36465 (1-y)^7}{2} + \frac{105105 (1-y)^6}{4} - \frac{189189 (1-y)^5}{8} \\
& + \frac{105105 (1-y)^4}{8} - 4290 (1-y)^3 + \frac{1485 (1-y)^2}{2} - 55 (1-y) \\
& \left. + 1 \right) / 2 - (\text{sqrt}(21) \text{sqrt}(23) \left(\frac{46189 (1-x)^{10}}{256} - \frac{230945 (1-x)^9}{128} \right. \\
& + \frac{984555 (1-x)^8}{128} - \frac{36465 (1-x)^7}{2} + \frac{105105 (1-x)^6}{4} \\
& - \frac{189189 (1-x)^5}{8} + \frac{105105 (1-x)^4}{8} - 4290 (1-x)^3 \\
& \left. + \frac{1485 (1-x)^2}{2} - 55 (1-x) + 1 \right) \\
& \left(\frac{88179 (1-y)^{11}}{256} + \frac{969969 (1-y)^{10}}{256} - \frac{1154725 (1-y)^9}{64} \right. \\
& + \frac{6235515 (1-y)^8}{128} - \frac{328185 (1-y)^7}{4} + \frac{357357 (1-y)^6}{4} \\
& \left. - 63063 (1-y)^5 + \frac{225225 (1-y)^4}{4} - \frac{15015 (1-y)^3}{4} \right)
\end{aligned}$$

```

      8      2
      2
      2145 (1 - y)
+ ----- - 66 (1 - y) + 1))/2)
      2
(%i17)          ratsimp(%)
              11
(%o17) -----
          sqrt(21) sqrt(23)

(%i18)  for i thru 10 do print(ratsimp(HD(i)))
      2
-----
sqrt(3) sqrt(5)
      3
-----
sqrt(5) sqrt(7)
      4
-----
3 sqrt(7)
      5
-----
3 sqrt(11)
      6
-----
sqrt(11) sqrt(13)
...

```