数理解析研究所講究録
第 1627 巻 2009 年 50-53

算術平均・幾何平均不等式の非可換化について

名古屋工業大学　林　倫弘 (Tomohiro Hayashi)
Nagoya Institute of Technology

1. 序

この講演の目的は、論文 [4] の解説です。正の数 a, b と $r>1$ に対して、不等式

$$a^r b^{1-r}+(r-1)b \geq ra$$

が成立します。これの非可換化を考えるのが目的です。

特に $b=1$ として

$$a^r+(r-1) \geq ra$$

が成り立っているので、任意の正作用素 X は

$$X^r+(r-1) \geq rX$$

を満たします。従って任意の可逆正作用素 A, B に対し、$X=B^{-1/2}AB^{-1/2}$ とおくと、

$$(B^{-1/2}AB^{-1/2})^r+(r-1) \geq rB^{-1/2}AB^{-1/2}$$

となって

$$B^{1/2}(B^{-1/2}AB^{-1/2})^r B^{1/2}+(r-1)B \geq rA$$

が言えます。従って $M_r(A, B)=B^{1/2}(B^{-1/2}AB^{-1/2})^r B^{1/2}$ を $a^r b^{1-r}$ の非可換版だと思うと、最初に述べた不等式の非可換化を得ます。この $M_r(A, B)$ は作用素平均で有名なもので、r-mean と呼ばれています。特に $r=1/2$ の時、幾何平均といいます。

このように上記の不等式の非可換化は r-mean を用いてほとんど自明な議論で求まります。論文 [4] の主定理は、もし $a^r b^{1-r}$ の非可換化と思われる正作用素 $M(A, B)$ があって上記の不等式を満たした時、自動的に $M(A, B)=M_r(A, B)$ になるというものです (ただし他にいくつかの条件を仮定します)。この定理は r-mean の特徴付けだと考えることができます。

2. 主定理

主定理の正確な主張を述べます。$B(\mathfrak{H})^+$ はヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の可逆正作用素全体です。

Theorem 2.1. *Assume $r > 1$. For any $A, B \in B(\mathfrak{H})^+$, if the map*

$$M(\cdot,\cdot): \ B(\mathfrak{H})^+ \times B(\mathfrak{H})^+ \to B(\mathfrak{H})^+$$

satisfies

(i) $M(A,B) \geq rA + (1-r)B$,

(ii) $M(tA,B) = t^r M(A,B)$ *for any positive number* t,

(iii) $M(A,B)^{-1} = M(A^{-1}, B^{-1})$,

then we have $M = M_r$.

例えば

$$A^{r/2}B^{1-r}A^{r/2}, \qquad B^{(1+2r)/2}(B^6A^{-2}B^6)^{-r/2}B^{(1+2r)/2}$$

などはどちらも $a^r b^{1-r}$ の非可換化だと思えますし、定理の条件 (ii)(iii) を満たしています。従って、これらは (i) の不等式は満たさないことがわかります。一方、

$$(A^3+2B)^2A^{r/2}(A^3+2B)^{-2}B^{1-r}(A^3+2B)^{-2}A^{r/2}(A^3+2B)^2$$

はやはり $a^r b^{1-r}$ の非可換化だと思えるわけですが、定理の条件 (ii)(iii) を満たさないので、(i) の不等式を満たしているかどうかはこの定理からは判定できません。

証明の概略を説明します。まず、条件 (i)(ii) によって、$M(A,B)$ が $M_r(A,B)$ より「大きい」ことがわかります。そこで条件 (iii) を使うと逆向きの「順序」が得られ、従って反対称律によって一致するというからくりです。

「大きい」「順序」とかぎ括弧を付けたのには理由があります。これは通常の作用素の順序ではないし、そもそも順序の条件のうち、推移律を満たしているか不明なものだからです。ここで述べている「順序」の説明をします。各 $A, B, C \in B(\mathfrak{H})^+$ に対し、ブロック行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

が正であることと、$A \geq BC^{-1}B$ が成立することは同値です [1]。 従って特に $X, Y \in B(\mathfrak{H})^+$ に対して、

$$\begin{pmatrix} X & 1 \\ 1 & Y^{-1} \end{pmatrix}$$

が正であることと、$X \geq Y$ は同値です。同様に、任意の単位ベクトル $\xi \in \mathfrak{H}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \langle X\xi, \xi \rangle & 1 \\ 1 & \langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle \end{pmatrix}$$

が正であることと、$\langle X\xi, \xi \rangle \langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle \geq 1$ となることは同値です。

この説明で分かる通り、任意の単位ベクトル $\xi \in \mathfrak{H}$ に対して $\langle X\xi, \xi \rangle \langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle \geq 1$ となることは、$X \geq Y$ となることよりも真に弱い条件になっています。先ほど述べた「順序」とは、この $\langle X\xi, \xi \rangle \langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle \geq 1$ という条件のことです。この関係が推移律を満たすかは私は知りません。しかし我々の目的は等号を得ることなので、反対称律を証明すれば十分です。実際、反対称律は成立します。

Theorem 2.2. *For two positive invertible operators $X, Y \in B(\mathfrak{H})^+$, if they satisfy*

$$\langle X\xi, \xi \rangle \langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle \geq 1$$

and

$$\langle Y\xi, \xi \rangle \langle X^{-1}\xi, \xi \rangle \geq 1$$

for any unit vector $\xi \in \mathfrak{H}$, then we have $X = Y$.

この定理の証明は、有限次元の場合は比較的簡単なのですが、無限次元の時は容易ではありません。以下この反対称律の証明を説明します。

$f(t) = t\langle X\xi, \xi \rangle + t^{-1}\langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle$ $(t > 0)$ とおいて最小値を考えることで、

$$\langle X\xi, \xi \rangle \langle Y^{-1}\xi, \xi \rangle \geq 1$$

は、任意の正の数 t に対して

$$tX + (tY)^{-1} \geq 2$$

となることと同値であることがわかります。同様にして

$$tY + (tX)^{-1} \geq 2$$

がわかります。$Z = Y^{1/2}XY^{1/2}$ とおいてこれらの不等式を書き換えると

$$\frac{2tZ}{t^2Z + 1} \leq Y \leq \frac{t^2Z + 1}{2t}$$

がいえます。目標は $Z^{1/2} = Y$ を示すことです。

まず有限次元の場合を考えます。Z のスペクトル射影 P を $ZP=\lambda P$ を満たすように取ります（λ は固有値)。この射影で先ほどの不等式を挟むと

$$\frac{2t\lambda}{t^2\lambda+1}P \le PYP \le \frac{t^2\lambda+1}{2t}P.$$

となります。t について最大・最小値を考えることで $PYP=\lambda^{1/2}P$ を得ます。一方

$$\frac{t^2Z+1}{2tZ} \ge Y^{-1} \ge \frac{2t}{t^2Z+1}$$

となっているので、同様にして $PY^{-1}P=\lambda^{-1/2}P$ がわかり、これらのことから簡単に Y と P が可換であることがわかります。従って $Z^{1/2}=Y$ が言えて、証明完了です。

この議論は無限次元ではそのまま使うことは出来ません。スペクトル射影で挟んで最大・最小をとる議論は、無限次元の場合は近似的にしかできません。それは ZP と λP が完全には一致しないためです。この二つを近づけると、必然的にスペクトル射影で直交するものを沢山取る必要が出てきて、問題となるわけです。別の言い方をすると、この議論は Z の生成する可換フォンノイマン環への条件付期待値 E で Y を写したものについて調べているわけです。従って、無限次元で Z が連続的なスペクトルを持つ場合は、条件付期待値 E は全てのコンパクト作用素を 0 に写してしまうので、$E(Y)$ を調べるだけでは不十分です。

無限次元の場合の証明には、"対角成分" PYP を用いて "非対角成分" $PYP^{\perp}$ を評価する必要があります。それには Schur complement と呼ばれる等式

$$(PY^{-1}P)^{-1} = PYP - PYP^{\perp}(P^{\perp}YP^{\perp})^{-1}P^{\perp}YP$$

を用います。詳しくは論文 [4] をご覧下さい。

References

[1] T. Ando, *Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Algebra and Appl. **26** (1979) 203–241.

[2] _____, private communication,

[3] T. Ando and K. Nishio, *Characterizations of operations derived from network connections*, J. Math. Anal. Appl. **53** (1976) 539–549.

[4] T. Hayashi, *Non-commutative A-G mean inequality*, to appear in Proc. AMS.

E-mail address: `hayashi.tomohiro@nitech.ac.jp`