

## GeoGebra で数学実験は可能か？

北海道工業大学 佐藤宏一  
Hokkaido Institute of Technology

### 1. はじめに

#### 1.1 eContents

数学教育に使用する e-Learning 用教材を作成している。eContents は eBook と ePaper の 2 つからなる。前者はマルチメディアの特徴を活かしたムービーである。ガリレイが著した『天文対話』に倣って eDialogue にする。後者は数学の問題用紙である。赤ペンを入れて学生に返却できる、またはこれと同等の機能を持つように考慮する。添削された問題用紙から学生はより多くのことを学ぶことができる。

#### 1.2 GeoGebra

Interactive Geometry Software を調査中に見出したフリーソフトウェアである。開発者は Markus Hohenwarter, オーストリア人である。Dynamic Geometry Software と Computer Algebra System の機能を併せもつという。数式オブジェクトはシンボリックな表示, 併せて可視化可能なオブジェクトはグラフィカル・アイコニックな表示を行うという。ヨーロッパ諸国から 9 つの受賞歴をもっている。メニューはマルチリンガル対応となっており, 34 言語に切り替えて使用できた。メニューには日本語がなかったので, 筆者らの研究グループで日本語を加えた。

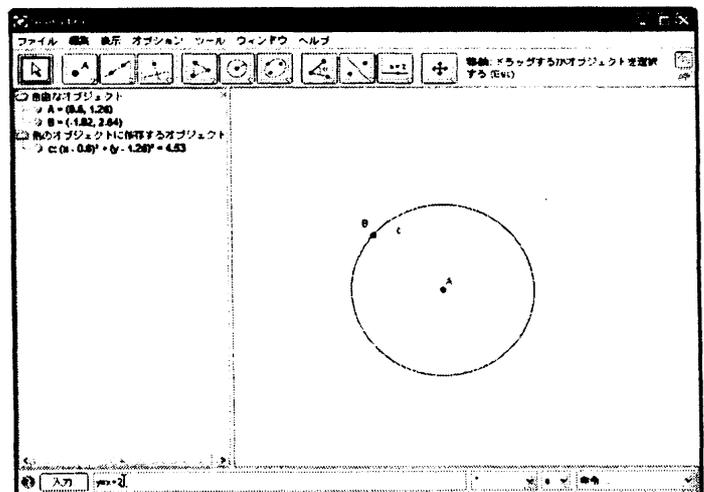
#### 1.3 本論考の位置

GeoGebra がもつ各種の機能を e-Learning および eContents 作成の観点から調査し, その結果を報告する。調査にあつては GeoGebra 3.0 日本語 (Windows 版) およびその上位版である開発者版を使用した。

### 2. Look & Feel

#### 2.1 Bidirectional Combination

GeoGebra の入力ウィンドウは, 数式ウィンドウ (Algebra Window) とドローイングパッド (Drawing Pad), そして入力欄 (Input Field) からなる。数式オブジェクトは入力欄から, 図形オブジェクトは各種図形作成ツールを使用して直接ドローイングパッドに入れる。入力されたオブジェクトは, 数式ウィンドウにはシンボリックな表示, ドローイングパッドにはグラフィカル・アイコニックな表示で行われる。ドローイングパッド上にある点, 多角形の辺, 半直線と直線は, 数式ウィンドウにはそれぞれ 1 組の座標, 辺の長さ, 方程式として表示される (右図)。

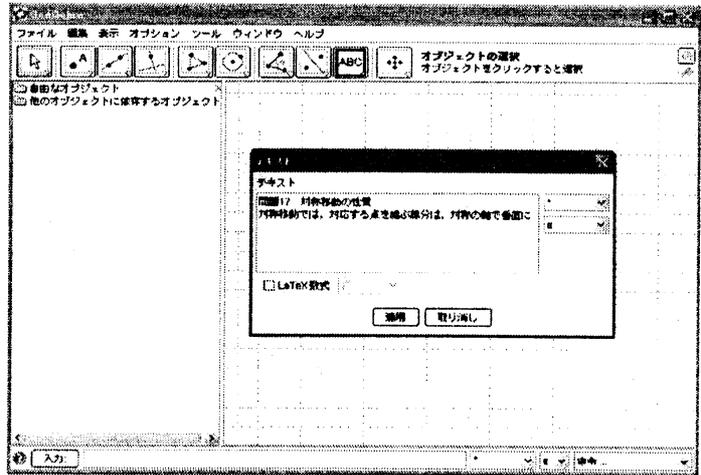


GeoGebra がもつ優れた機能として Bidirectional Combination を挙げておく。 [中

心と円周上の1点で決まる円]ツールを用いてドローイングパッドに円を描くと、数式ウィンドウには円の方程式が表示される。数式ウィンドウに表示されている円周上の点の座標をキーボードで修正すると、すぐにドローイングパッドの円が再描画されていく。Geometry SoftwareとComputer Algebraの両機能を併せもっている。

## 2.2 ドローイングパッド

ドローイングパッドがもつテキストや数式の表示能力は強力である。[テキストの挿入]ツールをクリックしてテキストボックスを開き、これにテキストや数式を入力することにより、ドローイングパッドの任意の場所に表示できる。テキストやダイナミックテキストや数式はもちろん、より高次の数式表示のためにLaTeX形式による入力も可能となっている(右図)。

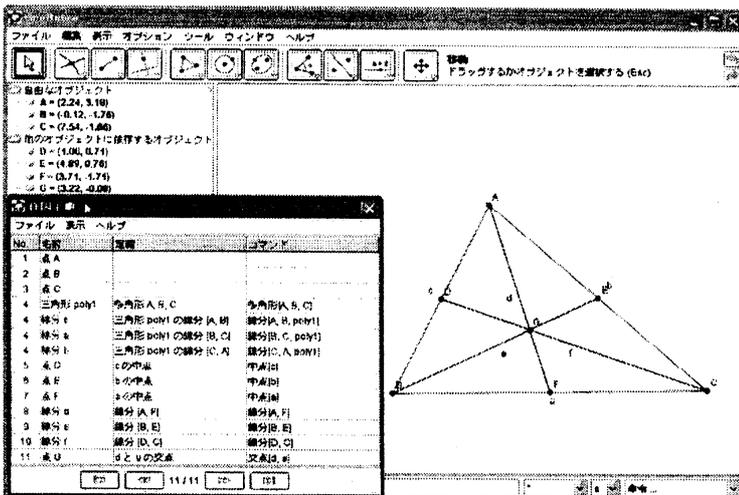


テキスト属性の変更は、テキストのプロパティボックスを開き、タブメニューからフォント、大きさ、色などを選択して行う。グラフの描画に必要な座標軸については、[オプション]メニューからドローイングパッドの属性ボックスを開き、軸表示、目盛表示を変更していく。ツールバーには、[ドローイングパッドの移動]ツール、[ズームイン]ツール、[ズームアウト]ツールなどの図形を整える仕組みもある。

ドローイングパッドには、数学を記述するのに必要な知識、つまり、文、数式、グラフ、図形という身分の異なるものすべてを混在表示できる。

## 2.3 作図手順 (Construction Protocol)

表示メニューには作図手順 (Construction Protocol) と作図手順ナビゲーションバー (Navigation bar for construction steps) が含まれている。



表示メニューから作図手順を選択すると、ドローイングパッド上に作図手順のフローティング・ウィンドウが表示される。このウィンドウは、作図に使用したすべての数学オブジェクトを、その配置した順に上から並べてテーブルにしたものである。テーブルの列セルには、数学オブジェクトごとに、その定義、コマンド名、代数式などの情報が記載されている。作図工程の履歴表である(左図)。

この作図手順ウィンドウに表示されている情報は、HTML ページにエクスポートすることも(画像の有無を指定可能)、作図ステップのサマリーだけを印刷することも可能である。

作図手順ナビゲーションバーを選択すると、ドローイングパッドの底部にムービープレイヤーのボタンをいくつか含むコントロールバーが現れる。ボタンをクリックするこ

とで、作図した工程を、1ステップごとを進める、戻す、さらに最初から通して表示することも可能である。作図工程を再現するプレーバック・プレーヤーである。

## 2.4 ツールバー

### 2.4.1 ツール類

ツールバーはドロップダウン・メニューになっている。これに各種のオブジェクト作成ツール、対称操作ツール、計測ツール、図形を整えるツールが格納されている。

オブジェクト作成ツールを使用して、点、直線のような基本オブジェクト、半直線、線分、円や正多角形などのオブジェクト、オブジェクトたちの「相互作用」で規定されるオブジェクト（交点）、複数のオブジェクトと幾つかの関係を保持し続けるオブジェクト（平行線、垂直線など）を作成できる。

対称操作ツールに格納されているツールを選択して、オブジェクトに平行移動、回転、鏡映などの各操作を施すことができる。計測ツールを使用すると、オブジェクトが作る角度、オブジェクト間の距離/長さ、図形の面積、直線の傾きを計測できる。

### 2.4.2 点オブジェクト

オブジェクトを作成するには、必要な作成ツールを使用してオブジェクトをドロワーパッドに置いていく。作成されたオブジェクトは、点や線分や曲線などのオブジェクトの組み合わせによって表示されるが、このオブジェクトに含まれる点オブジェクトは、既存のオブジェクトとの「親族関係」により、3色の異なった色に塗り分けられる。自由点は青色、半自由点（例えば直線オブジェクト上にある点）は淡青色（数式ウインドウの半自由点の表示も淡青色である）、従属点は黒色である。

ツールバーの左端に[移動 (Move)]ツールがある。オブジェクトをつかんで動かすツールである。これで自由点をつかんであらゆる方向に動かすことができる。半自由点もつかむことができ、親オブジェクト上を動かすことができる。しかし、従属点をつかむことはできるが動かすことはできない。

従属点を動かすには、従属点と親族関係にあるオブジェクトを動かすことが必要である。この場合、従属点は、親族オブジェクトに加える「力」の作用点とその方向、そして親族関係によって定まる方向へ、計算された速さをもって動いていく。

### 2.4.3 オブジェクトと数学実験

一つの線分の端点をつかんで移動ツールで動かすと、線分はまるでゴム紐のように伸びるし、また逆に縮めることもできる（ゴム紐では不可能）。上手に行うと、他の端点を中心とする円を描くように動かすこともできる。線分の端点以外の部分をつかんで動かすと平行移動する。まるで孫悟空の「如意棒」を扱っているようである。

ドロワーパッドに点Aを頂点とする三角形ABCを描く。3つの中線を引き、この中線から2つの交点G1, G2を作ると、両者は1つの点G（重心）に重なる。移動ツールで頂点Aをつかんで水平方向に「力」を加えると、鋭角三角形から鈍角三角形まで変形するが、3つの中線は1点Gで交わり続けている（点Gの位置座標は刻々と値を変える）。

「三角形の3つの中線は1点で交わる」という命題は、中等教育の数学教科書に定理として述べられている。すべての三角形について成り立つことが要求される一般命題である。ドロワーパッド上の3中線と重心の動きは、この一般命題を観察という行為で確認している。命題を「確認できた」という驚きは、知的興味を引き起こす源泉となる。

科学理論における法則は実験観察によって確認・反証することができる。法則は普

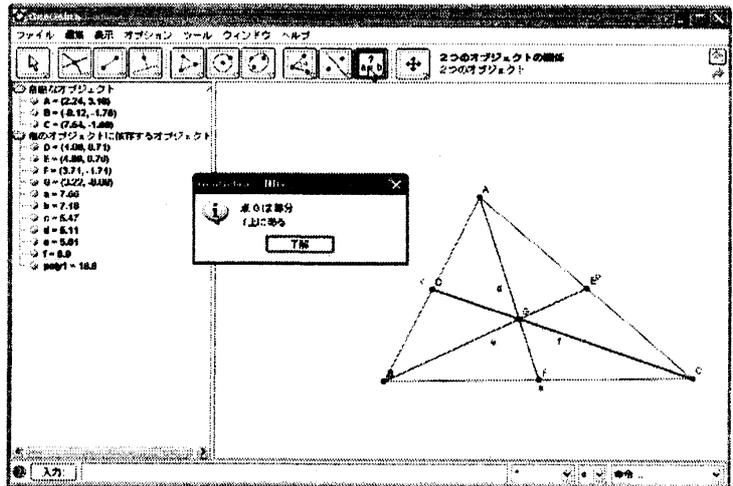
遍命題，実験観察データは単称命題である．有限個の単称命題（実験観察データ）による確証により，普遍命題（法則）を真とすることはできない．単称命題が普遍命題を反証したとき普遍命題を偽とすることができる．反証を意図する実験観察に耐え抜いた仮説が「法則」という名称を獲得していく．

GeoGebraの各オブジェクトは一つの数学構造体に属すると考えられる．これらのオブジェクトで構成された図形もその数学構造を内に秘めているだろう．各オブジェクトはその数学構造に準拠した振る舞いを行う．だから図形に属する自由オブジェクトを動かし，各オブジェクトの振る舞いを観察することにより，その図形に秘められている潜在的な性質（オブジェクト間の幾何学関係）を発見することができる．

以下の手続を踏んで数学実験を行うことができる．まずオブジェクトを数学実験装置用に組み上げる．なかに必ず観察するターゲット・オブジェクトを含めること．実験装置を構成する自由オブジェクトに「力」を加えて動かし，ターゲットである従属オブジェクトの振る舞いをよく観察する．場合によっては，次項で取り上げる[2つのオブジェクトの関係]ツールを使用する．観察結果を判断して実験を終了する．

#### 2.4.4 [2つのオブジェクトの関係]ツール

興味を引くものに [2つのオブジェクトの関係] ツールがある．2つのオブジェクトの関係を関係ダイアログに表示する．三角形の重心の例において，3つの中線が1点で交わることを確認するのに使用できる．中線  $d$  と中線  $e$  との交点を  $G$  とする．GeoGebraに交点  $G$  ともう1つの中線  $f$  の関係を尋ねる．関係ダイアログに「点  $G$  は線分  $f$  上にある」というメッセージを返す．点  $G$  が中線  $f$  上にあるのは偶然ではなく，必然であると明言している（右図）．



このツールは数学実験に欠くことのできない「関係検出器」である．

数学実験のテーマはすべて2つ以上のオブジェクトの関係を問うものである．図形オブジェクトは可視化されているので各オブジェクトは見える，しかし2つのオブジェクトの関係までは見えない．つまり，2つのオブジェクトが「平行にある」という幾何学関係まで正しく判断できない．2つのオブジェクトの関係を厳密に知りたいときは，「2つのオブジェクトの関係」ツールを使用しなければならない．

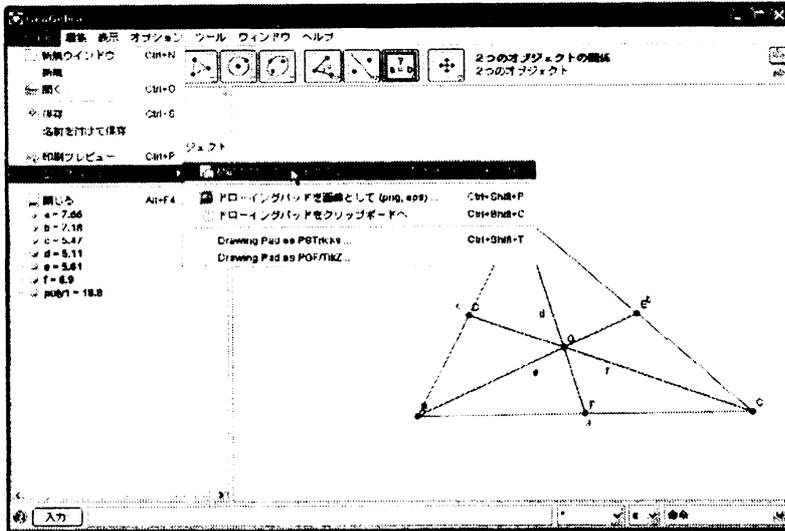
#### 2.5 エクスポート機能

GeoGebraで作成した図形については，エクスポート用に様々なオプションメニューが用意されている（GeoGebra 3.1.39.0）．以下の通りである．

- ・ [動的なワークシートをウェブページとして(html)...]
- ・ [ドローイングパッドを画像として(png, eps)...]
- ・ [ドローイングパッドをクリップボードへ]
- ・ [Drawing Pad as PSTricks...]
- ・ [Drawing Pad as PGF/TikZ...].

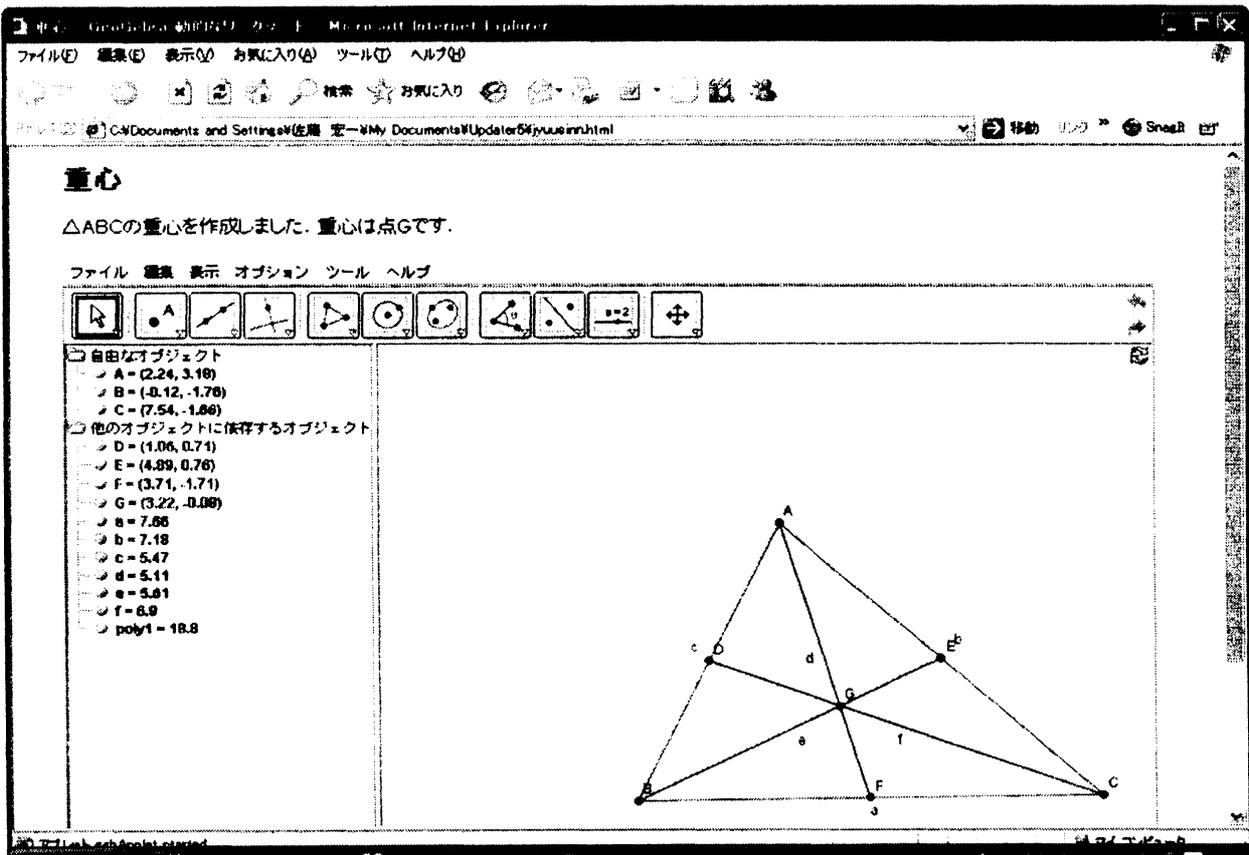
### 2.5.1 [動的なワークシーをウェブページとして(html)...]

このメニューは GeoGebra のドローイングパッドの図形ばかりでなく、構成データも含めてすべてを HTML ファイルにエクスポートする機能である (左図)。図形の表示と各種の操作を行う Java アプレット・ファイルも作成される。このアプレットにはアプリケーション本体と同等の機能が装備されているが、図形の各種操作といったアプレット固有の機能については、HTML ページ上で使用するかしないかの設定が行える。



GeoGebra のファイルをダイナミックワークシートとしてエクスポートし、作成したファイル

を Microsoft Internet Explorer で開いた画面を下に示す (下図)。



ブラウザのウインドウに GeoGebra 本体が埋め込まれている。GeoGebra のメニューバー、ツールバーが含まれており、すべてのメニュー、ツールが使用可能となっている。作成した数学問題をエクスポートし、教師側の HTML サーバーにアップロードしておく、と、学生はインターネット越しにアクセスして問題を解くことができる。遠隔地に教材を配信する場合、絶対に欠かすことのできない優れた機能である。

### 2.5.2 ドローイングパッドを画像として(png, eps)

ドローイングパッドの画面を通常の画像ファイルとしてエクスポートする機能である。メニューから[エクスポート：ドローイングパッド]ボックスを開き，ここからフォーマットごとに画像のサイズや画質を設定する。画像フォーマットは以下の通り。

- ・png (Portable Network Graphics)
- ・pdf (Portable Document Format)
- ・eps (Encapsulated Postscript)
- ・svg (Scaleable Vector Graphics)
- ・emf (Enhanced Metafile)

## 3. GeoGebra の調査結果

### 3.1 ePaper として

ドローイングパッドには，数学の記述に必要なすべてのもの，文，数式，グラフ，図形という身分の異なる知識すべてを表示できる。学生に配布する問題用紙として使用できる。解答に使用したすべてのオブジェクトの履歴を作図手順として残しているので，解答プロセスを正しく辿ることができる。オブジェクトの作成順序が厳密に問われる作図問題においてはさらに有効であろう。作図手順ナビゲーションバーを利用すると作図プロセスをプレーバックでき，添削の作業も迅速に進む。作図に必要なツールをカスタマイズしてツールバーに格納する機能もある。赤ペンを入れて返却する ePaper として使用できる。

### 3.2 “experimental learning for mathematics” について

GeoGebra を使用した数学実験として，幾何学関係をもつオブジェクトを見つけ出し，その関係を確証することができる。厳密に確証するには [2つのオブジェクトの関係] ツールを使用する。これらの仕組みを使用して，数学実験のデモンストレーション・ムービーを eDialogue として作成できる。

### 3.3 軌跡について

[軌跡] ツールを使用して軌跡を描くことができる。軌跡の駆動点は淡青色の半自由点であり，軌跡を描く点は関係をもつ従属点である。マニュアルで軌跡を描くこともできる。従属点をマウスで右クリックしてプロパティボックスを開き，基本タブから残像表示のボタンにチェックをいれるとよい。マウスで親オブジェクト上の半自由点を動かすと，従属点の残像が軌跡として残る。駆動点の動きを細密に行うには，ツールバーから[スライダー]ツールを使用するとよい。

### 3.4 教材の配信について

遠隔地の学生に ePaper を配信するならば，GeoGebra ファイルを Dynamic worksheet にエクスポートして Web サーバーに載せるだけでよい。学生はインターネット越しにこれにアクセスすることができる。簡単に幾何学の問題を配信可能である。

## 4. 参考文献

[1] Geogebra 公式サイト

<http://www.geogebra.org/cms/>

[2] シンデレラ-幾何学のためのグラフィックス，J.リヒター-ゲバート，U.H.コルテンカンブ著，阿原一志訳，シュプリンガー・フェアラク東京

[3] シンデレラで学ぶ平面幾何学，阿原一志著，シュプリンガー・フェアラク東京

[4] 6カ年教育をサポートする体系数学Ⅰ幾何編，岡部恒治編，数研出版株式会社

[5] 6カ年教育をサポートする体系数学Ⅱ幾何編，岡部恒治編，数研出版株式会社