

18世紀における流体力学研究と弾道決定問題

Hydromechanics Study and the Determination of Ballistic Trajectory in the 18th Century

日本学術振興会特別研究員 PD(大阪大学) 但馬 亨 (Toru Tajima)

J.S.P.S. Research Fellow P.D.

Osaka Univ.

1. はじめに

本研究で扱うのは、砲弾の軌跡すなわち弾道の決定に関して18世紀の科学者が行った諸研究である。これらの研究を総じて弾道学(ballistics)という語で今日的には表記するが、そもそもこの学問の特質ともいうべき点について触れておく必要がある。弾道学とは、広義ではまさに上記のように弾道予測を行うものであるが、その内実に関しては現在三種に区分されている。すなわち、砲内弾道学(internal ballistics)、砲外弾道学(external ballistics)、そして終末弾道学(terminal ballistics)である。まず砲内弾道学は砲内で弾丸の火薬が点火され、生じたガス状の爆発流体が弾頭を砲塔内でいかに前進させるかについて扱う分野を指す。これは引き続き生じる砲塔外の弾道挙動の予測に関しても重要な初期条件を与えるものであるが、それに留まらず多数の弾道射出後の砲塔耐久性や打ち出す際の火薬の成分に関する化学的研究にも関連する領域といえる。そして、第二の砲外弾道学は先の初期条件をもとに、弾頭の砲塔外領域への脱出後の経路・速度・着弾地点・射程距離等の情報を決定するための研究であり、弾道学研究の主軸を担うものである。最後の終末弾道学に関しては、着弾後の対象への影響(破壊の程度、様態等)に関して研究する分野であり、弾道予測の問題そのものとは関係性が薄い。むしろ、マンハッタン計画以降の大陸間を巡航できる原子核爆弾を搭載したミサイル兵器の実践配備という未曾有の大量殺戮兵器開発競争をみた20世紀後半の冷戦構造からその重要性を増したという特異な事情から、本論では考察対象としては扱わない。

さて、本研究で示す18世紀の弾道学研究の歴史的意義を整理すると以下のようにまとめられるであろう。

(1)「ニュートンの力学」とその解析化

(2)18世紀半ばに興隆した解析力学の軍事的応用

(3)総合的研究領域(流体力学, 微分方程式論, 航空工学, 材料工学, 実験化学)の萌芽

(4)プロイセン拡張期における科学技術研究のヨーロッパ域内での政治的意味

まず、(1)は18世紀の物理学史・数学史において[Hankins 1970]や[Fraser 1996]等の研究が明らかにしているように、ニュートン自身がプリンキピアで記述した古典力学の体系を後代の学者が整理し、いわゆる解析学の言葉で書きなおした歴史的経緯を踏まえて、その重要性を帯びるものである。

(2)はこの啓蒙の世紀とも呼ばれる18世紀を席捲した科学技術的知識の体系であるニュートン力学(ニュートンそのものの力学とは区別している点には留意)がその発展の端緒から軍事目的に応用されたという事実は科学技術社会論的な問題関心から理解される必要性を喚起するものである。

(3)は先に説明したように、弾道学自体がニュートン力学を中核に据えるものの、様々な他の科学技術領域からの相互参照のメカニズムから発展したという、際立って学際性の高い領域であることを踏まえて理解される必要がある。

るというものであり、この了解は航空宇宙工学のようにやがて分化・自立化を果たした学問の原初の形態を詳らかにするという点でも重要であろう。

最後の(4)に関しては、科学者の政治への関わりという問題として、一般の数学史の域を超え、政治史や西洋史全般の問題に接続される問題である。当時の新興国家であるプロイセンは若き日のフリードリヒ2世(大王)を指導者として迎えた段階から国家存続に関する幾多の障害を抱えていた。オーストリア継承戦争や7年戦争への対処がその例である。これらの難局を乗り越えるために、国王は軍隊の近代化という実際的問題に携わった。この問題の処遇には、改修されたばかりのベルリン科学アカデミーに属するレオンハルト・オイラーの研究の貢献を踏まえるべきであり、たとえば一般的な科学技術社会論よりもさらに広い文脈、すなわち国際政治史等から理解されるべき問題を内包している。こうした意義をもつ弾道学史研究であるが、以下では18世紀以前の状況からまずは紐解いていきたい。

2. 『弾道学』前史

まず、16世紀初頭のタルタリア(Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557)の『新科学』(*Scientia Nova*, 1537)がその嚆矢となった近代弾道学は、17世紀の前半のガリレオ以降の一連の研究によって投射体運動論の議論と密接に関係しつつ、その各部の様相を整えていくことになる。代表的な研究を挙げると以下の4点になるであろう。

(1) ガリレオ『新科学対話』(*DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE ATTESENTI ALLA MECCANICA & I MOVIMENTI LOCALI*, 1638), 第4日目: 投射体運動論の完成 (運動の水平・垂直方向への分解, パラボラ軌道の理解)

(2) ニュートン『自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)』(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687) 第2巻1, 2章: 投射体運動論に空気抵抗を加味する例。

(3) ホイヘンス『重力の原因についての試論』(*Tractatio de causa gravitationis*, 1690)

最終補遺「抵抗する媒質において、落下もしくは投射される重さのある物体の運動について(Du mouvement des corps pesants qui tombent, ou qui sont jettez, dans un milieu qui resiste)」（高速で射出された物体の描く軌道はパラボラを逆に描かなくなるという予想)

(4) ヨハン・ベルヌーイ「ライプツィヒの『学術紀要』誌における匿名の挑発への返答」(*Responsio ad nonnemini provocationem* 'in *Acta Eruditorum Lipsiae*, 1719) (ニュートン主義者への反駁と空気抵抗の定式化)

先の三つは比較的知られている事項だが、最後のベルヌーイによる返答論文については、もう少し説明を加えておきたい。ベルヌーイは初版『プリンキピア』第2巻1節, 2節における高速投射体の軌道計算に関する臆謬の指摘を初版の入手後まもなく行っていた。これは第2版(1713)で訂正されるものの、それまで『プリンキピア』擁護のオックスフォード大学教授ジョン・キール(John Kiel, 1671-1721)等、熱烈なニュートン主義者からさまざまな逆質問を受ける。ニュートン派對ライプニッツ派というよく知られた構図での議論のため詳細は省くが、この反論でまずキールを「名前をつけるにも値しない侵略者」(巻末資料1参照)と叱責した後、ベルヌーイは高速移動物体の空気抵抗の定式化の試みていてこの点が重要である。ここでの結論として、抵抗をR, 速度をvとすると、 $2R=v^2n$ という関係が

成り立つことが予言された。ここでの n については注意が必要で、これは亜音速と超音速以上で変動する係数であり、この係数の決定に 18 世紀後半の弾道学は多大な労力を費やした。まとめとして、17 世紀末の段階ですでに単純なパラボラ軌道は高速投射体には応用できないという事実により多くの研究者が気づきはじめたといえよう。

3. ロビンズ版『弾道学新原理』(1742) —ベンジャミン・ロビンズと新弾道学研究

さて、ここから 18 世紀に起きた弾道学研究の革命的進展を推進した、一人の技術者を紹介しなければならない。彼は一般的な科学史研究の枠内ではこれまで比較的目的立つ存在ではなかったが、こと弾道学史に関しては不可避である。その名はベンジャミン・ロビンズ(Benjamin Robins, 1707-1751)である。英国バース出身の数学者、築城技術者、砲術家であり 44 歳の若さで他界したが、東インド会社所属の総合技師としても多大な貢献を母国にした。流率法に関する解説を書いているように彼自身熱烈なニュートン主義者であった。残した著作は多くはないが、その中で代表作とされるのは、『弾道学新原理』(New principles of Gunnery, 1742) というテキストである。この著作の注目点として、以下の5つが挙げられる。

- ・『プリンキピア』(1-7. 命題 39, 巻末資料2参照)の抵抗媒体内における運動物体に関する理論の応用・改良。
- ・弾丸が亜音速以上に達した際の弾道学を砲内と砲外に区分したこと。
- ・実験器具「弾道振り子」(Ballistic Pendulum, 図1参照)を考案したことによる精密な初速度の測定。
- ・空気柱(air column)と呼ばれる概念の導入による、空気抵抗の定量的分析の端緒を築いたこと。
- ・抵抗媒質を移動中の運動物体の低速と高速(1700ft/s.以上)時、それぞれの抵抗係数を区分したこと。

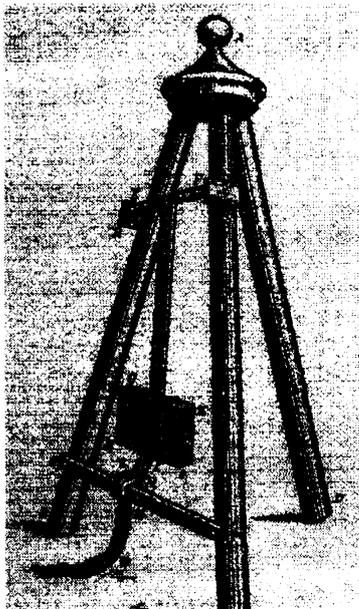


図1：弾道振り子

主として強調すべきはこの5点であるが、19 世紀の当該分野の研究との連続性という点からは、他にも独創的なアイデアが幾つか挙げられる。たとえば、19 世紀ドイツの物理学者 Heinrich G. Magnus(1802-1870)が考察したマグヌス効果、すなわち回転する円柱・球体が回転軸と直角方向に進むときに発生する力の問題はまだ明言化されていなかった。しかし、ロビンズはすでにこの問題に『弾道学新原理』で着目していたことから、英国では Robins-Magnus Effect として、航空力学の教科書に記載されているほどである。総じて亜音速ならびに超音速飛行時の運動物体には、18 世紀の流体力学上の知識を遙かに超える難問がこのほかにも多く潜んでおり、流体のオイラー方程式に粘性項が含まれていないこと、ダランベールのパラドクスの解決が果たされていないこと等からも、この問題の困難性が垣間見られよう。こうした困難な諸問題の先頭に立ったという点でもロビンズの功績は大いに評価されるべきである。

ただし、数学的洗練性からも解析力学の完成という点からもあるいは 18 世紀前半という時代状況の英国という地政学的限定からも、ロビンズの限界がみられる。次ページの図2は第1章第7命題に付加されたもの(命題の内容は付録2)だ

が、ここにはロビンズ著作の性質とそれに伴う限界が象徴的に表れている。これは弾頭が爆発の瞬間からその圧力（ひいては速度）を砲塔内で減少させる様子を二次曲線で表したものだが、このようにロビンズ著作の性質は、

- ・ギリシャ数学以来の比例論・幾何学的解法の墨守。
- ・ライプニッツ流の代数解析的表現を排除。

の2点で表され、18世紀半ばの力学の解析学化という文脈ではむしろ何の貢献も認められない。

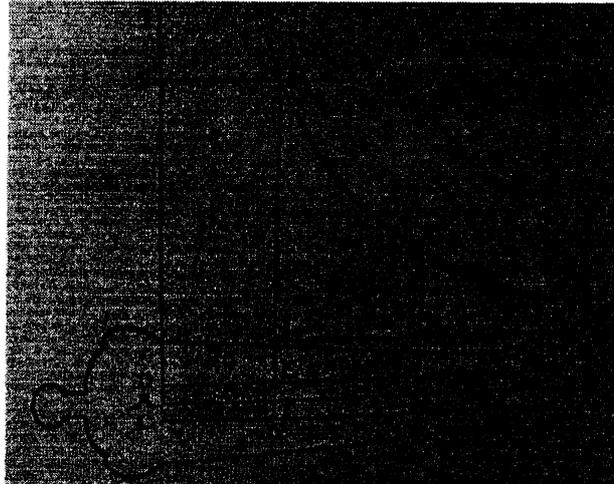


図2：第1章命題7

さらにいえば、この2者はまさにコインの裏表である。前者は、『プリンキピア』の類まれな成功と裏腹に英国の数学界が失った問題として数学の通史上よく取り上げられる。すなわちニュートンを17世紀末の自然哲学最大の成功者として称える考えが英国に限って、きわめて強く浸透し、このいわばニュートン信仰がライプニッツ流の新記号法を伴う大陸式の無限小解析学の導入を頑なに拒絶したという一連の数学史的過程である。その痕跡はこの著作においても確認でき、たとえば微分方程式は作図(construction)という古典的手法によって解かれる。このことはロピタル、ヨハン・ベルヌーイを経た、大陸式の無限小解析学が操作体系としての洗練性をさらに高め、同時代人のオイラーに至って図形やグラフの考察からは完全に独立した関数概念(解析的表示式)の操作という段階まで達したのと完全に対照的である。

大陸式方法の柔軟な「操作性」の問題はさらにロビンズの独創である砲内弾道学の領域においても陰となった。もともと「内側」の問題は、砲塔外の空気抵抗・重力加速度・発射時の天候状況等を考慮した弾道変化の処理というより困難な問題は考慮しなくてよいので基本的諸情報(速度、射程、軌道)の決定は比較的容易である。とはいえ、扱うべきパラメーターとして、砲弾の重量、火薬量、推進部分の砲弾全体との比率、砲塔内での爆発流体の挙動等があり、解析学的処理を行う上で十分な複雑性をもっていた。これらの諸要素を加味すると、たとえ砲塔内の挙動に限定しても、作図によって解ける範疇ではない微分方程式の処理という問題に突き当たり、ロビンズの数学的技巧では理論的深化は望めなくなった。そこで、研究の進展は大陸式の無限小解析学につうじて、近似的な微分方程式の解法に卓越した才能をもった偉大な数学者の介入を必要としたのである。

3. オイラーによる翻訳・注釈の開始(1744年)

さて、このように抵抗媒質中の高速物体にかかる抵抗の変化に着眼したロビンズであったが、その著作の反響は大きく、当代一流の数学者レオンハルト・オイラー(Leonhard Euler, 1707-1783)によって注目を即座に受けることになる。オイラーによる研究開始の時期はベルリン滞在期(1741-1766)と重なっており、この業績は政治的な意味合いを強く含んだものだった。啓蒙専制君主としても知られるフリードリヒ2世によって辺境の小国に過ぎなかったプロイセンは軍事・文化・政治のヨーロッパにおける一流国への脱皮をまさにこの時期図ろうとしていた。この国王と直接の面識をもち、請われてペテルスブルクより移住してきたオイラーは大規模な改装を果たしたベルリン王立科学アカデミーの数学部長という要職に着き、プロイセンの富国強兵という一大問題にもその数学的天才を生かすことを期待された。着任当時はまさに第1次シュレジェン戦争(1740-42)をプロイセン軍は終えており、実践的で有効な第1級の砲術書の作成を求められていたのである。そのことは、オイラーの秘書を勤めたニコラス・フス(Nicolaus Fuss, 1755-1825)による『オイラー氏へ賛辞』(*Lobrede auf Herrn Leonhard Euler*, 1783)でも証言されている。

こうした背景を経て、ロビンズの英語版の著作は分析され、翻訳・注釈作成をきわめて短期間のうちにオイラーにより受けた。こうして『弾道学新原理』(*Neue Grundsätze der Artillerie*, 1745)[Euler 1745]はドイツ語の著作として増補・改訂された。

それでは実際にこの著作の構成はどうなっていたのであろうか。注釈書いたように、この著作は単なる翻訳の域を超えたものである。その構成について、邦訳を付録にしているので参照されたい。命題は部分はロビンズ自身によるものである。これに付随する形で注とされる部分が連続している。これは系や補題に相当するものであり、ロビンズのもともとの記述にはない部分である。オイラー流、すなわち大陸式の記号法による解析学による書き換えが積極的に展開され、ほとんど別物の著作となっている。ちなみに注釈の量は、全集版と原著の比較では約4倍にも達している。

全集版で400頁を超えるその内容について、すべてを見ていくことは不可能なので、オイラーがなした興味深い書き換えのいくつかをここでは紹介するにとどめたい。第1巻第6命題でオイラーが付加した注釈はこの著作でのオイラーの技巧の本質的性質をよく表している。オイラーの関心はここでは砲外弾道学の問題であり、発射角の射程への関係を理解するために弾丸の落下距離について分析がなされている。

基本的なオイラーの分析はつねにより簡単な現象を方程式で表される一つのモデルに還元し、その複合からより込み入った運動を記述するという方法で一貫している。この第6命題についての注釈もその一例である。まず彼は水平射撃を分析し、この種の射撃のもつ興味深い特徴を取り上げている。というのはこの水平射撃の軌道にははっきりとした曲率を見いだすことができないからである。同種の弾丸を前提とすると、弾道は鉛直面を描くように見える。弾道のほとんど直線のように見える水平成分について、オイラーは以下の定式化を行っている。(Euler 1745; *EOO* II 14. P.366.)

$$y = \frac{x^2}{4b} + \frac{3(b+h)x^3}{32ncbh}$$

ここで、 b は発射速度 \sqrt{b} に対応した落下高度、 h は定数 28845 フィート、 c は弾丸の直径、 n は弾丸と空気の比重。ここから、この速度での落下高度が算出される。

$$v = b - \frac{3b(b+h)x}{4nc} + \frac{9b(b+h)(2b+h)x^2}{32n^2c^2h^2}.$$

この結果から同命題の第3注釈が展開される。これは、先にモデル化された水平射撃に仰角の変数を付加するもの、すなわち傾斜射撃のモデル化であり、オイラーの計算の妙によって、媒介変数表示による弾道の直行座標上の表示が得られる。Xを水平距離、 Φ を発射角、A,B,Cをある定数とすると、

$$\begin{aligned} x = & +a \tan \varphi + \frac{A}{\cos \varphi - B\varphi} + B \tan \varphi + \frac{C(1 + \cos \varphi^2)}{\cos \varphi} \\ & - a \tan \varphi - \frac{A}{\cos \varphi + B\varphi} - B \tan \varphi - \frac{C(1 + \cos \varphi^2)}{\cos \varphi} + \dots \end{aligned}$$

といった式が得られるが、これではまだまだ計算が困難であるので、これをさらにテーラー展開を行いより単純な形に整理し、結局最大射程を与える発射角 θ を、

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{b(b+h)}{8nch}$$

という式で与えている(Ibid, p.391).総じて、オイラーの解法はべき級数展開と三角関数の巧妙な変換によって極値を求めるもので、計算に熟達した現代の数学者にとっても計算の筋道を忠実に追うのは容易なことではない。したがって無論、解析計算から距離を置いていたロビンズには代替する計算方法があったように思えないため、オイラーの結果について彼を含め英国数学の文脈では十分な理解がなされなかった可能性が高い。むしろ、精密な実験的方法で弾道の初速度を測定したロビンズのデータを核に換骨奪胎して数学的定式化を完成させていったオイラーの数学的技巧の妙が伺われる。

この節の最後に、フランスでの同著作への反応について若干説明を加えておこう。19世紀はじめのナポレオン戦争にいたるまで、ヨーロッパ最大の陸軍力を擁していたフランスにおいても、優れた砲術書は必要とされていた。したがって、学術語としての地位をフランス語が確立していたこの時代において、学術用語としては未成熟なドイツ語からフランス語へのいわば逆引き翻訳がなされたという点は興味深い。ベルリン科学アカデミーの公用語そのものがフランス語であり、ドイツ語の使用を禁じていたフリードリッヒ大王の施政からするとこれは、いわば科学の文化的ねじれ現象であると言える。フランス語への翻訳は、1751年のロビンズ版(Jean-Baptiste Le Roy), 1783年のオイラー版,(Jean-Louis Lombard)と2つの版双方で完遂されている。

とくに後者の版の作成はルイ16世下の財務総監である重農主義者テュルゴー(Anne-Robert-Jacques Turgot, Baron de Laune, 1727-1781)により国王に進言された。このことから単に理論書として優れていただけでなく、実戦できわめて有効にこの著作は機能していたことが裏付けられる。いうなれば、単なる数学書・物理学書ではなく、この著作の理解は国民国家成立直前のヨーロッパ世界において国策的技術書の意味を持っていたのである。

4. まとめとして

18世紀に大きな改革を受けた流体力学、弾道学研究的概要をこうして振り返ってきた。弾道学研究のもつ科学的意義については、すでに冒頭で触れたが、またつぎのような角度から見ることで、また新たな歴史的価値を提供してくれる題材として浮上してくるであろう。

- (1). 理論的諸科学の実践的応用の過程で起こる内的変化
- (2). 英・大陸側の数学者双方の対話もしくは科学的知識伝播の断絶と継承
- (3). 国策的科学技術に携わる科学者の態度

国民国家形成後の世界, とりわけ 20 世紀の2つの世界大戦のように深く科学者が巨大な軍事科学技術と結びついていった事例は科学史的には枚挙に暇がないが, 逆にいわゆる近現代的な国民国家が形成される以前に科学者が軍事技術といかなるスタンスでかかわっていたか, というケーススタディは[Steele 2005]を除いてはほとんどなされていないように思われる。したがって, 純粋な学説史の分析に加えて, 政治的もしくは科学技術社会論的な面から分析を導入することは研究の新規性を与え, さらなる研究開拓の余地を多く残している。なお, この研究は平成 20 年度科学研究費補助金(課題番号 19-5568)の援助によって遂行されたものである。また同時に, 東京外国語大学の吉本秀之教授, フランス国立図書館・アンリ・ポワンカレ研究所図書館部の司書の方々の協力にも多くを依拠している。ここに感謝の辞を述べたい。

参考文献:

[Euler 1745] Leonhard Euler

Neue Grundsätze der Artillerie : aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins übersetzt und mit vielen Anmerkungen versehen : mit vier ballistischen Abhandlungen ; hrsg. von Friedrich Robert Scherrer (*Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae ; edenda curaverunt*, Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stackel ; ser. 2 . Opera mechanica et astronomica ; v. 14) , (Leipzig : B.G. Teubner), 1922.

[Euler 1753] Leonhard Euler, "Recherches sur la véritable courbe décrivent les corps jetées dans l'air, ou dans un autre fluide quelconque" *Mémoire des l'Académie de Berlin*, Tom. IX (1753)

[Fraser 1997] Craig G. Fraser. *Calculus and analytical mechanics in the Age of Enlightenment* Aldershot : Variorum, 1997.

[Hankins 1970] Thomas L. Hankins, *Jean d'Alembert : science and the enlightenment* Oxford: Clarendon Press, 1970.

[Steele 2005] Brett D. Steele, "Military "progress"" and Newtonian Science in the Age of Enlightenment' in *The heirs of Archimedes: science and the art of war through the age of Enlightenment*, eds. By Brett D. Steele and Tamera Dorland, pp.361-390 (Cambridge, Mass.: MIT Press), 2005.

資料1. "Quod itaque attinet ad Aggressorem nostrum, qui nominari non meretur, tulit ille aegerrime quosdam a me notatos errors in *Phil. Natur. Principiis NEWTONI*, quos in *Actis Lips.* Anni 1713 correxi" (*Johannis Bernoullii OPERA Omnia*, Tom. II, P. 394.)

(翻訳)すなわち, 名を与える価値のないような侵略者(キールを指す)に関連することだが, 彼は非常に嫌悪して, 1713 年のライブチヒ紀要で私が訂正され, ニュートンの自然哲学の(数学的)諸原理における私によって記された誤謬の問題について(中

略), 送付してきた。

資料2. ロビンズ版『弾道学新原理』第1章第7命題の改題

命題: 銃砲の容積, 弾丸の密度, その装填物の分量が与えられたとき, 弾丸が爆発から得る速度を, 着火された最初の瞬間に火薬の弾性を想定することによって, 決定すること。

略号と図形の意味: $D(x)$: 点 x での流体の密度, $S(x)$: 砲尾から点 x までの領域, $F(x)$: 点 x における弾丸の推進力, $A(ABCD)$: 各点 A, B, C, D によって囲まれる領域, v : 弾丸の速さ, $\text{Sub}(x:y)$: x, y の二乗比をとる操作, W : 弾丸重量, AB : 銃砲の軸, A : 砲尾, B : 砲口, DC : 砲腔の直径, $DEGC$: 火薬で満たされている空洞の一部, 弾丸は線分 GE の後部にある. 圧力は FB 方向. FB に垂直になるように FH を延長. AI は FH に平行. 点 H をとおって, IA, AB を漸近線とする双曲線 $KHNQ$ を描く。

弾丸と発射位置の距離に反比例する推進力。

FH が点 F における弾丸を推進する力を表すならば, 点 M における推進力は MN となり, 他の点も同様に双曲線の縦軸がその地点での推進力を表す. 物体を推進する流体が点 M まで膨張するときに, 以下の反比例の関係が成り立つ.
 $D(M):D(F)=S(F):S(M)=FA:MA=MN:EH$.

ここで, 第2命題の結果「弾性(流体の推進力)はその密度に比例する」から, FH が点 F における力を表すなら, MN は点 M における力を同様に表す。

点 F における力の絶対量は既知なので弾丸の重さも知られる. $F:W$ が分かる. この比で $FH:FL$ をとり, LP を FB に平行に引く. すると $MN:MR=F(M):W$.

すなわち, 線分 LP はすべての点で(弾丸の)重さの一樣な力に比例する線分を決定し, また同様に双曲線 HNQ は, すべての点で火薬の推進力に比例する縦軸を決定する。

ここで, ニュートン『プリンキピア』第1巻第39命題によると, $A(FLPB)$ と $A(FHQB)$ は, 空間 FB を通して自重から作用を受け, 同じ空間を火薬の力で弾丸が推進するとき, 弾丸が得る速度 v の二重[二乗]比になる. また $AF:AB, FH:FL$ の比は既知(1), 二重比(2)より $A(FLPB):A(FHQB)$ が得られる. そして, 線分 FB の大きさが与えられているので, (線分上を通過する弾丸の) v が知られる;

また, $v_x:v=\text{Sub}(A(FLPB):A(FHQB))$ となるような, 他の速さ v_x を求めよ. v_x は空間 FB 中を発射した火薬の作用によって推進するときに, 弾丸が得る v となる。

その後, 例題で計算: $AB=45$, $DC=3/4$, $AF=2\frac{5}{8}$ (Inches).

※二重比(Ratio of subduplicate)ユークリッド『原論』5巻定義9. 三つの量が比例するとき, 第一の量は第三の量に対して第二の量に対する比の二重の比を持つといわれる. cf. $a:b::b:c$ のとき, $a:c$ は $a:b$ の二重比である。

資料3. 『プリンキピア』第1巻第7章, 命題39: 物体の直線的上昇および下降について

任意の種類の向心力を仮定し, 曲線図形の求積法を認めて, まっすぐに上昇または降下する物体の各場所における速度ならび

に物体が任意の場所に達する時間を求めよ、またはその逆はどうか。

付録:『弾道学新原理』の構成について(オイラー全集からの翻訳)

『弾道学新原理』:ベンジャミン・ロビンズ氏の英語版から翻訳され、多数の注釈が付されている。

オイラーによる序文:

執筆者の報告もしくは要塞建築と大砲の、起源と受容に関する歴史的情報。

翻訳者(オイラーを指す)による注釈

ホイヘンス, ニュートン, ヨーハン, ダニエル・ベルヌーイ, ヘルマンの空気抵抗に関する研究についての指摘, ならびにヨハン・ベルヌーイ, パパン, ブラック, ダニエル・ベルヌーイの火薬の燃焼に関する研究の指摘。

第1章 火薬の力について

第1命題

空気中においても空気が抜かれた空間においても火薬に火が着けられる場合には、(火薬が)燃え上がることによって安定した・流体の・膨張力を伴った物質が生じる。

注:ロビンズ記述に対するオイラーの批判。

第2命題

空気中と空気が抜かれた空間との双方における火薬の突然の燃焼において、以前に報告されている二つの実験において観察される状況について、より詳細な説明が述べられている。

注:オイラーは、ロビンズの実験から、彼に従うならく火薬の中に閉じ込められた空気>のもつ性質を推論し、大気中の空気および硝石の性質についての自分の見解を伝える。

第3命題

火薬から生じた流体物質の弾性もしくは膨張力は、その他の状態が同一であるなら、その密度もしくは押しつぶす圧力(Zusammenpressung)に比例する。

注:オイラーは、高密度の気体圧力はもはや後者に比例しない可能性があると考えた。

第4命題

ある与えられた量の火薬から生じるこの微小物質の弾性と分量を、厳密に決定すること。

注:重量単位の比較。オイラーは、空気の密度が温度に依存することに注意を促す。

第5命題

真っ赤に燃える鉄の温度まで空気が熱せられる際に、空気の弾性の増大を決定すること。

注:オイラーは、気体の圧力が、より高密度(高圧)の場合には、より低密度の場合と同一のやり方で温度に依存することを疑問に付す。

第6命題

火薬から生じた微小物質の弾性は、さらに、点火が起こるような(に伴う)高温によっておおよそどれほど増大されるのか、を決定すること。

注:物体の放熱がその密度に依存することについて. オイラーは以下の注釈において, ロビンズの諸命題の正当性を検証する意図について, 火薬気体(Pulvergase)の作用をその根拠と見込み, 計算結果と観察のそれ(結果)とを比較することによって意見を述べる.

第7命題

弾丸の重さや火薬の装填量ならびに, 大砲の長さやその幅が判明しているならば, 大砲から弾丸が排出されるとき速度を得ることが可能である. ただし, 点火の最初の瞬間における火薬の弾性も知られているものと仮定する.

注1:計算によって示される, 第7命題における課題の解法.

注2:大気の圧力を考慮した銃弾の銃口付近の速度の計算.

注3:砲身内での銃弾の摩擦. 点火孔(Zundloch)とあそび(機械的な隙間)をつうじての気体の漏れによる圧力の損失.

注4:オイラーは, 銃弾の後方において, 銃身(砲身)内部の圧力の不規則な配分への注意を喚起し, ギュンター將軍の射撃実験の結果(計算の解答)と延長された銃身によって得られた射程距離に基礎を得て, 装填火薬(Pulverladung)は突然にではなく徐々に燃焼することを指し示す.

第8命題

大砲からのそれぞれの距離において弾丸がどのくらいの速度で動くかを, 経験によって決定すること.

注1:弾道振り子の重心と振動の中心についての実験的調査(Ermittlung).

注2:ロビンズによる弾道振り子の振幅による銃弾速度の算出.

注3:振子の振幅による銃弾の衝突速度と貫入深度についての改善された算出.

注4:空気抵抗によって振子運動が被る遅延を考慮した銃弾の速度の算出.

第9命題

さまざまな性質の弾丸が鉄砲から排出されるとき実際の速度を, 理論と比較すること.

注1:振り子の振幅からの銃弾の速度についてのロビンズの算出方法で判明している誤りについて.

注2:装填弾薬と, 銃弾が引き起こす振子の振幅による火薬気体の「最初の緊張」(Anfangsspannung)の算出.

注3:大砲砲身の壁面強度は火薬気体の圧力に比例すること. 反動.

注4:装填室(Laderaumes: 船倉, 貨物室の意)の最良形態.

第10命題

大気のそれぞれ異なる状態によって火薬の力が受ける変化を決定すること.

注:空気湿度の, 火薬の推進力への関係.

第11命題

砲弾中で, 火薬より前方に弾丸も他の物体も何も積載されない場合, 火薬の点火によって発生する炎が, それ(炎)自体の膨張力によってどれほどの速度で飛び散るかを決定すること.

注1:火薬の燃焼によって発生した火炎速度の算出.

注2:銃弾の銃口速度の算出. それぞれの密度における気体の緊張(Spannung:摩擦)について計算するための公式の報告.

注3:オイラーは, 前述の注において述べられた公式を火薬気体の緊張の算出に応用する.

注4:装填火薬が完全に燃焼していないという仮定のもとでの火炎と銃弾の速度の決定.

注5:火薬の品質の判定. 銃弾に最大の銃口速度を与える装填火薬の調査.

注6:徐々に火薬が燃焼するという仮定での銃弾の銃口速度の算出.

注7:装填火薬の一部のみ突然に(一瞬で徐々にではなく)燃焼するという仮定での銃弾の銃口速度の調査.

注8:オイラーは, 点火孔とあそびをつうじて気体が失われることを考慮にいれ, 装填火薬の一部のみ突然に燃焼するという仮定で, 銃弾の銃口速度を算出する.

第12命題

弾丸が, 装填火薬(Ladung=Pulverladung)から著しく遠ざかった際に, 押し流される力を測定する.

注:オイラーは, 銃弾が銃身内で装填火薬から, 隔てて置かれているという仮定で, 銃口速度を決定する.

第13命題

さまざまな種類の火薬を数え上げること, そして火薬の品質を研究するための最も確実な方法を示すこと.

注:火薬の品質の尺度として役立つ係数の決定.

第2章:空気抵抗と空気中で弾丸や爆弾が描く軌跡について.

第1命題

流体物質がその(流体物質)中を運動する剛体に及ぼす抵抗についての一般原理を記述すること, そして, 確実に定めること.

注1:力の発生の原因としての慣性.

注2:非弾性と完全弾性の流動体中におけるシリンダーの縦方向の運動. 運動方向に向かって斜めに位置している平面と弾丸の抵抗媒質中の運動.

注3:シリンダーの軸が管の軸と重なっているという仮定での, 流体によって満たされた, シリンダー状の管(Kanal)におけるシリンダーの運動.

注4:非常に高速で運動する物体に対する空気抵抗とその(抵抗)形状に対する依存.

第2命題

いかにして, 空気中を運動している物体が受ける・被る空気抵抗を, 実験(Versuch)によって決定すべきか.

注1:中心部の射程距離のための最終速度の算出.

注2:空中での自由落下.

注3:空気抵抗の速度への依存について.

第3命題

空気中を運動する物体の異なる速度に応じて, 空気の抵抗力が異なって増加することをいかにして決定すべきか.

注1:空気抵抗のため, 実験結果に適合した式 $1/2 v + 1/2g v^2$ の組み立て.

注2:射撃実験による係数 g の決定.

第4命題

マスケット銃と大砲の弾丸が通常の装填火薬の力によって打ち出された際の速度を, いかにして決定すべきか.

注1:オイラーは, 装填火薬指数(Ladungsquotient)と口径(Kaliber:銃器の口径)において測定された銃腔の長さ(die Seelenlänge)から速度を算出する.

注2:10から40口径の銃腔の長さについての銃口速度の算出と装填火薬指数 $1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 6/6$.

注3:銃口速度を規定した場合の, 最も有利な銃腔の長さの算出.

注4:オイラーは大砲の壁面強度が装填火薬と弾丸の性質に依存することを議論する.

注5:口径に対する銃腔の長さの適切な比率に対して,最速の銃口速度を生み出す,装填火薬の決定.

第5命題

完全な装填で大砲弾頭24ポンドが打ち出されたとすると,弾頭が大砲から脱出するときにはその空気抵抗は弾頭重量の20倍の大きさ・強さになる.

注1:第3命題注1で組み立てられた法則の後,第5命題での特別事例のための空気抵抗の決定.

注2:真空空間における放物運動の法則の解析的推論.

第6命題

爆弾や球形砲弾(Stueck-Kugel)が空中で,それに沿って運動するところの軌道は,それらが打ち出されるときの速度がそれほど遅くない場合には,放物線ではないし,放物線に近いものでもない.

注1:空気抵抗が水平方向にのみ働くという仮定での,短距離における水平射撃についての弾道(飛行経路)と(弾道の)飛行時間の決定.

注2:垂直射撃についての,銃口速度からの上昇高度と滞空時間の決定.滞空時間からの上昇高度と銃口速度の調査.

注3:重量,銃口速度,銃弾の発射方向及び空気の圧力と密度による,諸弾道点(Flugbahnpunkte)の座標の算出.

第7命題

飛行中の弾丸は,重力によって鉛直下方向へ引っ張られること他に,同程度の頻度で何らかの別の力によって脇方向へ,すなわち右方向へあるいは左方向へと流されもする.

注1:銃弾の運動に適用した外力の影響に基づく,弾性のない物体(剛体)の運動に関する一般的詳論.

注2:空中で回転する弾丸の運動.

第8命題

大きさと重さの等しい弾丸が,同程度の剛体にそれぞれ異なる速度で衝突し,弾丸が物体内部へと貫入する場合には,弾丸が貫入するさまざまな深さは,ほとんど弾丸の速さの二乗に等しい.そして,そのような剛体の抵抗は,弾丸の内部貫入を考慮すると,つねに等しい大きさになる.

注:オイラーは,激突速度,口径,面積あたりの貫入抵抗から,銃弾の貫入深度を決定する.

※ もととの命題はロビンズによるものであり,注として付加されているものはオイラーが挿入した記述.