数理解析研究所講究録
第1629巻 2009年 45-55

密輸量決定戦略のある密輸取締ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

本論文で取り上げる取締ゲームは一般に "Inspection ゲーム" と呼ばれ，その原型は１９６０年代に行われた Dresher [2] と彼のモデルをより一般化した Maschler [6] の研究に見ることができる．Maschler は，この多段階の２人ゼロ和ゲームの研究成果を軍縮条約に付随して起こる査察問題に適用しようとした．彼らのモデルを密輸者とその違法行為を監視する税関とのゲームに置き換えて研究したのが Thomas and Nisgav [8] であるが，問題を多段繰り返しゲームに定式化して初期ステージからの繰り返し計算により解いていく簡単な数値計算手法を採っている．以上の研究成果に対し，ゲームの値を閉じた式で与えたのが Baston and Bostock [1] である．それまでの研究では，違反行為及び密輸行為は査察または監視により必ず摘発されるとした "完全摘発" のケースのみが考えられていたが，彼らは，ボートの隻数により摘発確率が異なるとする拡張したモデルに対し，その解の導出に成功している．ただし，密輸者側の密輸決行の回数は，従来の研究と同じく１回のみとしている．

これまでの研究に対し，複数回の密輸実行の可能性をもつモデルを完全摘発の仮定の下で論じたのが Sakaguchi [7] である．Sakaguchi モデルを拡張したと言えるのが，Ferguson and Melolidakis [3] である．彼らは，Inspection ゲームの初期の研究にあったように別払いの仮定を付加し，複数回実施可能な不法行為を１回免除される毎にコスト $q(\leq 1)$ の支払が伴うとした．更に Sakaguchi モデルを拡張したものに Hohzaki, et al.[4] がある．そこでは，複数回実施可能な不法行為実施中のパトロールは必ずしも完全ではなく，「摘発」,「不法行為成功」,「そのいずれでもない」の３つの結果が確率的に生じ，取締機関，密輸者の両プレイヤーのどちらの任務達成確率も考慮されたモデルとなっている．Hohzaki のモデルでは，任務達成確率が導入されることにより問題は確率ゲームとなり，状態が変化した次のゲームへの遷移は確率的となっている．また，密輸者側の経済的その他の理由により，許容回数の不法行為実施が強要されるモデルについても，Hohzaki[5] が研究を行っている．

さて以上の従来研究では，密輸者の戦略に "密輸を行う" か "密輸を行わない" かの離散戦略を採用しているモデルが大半を占めている．しかし，最終的に一定額あるいは一定量の密輸を企図し，あるときは大量の密輸を，あるときには少量の密輸量で我慢する等の密輸量に関する戦略を取る場合も考え得る．この研究では，このような密輸量の決定を戦略にもつ密輸者と取締機関との "密輸取締ゲーム" を取り扱う．

以下，次の節ではモデルの前提について詳述し，ゲームの推移を考察することにより問題を多段ゲームとして定式化する．３節では，多段ゲームに関する漸化式を利用して特殊なケースにおいてゲームの解を求

め，最終的にはゲームの値を一般的に与える解析解を導出する．最後に 4 節では，具体的な数値例により最適解の性質について考察を深める．

2 モデルの前提と定式化

ここでは，パトロールを実施して取締りを行うプレイヤーAと密輸を決行するプレイヤーBとの間で行われる次のような2人ゼロ和の多段ゲームを考える．

A1. 二人のプレイヤーA，Bが1日に1回のアクションをとる全体で N 日の多段ゲームを考える．残り日数によりゲームのステージ数を表す．

A2. プレイヤーAは最大で K 日のパトロールを実施可能であるが，$K > N$ によりパトロール実施可能日数が残り日数を超過する場合は，超過日数分の実施機会は失われる．プレイヤーBは現在手持ちの禁制品を $X > 0$ 個持ち，これを密輸したいと望んでいる．

A3. 1回のアクションに際し，プレイヤーAはパトロールを実施するか否かの2つの手をもち，プレイヤーBは手元に残っている量を上限とした禁制品の密輸量を決定する．

A4. プレイヤーBが密輸を行った日にプレイヤーAがパトロールを実施すれば，確率 $p_1 > 0$ でプレイヤーBを摘発できるが，逆に密輸が成功することも確率 p_2 で起こる．$p_1 + p_2 \leq 1$ であり，残りの確率 $1 - p_1 - p_2$ で何も生起しないが，その際は密輸を試みた禁制品はプレイヤーBから失われるものとする．もしパトロールが実施されなければ，密輸は必ず成功する．

A5. 密輸の成功は禁制品1単位につき1の利益をプレイヤーBにもたらし，逆にプレイヤーBの摘発は相対利益 $\alpha > 0$ をプレイヤーAにもたらす．両プレイヤーの利益総額はゼロ和であるとし，ゲームの支払はプレイヤーAの利得で定義する．

A6. プレイヤーAがプレイヤーBを摘発できない場合は次の日のゲームに移るが，その時には前日とった両プレイヤーの戦略はお互いの知るところとなる．プレイヤーBの摘発，あるいは残り日数が尽きたときにゲームは終了する．

上の支払の定義から，プレイヤーA（取締者）はマキシマイザーとして，プレイヤーB（密輸者）はミニマイザーとして行動する．いま残り日数 n 日のステージにおいて，プレイヤーAの最大可能パトロール回数 k，プレイヤーBの手持ちの禁制品数 x の場合のゲームを $\Gamma(n,k,x)$ で表すと，これは次のような漸化式で表現できる多段ゲームとなる．

$$\Gamma(n,k,x) \equiv \begin{array}{c} \\ P \\ NP \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\quad\quad S\ (y) \quad\quad\quad\quad\quad\quad & NS\ (y=0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha p_1 - y p_2 + (1-p_1)\Gamma(n-1,k-1,x-y) & \Gamma(n-1,k-1,x) \\ -y + \Gamma(n-1,k,x-y) & \Gamma(n-1,k,x) \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

この行列ゲームにおける2つの行はプレイヤーAの2つの戦略 {パトロールを実施 (P)，未実施 (NP)} に対応する．列数はプレイヤーBの密輸量 $y = x, x-1, \cdots, 1, 0$ に対応し本来 $x+1$ 個あるが，見易さを考えて，(1) 式では密輸量 y をとる戦略 $S(y)$ と密輸をしない戦略 $S(0)$（場合によっては NS:no-smuggling と記

す）の２つを代表して書いている．各要素の意味するところは以下のとおりである．

プレイヤーＡがパトロールをしプレイヤーＢが密輸量 y をとる場合の要素は，その日の期待利得が $\alpha p_1 - yp_2$ であり，$1-p_1$ の確率で摘発されずに次の日のゲームに移る．その際にはプレイヤーＡのパトロール実施可能数が１回減少し，プレイヤーＢの手持ち禁制品数が y 個減少していることを示している．また，プレイヤーＡがパトロールを実施しない２行目では，プレイヤーＡのパトロール実施回数は減少しないが，プレイヤーＢの密輸は難なく成功するためプレイヤーＡは y の損失を被った後，次の日のゲームに移る．

式 (1) の中の $\Gamma(n,k,l)$ をそのゲームの値 $v(n,k,l)$ で置き換えることにより，この確率多段ゲームにおけるゲームの値の漸化式が次のように得られる．

$$v(n,k,x) = val \begin{pmatrix} \alpha p_1 - p_2 x & \alpha p_1 - p_2 y + (1-p_1)v(n-1,k-1,x-y) & v(n-1,k-1,x) \\ -x & -y + v(n-1,k,x-y) & v(n-1,k,x) \end{pmatrix} \tag{2}$$

１列目は密輸者が禁制品全量の密輸を実施する戦略 $S(x)$ を，２列目は一般的な密輸量 y の戦略 $S(y)$ を，最終列は密輸をしない NS の戦略に対応している．ただし，記号 val はそれに続く行列ゲームの値を表す．ステージ $n=0$ における初期条件や境界条件は次式となる．

$$v(0,k,x) = 0,\ v(n,k,0) = 0,\ v(n,0,x) = -x, \tag{3}$$

$$v(n,k,x) = v(n,n,x)(k > n \text{ の場合}) \tag{4}$$

このゲームにおいては，パトロールを実施することによるコストは何ら必要でないため，プレイヤーＡは可能な回数のパトロールを実施しようとする．考慮すべきは，現在パトロールを実施すべきか，実施せずに後日のために取っておくかの配慮だけである．一方，プレイヤーＢは手持ち量 x を任意に分割して，分割した数だけの回数密輸を決行できるが，摘発されゲームも終了する確率 p_1 と，摘発されないにしてもその日予定していた禁制品が無駄に投棄されることになる確率 $1-p_1-p_2$ の兼ね合いを考えねばならない．

3　解法手順とゲームの解

確率多段ゲームの均衡解は，初期条件 (3) から出発し，インデックスを $n=1,\cdots,N$, $k=1,\cdots,K$, $x=1,\cdots,X$ と変えながら，行列ゲーム (2) 式を逐次的に解いていくことにより，任意の日数 N，パトロール実施可能回数 K，手持ち密輸量 X のゲームの値及び各ステージにおけるプレイヤーの最適戦略を導くことができる．以下では，幾つかの特殊例についてゲームを解き，3.3 節で一般解を提示する．

3.1　$k=n$ の場合のゲームの解

一般性を失わず $x>0$ とし，$v(1,1,x)$ を求めてみよう．条件式 (3)，(4) から，$v(1,1,x)$ の行列ゲーム (2) 式は次式となる．

$$v(1,1,x) = val \begin{pmatrix} \alpha p_1 - p_2 x & \le \alpha p_1 - p_2 y & 0 \\ \vee & & \| \\ -x & < \ -y \ < & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

各要素間の大小関係を示す不等式も書き込んでいることからも分かるように，密輸者の全量密輸戦略 $S(x)$ は，すべての部分量密輸戦略 $S(y)$, $0 < y < x$, を弱く支配している．また，そうであるならば取締者の戦略 P は NP を弱く支配することになるから，結局ゲームの値は $v(1,1,x) = \min\{\alpha p_1 - p_2 x,\ 0\}$ となる．

次に最適戦略をすべて羅列してみよう．取締者が戦略 P をとる確率を π, NP のそれを $1-\pi$ とし，密輸者が戦略 $S(x)$ をとる確率を ρ, NS のそれを $1-\rho$ として期待利得 $R(\pi,\rho)$ を求めると次式になる．

$$R(\pi,\rho) = \rho\{\pi(\alpha p_1 - p_2 x + x) - x\} \tag{6}$$

したがって，相手の戦略に対する各プレイヤーの最適応答は次のように整理できる．密輸者の戦略 ρ に対する取締者の最適反応戦略 $\pi^*(\rho)$ は，(a) $\rho = 0$ ならば，$\pi^*(\rho)$ は任意，(b) $\rho > 0$ ならば，$\pi^*(\rho) = 1$，となる．逆に，取締者の戦略 π に対する密輸者の最適反応 $\rho^*(\pi)$ は，次のようにまとめられる．(i) $\alpha p_1 - p_2 x > 0$ の場合：

$$\pi_1 = \frac{x}{\alpha p_1 - p_2 x + x} \tag{7}$$

に対し，(a) $\pi > \pi_1$ ならば，$\rho^*(\pi) = 0$, (b) $\pi = \pi_1$ ならば，$\rho^*(\pi)$ は任意，(c) $\pi < \pi_1$ ならば，$\rho^*(\pi) = 1$. (ii) $\alpha p_1 - p_2 x = 0$ の場合：(a) $\pi = 1$ ならば，$\rho^*(\pi)$ は任意．(b) $\pi < 1$ ならば，$\rho^*(\pi) = 1$. さらに，(iii) $\alpha p_1 - p_2 x < 0$ の場合：$\rho^*(\pi) = 1$. 以上の考察より，均衡解 (π^*, ρ^*) の全体は次により表される．

$$(i)\ \alpha p_1 - p_2 x > 0 \text{ ならば}, (\pi^*, \rho^*) = (\pi \ge \pi_1 \text{ なる任意の}\pi,\ 0). \tag{8}$$

$$(ii)\ \alpha p_1 - p_2 x = 0 \text{ ならば}, (\pi^*, \rho^*) = (1,\ \rho\text{は任意}). \tag{9}$$

$$(iii)\ \alpha p_1 - p_2 x < 0 \text{ ならば}, (\pi^*, \rho^*) = (1,\ 1). \tag{10}$$

さて，$v(1,1,x)$ に関してこのように詳細に解説したのは，実は $k = n$ のゲーム $\Gamma(n,n,x)$ に対してもほぼ同じことが成り立つからである．

補題 1 ($k = n$ の場合) パトロール可能日数が残り日数と同じ場合のゲームの値は

$$v(n,n,x) = \min\{\alpha p_1 - p_2 x,\ 0\} \tag{11}$$

であり，ステージ n におけるプレイヤーの最適戦略は，$n = 1$ の場合は *(8)*∼*(10)* 式により，$n > 1$ の場合は次の 2 つのタイプにより与えられる．

$$(i)\ \alpha p_1 - p_2 x > 0 \text{ ならば}, (\pi^*, \rho^*) = (\pi \ge \pi_1 \text{ なる任意の}\pi,\ 0). \tag{12}$$

$$(ii)\ \alpha p_1 - p_2 x \le 0 \text{ ならば}, (\pi^*, \rho^*) = (1,\ \rho\text{は任意}). \tag{13}$$

証明略: 数学的帰納法により証明できる．

$n = 1$ と $n > 1$ の違いは式 (10) と (13) にあるが，$k = n$ でありパトロールが常時実施される状況では，$\alpha p_1 - p_2 x \le 0$ の場合にはいつ密輸を行っても支払は同じであるため，密輸者は，最終ステージ $n = 1$ で密輸を必ず決行すると決めさえすれば，他のステージにおける戦略は意に介す必要はない．

3.2 基礎的仮定とそれに基づく一般的な解法手順

ゲーム $\Gamma(n,k,x)$ を解く場合の最大の拠り所は漸化式 (2) である．最後に証明するが，$k=n$ の場合と同様に，一般のケースでも次の大前提が成立すると仮定する．

仮定A: ゲームの均衡解は密輸者の２つの戦略 $y=x$ と $y=0$（すなわち，NS）にのみ依存する．

この仮定により，行列ゲーム (2) は次の２行２列のゲームとなる．

$$v(n,k,x) = val\begin{pmatrix} \alpha p_1 - p_2 x & v(n-1,k-1,x) \\ -x & v(n-1,k,x) \end{pmatrix}$$

行列ゲーム (2) を解く上で使用する自明な不等式を述べておこう．

$$-x \le -y + v(n-1,k,x-y) \le v(n-1,k,x), \tag{14}$$

$$-x < \alpha p_1 - p_2 x,\ v(n-1,k-1,x) \le v(n-1,k,x),\ v(n,k,x) \le 0 \tag{15}$$

不等式 (15) は未だ述べていなかったが，係数や引数から明らかであろう．最後の不等式は，密輸者が常にNS 戦略をとることにより，取締者の任意の戦略に対し支払をゼロにできることから明らかである．行列ゲームにおいては，ミニマックス値 $\ge$ ゲームの値 $\ge$ マックスミニ値が成立するから，(15) 式を考慮すれば，

$$\min\{\alpha p_1 - p_2 x,\ v(n-1,k,x)\} \ge v(n,k,x) \ge \max\{v(n-1,k-1,x),\ -x\} = v(n-1,k-1,x)$$

が成り立つ．上の第２の不等式では $\alpha p_1 - p_2 x \ge v(n-1,k-1,x)$ を使用しているが，これは前半の不等式から導出できる次の不等式を $v(n-1,k-1,x)$ に対し使用したものである．

$$\alpha p_1 - p_2 x \ge v(n,k,x),\ v(n-1,k,x) \ge v(n,k,x). \tag{16}$$

不等式 (14)，(15) の成立はすでに確認されたものであるのに対し，不等式 (16) は仮定Aの下で成立するものであることに注意しておく必要がある．以上をまとめると，仮定Aの下で，行列ゲーム $\Gamma(n,k,x)$ の要素間の大小関係を以下のように表すことができる．

$$v(n,k,x) = val\begin{pmatrix} \alpha p_1 - p_2 x & \ge & v(n-1,k-1,x) \\ \vee & & \wedge| \\ -x & \le & v(n-1,k,x) \end{pmatrix} \tag{17}$$

この大小関係は，$\Gamma(n,k,x)$ の均衡解が鞍点でなく混合戦略となると考えて解けばよいことを意味している．その結果，ゲームの値に関し次の漸化式を導くことができる．

$$v(n,k,x) = \frac{(\alpha p_1 - p_2 x)\cdot v(n-1,k,x) + x\cdot v(n-1,k-1,x)}{\alpha p_1 - p_2 x + x + v(n-1,k,x) - v(n-1,k-1,x)} \tag{18}$$

この漸化式は，次のような２つの方法により解を導出するために活用できる．第１は，パトロール回数 $k-1$ を固定し，$\{v(n,k-1,x), n=1,\cdots,N\}$ が既知だとして，$v(n,k,x)$ と $v(n-1,k,x)$ の間の差分方程式として利用して，k に対するゲームの値 $\{v(n,k,x), n=1,\cdots,N\}$ を求めるやり方である．例えば，$k=1$ とした場合の $v(n-1,k-1,x)=-x$ を (18) 式に代入し，$v(n,1,x)$ と $v(n-1,1,x)$ の差分方程式として解く．それを $k=2,3,\cdots$ と繰り返してゆけば，理論的にはすべての k に対するゲームの値を求めることが可能となる．

漸化式の第2の活用方法は，固定した s に対する $\{v(n,n-s,x),\ n=1,2,\cdots,N\}$ が既知だとし，この漸化式を $\{v(n,n-(s+1),x)\}$ と $\{v(n-1,n-1-(s+1),x)\}$ の差分方程式と見なして，$\{v(n,n-(s+1),x),\ n=1,2,\cdots,N\}$ を導くことに利用する．補題1により我々は $\{v(n,n,x),\ n=1,\cdots,N\}$ の値を知っているのであるから，$k=n-1$ とおいた (18) 式は $v(n,n-1,x)$ と $v(n-1,(n-1)-1,x)$ の差分方程式と見なすことができ，それが解ければ $\{v(n,n-1,x),n=1,\cdots,N\}$ の値を得る．その値を，$k=n-2$ とおいた (18) 式の $v(n-1,n-2,x)$ に代入すれば，今度は $\{v(n,n-2,x),n=1,\cdots,N\}$ を導出するための差分方程式が出来上がる．

漸化式 (18) を上記のように利用するため，便宜上次の式をゲームの値 $v(n,k,x)$ の代わりに用いよう．

$$y(n,k,x)\equiv\frac{1}{v(n,k,x)+x} \tag{19}$$

このとき (18) 式は，$y(n,k,x)$ に関する次のような漸化式となる．

$$\begin{aligned} y(n,k,x) &= y(n-1,k,x)+\frac{1}{\gamma(x)}\left(1-\frac{y(n-1,k,x)}{y(n-1,k-1,x)}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{\gamma(x)y(n-1,k-1,x)}\right)y(n-1,k,x)+\frac{1}{\gamma(x)} \end{aligned} \tag{20}$$

ただし，次の記号を用いている．

$$\gamma(x)\equiv\alpha p_1-xp_2+x \tag{21}$$

また，(18) 式で $k=1$ とし $v(n-1,0,x)=-x$ を代入して作成した差分方程式と，(20) 式に $y(n-1,0,x)=1/(v(n-1,0,x)+x)=\infty$ を代入して作成した差分方程式とは一致することが確認できるように，一般に $k=0$ の場合に $y(n,0,x)=\infty$ とおいても差し支えないことを断っておく．

ここで仮定Aが真であるための十分条件を導く．行列ゲーム (2) 式を解くため，取締者が戦略Pをとる確率を π，NP をとる確率を $1-\pi$ とする．密輸者側が純粋戦略 $S(y)$ をとった場合の期待支払は

$$R(\pi,S(y))=\pi\{\alpha p_1-p_2y+(1-p_1)v(n-1,k-1,x-y)\}+(1-\pi)(-y+v(n-1,k,x-y))$$

となる．これを，横軸に π を縦軸に $R(\pi,S(y))$ をとった直交座標で図示すると，点 $(0,\ -y+v(n-1,k,x-y))$ と $(1,\ \alpha p_1-p_2y+(1-p_1)v(n-1,k-1,x-y))$ を通る直線となる．因みに，$R(\pi,S(x))$ を表す直線は，2点 $(0,\ -x))$ と $(1,\ \alpha p_1-p_2x)$ を通る正の傾きをもった直線であり，$R(\pi,NS)$ は2点 $(0,\ v(n-1,k,x))$ と $(1,\ v(n-1,k-1,x))$ を結ぶ負の傾きをもった直線である．この3つの直線の $\pi=0$ における切片の大小関係は，不等式 (14) が明示しているように，$R(\pi,S(x))$，$R(\pi,S(y))$ 及び $R(\pi,NS)$ の順に大きくなる．また，(16) 式の第1の不等式が語っているように，直線 $R(\pi,S(x))$ と $R(\pi,NS)$ の $\pi=1$ における切片は，前者の切片が後者のそれより大きい．したがって，直線 $R(\pi,S(x))$ と $R(\pi,NS)$ は交わり，交点となる π は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \frac{v(n-1,k,x)+x}{\gamma(x)+v(n-1,k,x)-v(n-1,k-1,x)} \\ &= \frac{1}{\gamma(x)y(n-1,k,x)+1-y(n-1,k,x)/y(n-1,k-1,x)} \end{aligned} \tag{22}$$

もし，$\pi = 1$ における $R(\pi, S(x))$ の切片が $R(\pi, S(y))$ の切片より小さくなり，$\alpha p_1 - p_2 x < \alpha p_1 - p_2 y + (1-p_1)v(n-1, k-1, x-y)$ が成立する場合は，$0 \leq \pi \leq 1$ の範囲内では両直線には交点は無いが，このとき (2) 式から明らかなように，戦略 $S(x)$ は戦略 $S(y)$ の支配戦略になり，ゲームの解を考える上で戦略 $S(y)$ は考慮に入れる必要はない．逆に，$\alpha p_1 - p_2 x \geq \alpha p_1 - p_2 y + (1-p_1)v(n-1, k-1, x-y)$ が成立する場合には，

$$\pi_4 = \frac{v(n-1,k,x-y)+x-y}{(1-p_2)(x-y)-(1-p_1)v(n-1,k-1,x-y)+v(n-1,k,x-y)}$$
$$= \frac{1}{(1-p_1-p_2)(x-y)y(n-1,k,x-y)-(1-p_1)y(n-1,k,x-y)/y(n-1,k-1,x-y)+1} \qquad (23)$$

で両直線は交わる．戦略 $S(x)$ と $S(y)$ の間で支配関係の無いこの場合においても，戦略 $S(y), y \neq x$ が均衡解に影響を与えず，直線 $R(\pi, S(x))$ と $R(\pi, NS)$ だけで均衡解が決まるのは $\pi_3 \leq \pi_4$ となる場合のみであることは図示すれば分かる．ここで (20) 式を用い，$y(n-1,k,x-y)/y(n-1,k-1,x-y)$ を $y(n,k,x-y)$ と $y(n-1,k,x-y)$ で置き換えてやれば，π_3，π_4 は次式のような表現も持つ．

$$\pi_3 = \frac{1}{\gamma(x)y(n,k,x)} \qquad (24)$$

$$\pi_4 = \frac{1}{(1-p_1)\gamma(z)y(n,k,z)-\{(1-p_1)\gamma(z)-(1-p_1-p_2)z\}y(n-1,k,z)+p_1} \qquad (25)$$

ただし，$z \equiv x-y$ と置き換えた．以上から，密輸者の戦略間で支配関係がない場合に，戦略 $S(x)$ と NS だけで均衡解が決まる必要十分条件は $\pi_3 \leq \pi_4$ である．上述したように，支配戦略がある場合には，π_4 は $1 < \pi_4$ となるか $\pi_4 < 0$ であるか，あるいは直線 $R(\pi, S(x))$ と $R(\pi, S(y))$ が平行となって $\pi_4 = \pm\infty$ となるかも知れないが，支配関係がある無しに関わらず，次の補題で述べる条件は均衡解が $S(x)$ と NS の２つの戦略だけで決定される十分条件となる．

補題 2 (均衡解が全量密輸戦略と密輸未決行戦略のみで決定される十分条件) 行列ゲーム $\Gamma(n,k,x)$ における均衡解が，全量密輸戦略（$S(x)$）と密輸未決行戦略（NS）のみで決定される十分条件は，任意の z $(0 \leq z \leq x)$ に対し

$$(1-p_1)\gamma(z)y(n,k,z)-\{(1-p_1)\gamma(z)-(1-p_1-p_2)z\}y(n-1,k,z)+p_1 \leq \gamma(x)y(n,k,x) \qquad (26)$$

が成り立つことである．

補題の条件が常に成り立つということであれば，$\Gamma(n,n,x)$ のように，密輸者の戦略 $S(x)$ と $S(y)$ 間で支配関係が生じた場合にあっても，$1 < \pi_4$ であって，$\pi_4 < 0$ のケースは生じないということになる．このことは，直線 $R(\pi, S(x))$ の傾きが $R(\pi, S(y))$ のそれ以上となることを意味し，

$$\gamma(y)+(1-p_1)v(n-1,k-1,x-y)-v(n-1,k,x-y) \leq \gamma(x) \qquad (27)$$

が成り立つことの傍証ともなる．

最後に，仮定Ａの下でのゲームの解法についてのまとめと注意点を述べる．行列ゲーム $\Gamma(n,k,x)$ を議論する際に仮定Ａを前提とすると，ゲームの値は式 (18) あるいは (20) により与えられる．このとき，求めた

値 $y(n,k,x)$ が不等式 (26) を満たすならば，行列ゲーム $\Gamma(n,k,x)$ について仮定 A が正しいことが証明されたことになる．因みに，行列ゲーム (17) におけるプレイヤーの最適混合戦略として，取締者のパトロール実施確率 π は (22) または (24) 式により与えられるが，同様にすれば，密輸者側の全量密輸の決行確率 ρ に関する最適戦略として，次式を導くことができる．

$$\pi^* = \frac{v(n-1,k,x)+x}{\gamma(x)+v(n-1,k,x)-v(n-1,k-1,x)} = \frac{1}{\gamma(x)y(n,k,x)} \tag{28}$$

$$\rho^* = \frac{v(n-1,k,x)-v(n-1,k-1,x)}{\gamma(x)+v(n-1,k,x)-v(n-1,k-1,x)} = 1-\frac{y(n-1,k,x)}{y(n,k,x)} \tag{29}$$

3.3 ゲームの一般解

ここでは一挙に一般解を提示し，同時に仮定 A の正しさも証明する．

定理 1 $\alpha p_1 - xp_2 < 0$ のとき，ゲームの値は次式により与えられる．

$$y(n,k,x) = \frac{n}{k\gamma(x)} \tag{30}$$

$$v(n,k,x) = \frac{k\gamma(x)}{n} - x \tag{31}$$

また，最適なパトロール実施確率 π^*，全量密輸決行確率 ρ^* は以下で与えられる．

$$\pi^* = \frac{k}{n},\quad \rho^* = \frac{1}{n} \tag{32}$$

証明: 数学的帰納法により証明する．$n=1$ のとき，$k=0,1$ のいずれの場合にも (31) 式が正しいことは，(3)，(11) 式から分かる．いま $\{v(n-1,k,x),\ k=1,\cdots,n-1,\ x=1,2,\cdots\}$ に対して定理が成り立つと仮定すると，(20) 式の右辺は

$$\left(1-\frac{k-1}{n-1}\right)\frac{n-1}{k\gamma(x)}+\frac{1}{\gamma(x)} = \frac{n-k}{k\gamma(x)}+\frac{1}{\gamma(x)} = \frac{n}{k\gamma(x)}$$

となる．かくして，$\{v(n,k,x),\ k=1,\cdots,n-1,\ x=1,2\cdots\}$ に対しても定理が成立する．$k=n$ の場合の確認も，(11) 式から容易である．また，最適戦略 (32) 式は，(28), (29) 式から容易に計算できる． □

公式 (30) により，$k=0$ の場合には $y(n,0,x)=\infty$ となるが，これは初期条件 (3) による $v(n,0,x)=-x$ を (31) 式から導出できることを許すから，特殊ケースとして $y(n,k,x)$ が無限大となることも許容する．

定理 2 $\alpha p_1 - xp_2 \geq 0$ のとき，ゲームの値は次式により与えられる．

$$\begin{aligned} y(n,k,x) &= \frac{\sum_{l=0}^{k} {}_{n-k+l-1}C_l \cdot x^l \gamma(x)^{k-l}}{x\sum_{l=0}^{k-1} {}_{n-k+l-1}C_l \cdot x^l \gamma(x)^{k-l}} \\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{{}_{n-1}C_k}{\sum_{l=0}^{k-1} {}_{n-k+l-1}C_l \cdot (\gamma(x)/x)^{k-l}}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

$$v(n,k,x) = -\frac{{}_{n-1}C_k \cdot x^{k+1}}{\sum_{l=0}^{k} {}_{n-k+l-1}C_l \cdot x^l \gamma(x)^{k-l}} \tag{34}$$

$k=n$ の場合には，公式の中で ${}_{l-1}C_l$ という演算が出てくるが，$l=0$ 場合は 1 を，$l>0$ の場合はゼロになると約束すると，$y(n,n,x)=1/x$，$v(n,n,x)=0$ となり，(11) 式と合致する．また，$k=0$ の場合には分母に演算 $\sum_{l=0}^{-1}$ が出てくるが，慣習としてよくやられるように，これをゼロとしてやれば，$y(n,0,x)=\infty$，あるいは $v(n,0,x)=-x$ が得られ，初期条件式 (3) に矛盾しない．

証明: 数学的帰納法により証明する．$k=0$，n の場合に成立することは，定理 2 の下の注意書きに示したとおりである．さて，(20) 式左辺の $y(n-1,k,x)$，$y(n-1,k-1,x)$ に公式 (33) を代入して計算すると，

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{\gamma(x)y(n-1,k-1,x)} &= 1-\frac{x\sum_{l=0}^{k-2}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l-1}}{\gamma(x)\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l-1}} \\
&= \frac{\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}-\sum_{l=0}^{k-2}{}_{n-k+l-1}C_l x^{l+1}\gamma(x)^{k-l-1}}{\gamma(x)\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l-1}}
\end{aligned}
$$

となる．分子の第 2 項における $l+1$ を改めて l とおくと次式に整理できる．

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= \sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}-\sum_{l=1}^{k-1}{}_{n-k+l-2}C_{l-1}x^l\gamma(x)^{k-l} \\
&= \gamma(x)^k+\sum_{l=1}^{k-1}{}_{n-k+l-2}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}=\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-2}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}
\end{aligned}
$$

故に，

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{\gamma(x)y(n-1,k-1,x)}\right)y(n-1,k,x)+\frac{1}{\gamma(x)} \\
&=\frac{\sum_{l=0}^{k}{}_{n-k+l-2}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}+\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^{l+1}\gamma(x)^{k-l-1}}{x\gamma(x)\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l-1}}=\frac{\sum_{l=0}^{k}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}}{x\sum_{l=0}^{k-1}{}_{n-k+l-1}C_l x^l\gamma(x)^{k-l}}
\end{aligned}
$$

となり，(33) 式に一致する． □

定理 1，2 とも，仮定 A を前提とした漸化式を解いて導出したものであるから，最後に仮定 A が真であることを示す必要がある．

定理 3 密輸者の最適混合戦略は，全量密輸戦略 $S(x)$ か密輸未決行戦略 NS のみに依存する．

証明略: 定理 1 及び 2 の $y(n,k,x)$ が不等式 (26) を満たすことを示せばよい．

4 数値例

ここでは，$\alpha=2$，$p_1=0.6$，$p_2=0.3$ とし，ステージ数を $n=1,2,\cdots,7$，パトロール可能回数を $k=0,1,\cdots,n$，密輸者の手持ち禁制品量を $x=1,2,\cdots,7$ と変えることによる均衡解の変化を見てみる．表 1 はゲームの値 $v(n,k,x)$ を記載したものである．表 1 では，比較のため，自明なケース $v(n,0,x)=-x$ の値も記載した．これまでの議論で明らかなように，αp_1-p_2x の正負が解の性質を変えることになるが，少ない量 $x=1,2,3$ ではこの値は正に，$x=4$ ではちょうどゼロに，禁制品量が $x=5$ 以上に多くなると負になる．この値を判別値と呼ぶ．

表 1 においては，ゲームの値の非正性や k に対する単調増加性，x に対する単調減少性が明確に現れている．ただし補題 1 で述べたように，$n=k$ の場合には判別値が非負になるすべての x に対してゲームの値はゼロとなる．また，k, x を固定して n を大きくするとゲームの値は小さくなり，ステージ数の増加が密輸者側に有利に働くことは，不等式 (16) で示したとおりである．

表 1．ゲームの値 ($\alpha=2$, $p_1=0.6$, $p_2=0.3$ のケース)

n	k	x						
		1	2	3	4	5	6	7
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9
2	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.35	-0.87	-1.43	-2.00	-2.65	-3.30	-3.95
	2	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9
3	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.51	-1.21	-1.94	-2.67	-3.43	-4.20	-4.97
	2	-0.15	-0.50	-0.91	-1.33	-1.87	-2.40	-2.93
	3	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9
4	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.61	-1.40	-2.20	-3.00	-3.83	-4.65	-5.48
	2	-0.29	-0.82	-1.41	-2.00	-2.65	-3.30	-3.95
	3	-0.08	-0.32	-0.65	-1.00	-1.48	-1.95	-2.43
	4	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9
5	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.68	-1.51	-2.35	-3.20	-4.06	-4.92	-5.78
	2	-0.39	-1.04	-1.71	-2.40	-3.12	-3.84	-4.56
	3	-0.17	-0.59	-1.09	-1.60	-2.18	-2.76	-3.34
	4	-0.04	-0.22	-0.49	-0.80	-1.24	-1.68	-2.12
	5	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9
6	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.73	-1.59	-2.46	-3.33	-4.22	-5.10	-5.98
	2	-0.47	-1.18	-1.92	-2.67	-3.43	-4.20	-4.97
	3	-0.26	-0.80	-1.39	-2.00	-2.65	-3.30	-3.95
	4	-0.10	-0.44	-0.88	-1.33	-1.87	-2.40	-2.93
	5	-0.02	-0.16	-0.39	-0.67	-1.08	-1.50	-1.92
	6	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9
7	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.76	-1.64	-2.54	-3.43	-4.33	-5.23	-6.13
	2	-0.53	-1.29	-2.07	-2.86	-3.66	-4.46	-5.26
	3	-0.33	-0.95	-1.62	-2.29	-2.99	-3.69	-4.39
	4	-0.17	-0.63	-1.16	-1.71	-2.31	-2.91	-3.51
	5	-0.06	-0.34	-0.72	-1.14	-1.64	-2.14	-2.64
	6	-0.01	-0.11	-0.32	-0.57	-0.97	-1.37	-1.77
	7	0	0	0	0	-0.3	-0.6	-0.9

5 おわりに

本研究の最も重要な成果は，定理 3 といえる．この定理によって，密輸量の選択を密輸者の戦略として持たせようとした本研究の新規性は消え，実は密輸を行うか否かの戦略をもつ従来型の研究モデルに帰着されることになった．しかしながら，このことが証明や考察を経て初めて明らかになったことにこの研究の意義がある．また，判別値 $\alpha p_1 - p_2 x$ の正負によってゲームの解が大きく変わることを明らかにしたことは，この研究の出発点となった従来研究 [4] とも関係を持つ．すなわち，密輸決行現場に向かうパトロールは必

ず取締側に有利な期待支払をもたらすとし，判別値が正の場合のみを扱っていた論文 [4] の成果に対し，この研究は新しい事実を補足したことになる．

さて，密輸者にとって禁制品の分割による密輸が有効な場合は当然存在すると考えられ，そのような戦略の存在はこの研究でのモデルを現実的な観点から修正しなければならないことを示唆する．まず，摘発による利益 α，摘発確率 p_1 や密輸成功確率 p_2 は，時点により変化すると考えるのが現実的かも知れない．長期間における活動であれば，両プレイヤー，特に密輸者側の利益に割引を考慮する必要があるかも知れない．また，摘発確率 p_1 や密輸成功確率 p_2 は密輸量に依存すると考える方が自然かも知れない．さらには，事象によっては予定された密輸量 y が再び密輸者に戻される場合もあり得る．これらは，ここでのゲーム $\Gamma(n,k,x)$ が行列ゲームとして定式化されることを本質的に変えるものではないだけに，本研究を拡張する直接的な将来テーマとして挙げられる．

参考文献

[1] V. Baston and F. Bostock, A Generalized Inspection Game, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.171-182, 1991.

[2] M. Dresher, A Sampling Inspection Problem in Arms Control Agreements: A Game-Theoretic Analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1962.

[3] T. Ferguson and C. Melolidakis, On the Inspection Game, *Naval Research Logistics*, **45**, pp.327-334, 1998.

[4] R. Hohzaki, D. Kudoh and T. Komiya, An Inspection Game: Taking Account of Fulfillment Probabilities of Players' Aims, *Naval Research Logistics*, **53**(8), pp.761-771, 2006.

[5] R. Hohzaki, A Compulsory Smuggling Model of Inspection Game Taking Account of Fulfillment Probability of Players's Aims, *J. of the Operations Research Society of Japan*, **49**(4), pp.306-318, 2006.

[6] M. Maschler, A Price Leadership Method for Solving the Inspection's Non-Constant-Sum Game, *Naval Research Logistics Quarterly*, **13**, pp.11-33, 1966.

[7] M. Sakaguchi, A Sequential Game of Multi-Opportunity Infiltration, *Mathematica Janonica*, **39**, pp.157-166, 1994.

[8] M. Thomas and Y. Nisgav, An Infiltration Game with Time Dependent Payoff, *Naval Research Logistics Quarterly*, **23**, pp.297-302, 1976.