数理解析研究所講究録
第 1630 巻 2009 年 10-20

Aggregation Operator と Choquet 積分について

Aggregation operator and Choquet integral

桐朋学園, 早稲田大学・産業経営研　成川康男 (Yasuo NARUKAWA)
Toho Gakuen, IRBA　Waseda University
スペイン科学研究機構 人工知能研究所ヴィセンス トッラ (Vicenc Torra)
IIIA Consejo Superior de Investigaciones Cientificas

1　Aggregation operator とは

Aggregation operator とは、いくつかの数値データを一つの数値に統合するものをいう。平均・分散・メジアンなど代表値の一般化と捉えることもできる。数学的には下記のように定義される写像である。

定義 1.1. $D \subset R^N$ とする。*aggregation operator* :Ag とは写像 $Ag : D \to R$ で下記の性質を満たすものをいう。

(1) *(Unanimity or idempotency)* $Ag(a,\dots,a) = a$ ここで $(a,\dots,a) \in D$ とする。

(2) *(Monotonicity)* $a_i \le b_i$ *for all* $i = 1,\dots,n$, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_N), \mathbf{b} = (b_1,\dots,b_N)$ $\mathbf{a},\mathbf{b} \in D$ であるなら, $Ag(\mathbf{a}) \le Ag(\mathbf{b})$.

この他に様々な条件を加えることもある。例えば

- Boundary condition: $Ag(0,\dots,0) = 0, Ag(1,\dots,1) = 1$
- Intenality: $min_i a_i \le Ag(a_1,\dots,a_N) \le max_i a_i$

などである。また、$D := [0,1]^N$ として $Ag : [0,1] \to [0,1]$ とすることもある。Internality を満たすものを平均型 Aggregation Operator ということがある。平均の研究は古くは古代ギリシアからあり、それを一般化するものも古くからある。たとえば、Cauchy[6] は Internality を満たすものを平均 (moyenne) とよんで研究している。

最近ではコンピュータ科学の分野を中心に、欧米で研究が盛んになってきており、例えば、2001 年から 2 年に一度 Aggregation Operator を専門とする Summer School Agop が開かれ (2007 年はベルギーのゲント、2009 年はスペインのマヨルカ島)、また、単行本も [4, 5, 23] などが出版さ

れている。最近の雑誌の特集としては、IEEE Transactions on Fuzzy Systems や Fuzzy sets and Systems などで特集号が出されている。

こういったことの背景としては、最近の意思決定の応用に関して単純な平均で済まないもの、異質なデータの計測 ($(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と総合 (aggregation) が、特にコンピュータサイエンスの発達とともに必要とされてきたことによる。

ここでは基本的な Aggregation Operator である平均型 Aggregation operator について、それを特殊な形から一般的な形へという方向でを紹介するとともに、その連続化である積分, 特に Choquet 積分が中心的な役割を果たすものとの関係を述べ、最後に、今後の課題について言及する。

2 ファジィ測度と Choquet integral

ここでは、ファジィ測度 (非加法的測度ともいう) と Choquet 積分について、基本的な定義と性質をまとめておく。

定義 2.1. [20] $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。ファジィ測度 (あるいは非加法的測度 a non-additive measure) μ とは実数値集合関数で下の性質を満たすものとする。

(1) $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(X) = 1$

(2) $A \subset B,\ A, B \in \mathcal{B}$ であるとき $\mu(A) \leq \mu(B)$.

ここで、$\mathcal{F}(X)$ を非負可測関数の集合とする、すなわち $\mathcal{F}(X) = \{f | f : X \to R^+, f : \text{可測}\}$ である。

定義 2.2. [7, 13] ファジィ測度 μ に関する $f \in \mathcal{F}(X)$ の Choquet 積分は下の式で定義される。

$$(C)\int f d\mu = \int_0^\infty \mu_f(r) dr,$$

ここで $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$ である。

$X = \{1, 2, \ldots, N\}$ であるとき、The i–th order statistic $a^{(i)}$ [25] とは、R^N 上の関数で $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_N) \in R^N$ を下記のように増加順に並べたものの i 番目である。

$$a^{(1)} \leq \cdots \leq a^{(i)} \leq \cdots \leq a^{(N)}.$$

X が有限のとき the i–th order statistics を使って Choquet integral は下記のように書ける。

$$(C)\int \mathbf{a} d\mu = \sum_{i=1}^{N} (a^{(i)} - a^{(i-1)}) \mu(\{(i) \cdots (N)\}),$$

ここで $a^{(0)} := 0$ とする.

定義 2.3. [8] $f, g \in \mathcal{F}(X)$ とする。f と g が共単調 (comonotonic) であるとは

$$f(x) < f(x') \Rightarrow g(x) \leq g(x')$$

for $x, x' \in X$ であることをいう。また、f と g が strongly comonotonic とは、

$$f(x) < f(x') \Leftrightarrow g(x) < g(x')$$

for $x, x' \in X$ であることをいう。f と g が strongly comonotonic であるとき、$f \sim_s g$ と書く。

ハーン・バナッハの定理より以下のことが示せる。

定理 2.4. $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とし、μ をファジィ測度とする。すべての $f \in C_b(X)$ について, $\mathcal{B}$ 上の確率 $P_{[f]}$ が存在して

$$(C) \int f d\mu = \int f dP_{[f]}.$$

3 Aggregation operator と Choquet 積分

ここでは、特別なの Aggregation Operator のうち、よく用いられるものを紹介し、これと Choquet 積分との関係をみる。

定義 3.1. ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ で $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, $p_i \geq 0$ をみたすものを N 次の重みベクトル *(weighting vector)* という。また、$f_i : [0,1]^N \to [0,1]$ *for* $i = 1, \ldots, N$ を N 個の関数で $\sum_{i=1}^{N} f_i(x_1, \ldots, x_N) = 1$ *for all* $(x_1, \ldots, x_N) \in [0,1]^N$ を満たすものとするとき、ベクトル値関数 $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_N)$ を N 次の重み関数 *(weighting function)* という。

定義 3.2. 重みベクトル $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ に対して重み付き平均 *(the weighted mean)* WM は以下のように定義される*:*

$$WM_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N} p_i a_i = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$$

ここで $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in R^N$ である.

大学入試の試験科目を例としてみてみよう。

例 1. 各教科の点数と重みが下の表のようであるとする。

	英語	数学	国語
得点	80	70	60
重み	0.4	0.4	0.2

このとき、$WM_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = 80 \times 0.4 + 70 \times 0.4 + 60 \times 0.2$ である。

以下のことは定義より明らかである。

命題 3.3. $X := \{1,2,\ldots,N\}$ とし $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_N)$ を重みベクトルとする。2^X の確率測度 P を $P(\{i\}) := p_i$ で定義すると、$\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_N) \in R^N$ に対して

$$WM_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = (C)\int \mathbf{a}dP$$

が成り立つ。

Yager は下記のような Ordered Weighting Averaging operator (OWA operator) を導入した.

定義 3.4. *[26] 重みベクトル $\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_N)$ について, Ordered Weighting Averaging operator は下のように定義される:*

$$OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N} w_i a_{\sigma(i)}$$

ここで σ は $\{1,\ldots,N\}$ の置換で $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$ をみたすものである。また、$\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in R^N$ である。

再び大学入試科目の例で見てみよう。

例 2. a 君と b 君の理科の 4 科の得点が下の表のようだったとする。ここで、$w = (0.5, 0.5, 0, 0)$

	物理	化学	生物	地学
得点 **a**	80	70	30	40
得点 **b**	50	50	60	70

とすると、点数の良いものから 2 科目の得点のみ考慮することになる。このとき、$OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) > OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{b})$ である。一方、バランスを重視して $w = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ とすると、$OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) < OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{b})$ となり、a と b の順位は逆転する。

ここで、OWA　operator と Choquet 積分との関係を見てみよう。$\mathcal{B}$ 上のファジィ測度 μ が対称 (symmetric) [12] であるとは、$|A| = |B|$, $A, B \in \mathcal{B}$ であるなら $\mu(A) = \mu(B)$ が成り立つときをいう。この 対称ファジィ測度を使って OWA operator を Choquet integral で表すことができる。このことは Ralescu によって指摘された。

命題 3.5. *[16] $X := \{1,2,\ldots,N\}$ とする. 任意の $OWA_{\mathbf{w}}$ に対して, symmetric fuzzy measure が存在して $\mu(\{N\}) := w_1$, $\mu(\{1,\ldots,i\}) := w_1 + \cdots + w_i$ for $i = 1,2,\ldots,N$ を満たし、$\mathbf{a} \in R_+^N$ に対して*

$$OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = (C)\int \mathbf{a}d\mu$$

となる.

Torra (1996) は weighted order weighted averaging operator (WOWA) を提案した.

定義 3.6. *[21] 確率 $P : N \to [0,1]$ と非減少関数 $w^* : [0,1] \to R$ が与えられているものとする。the Weighted Ordered Weighting Averaging (WOWA) operator は下の式で定義される。*

$$WOWA_{P,\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N} w_i a_{\sigma(i)},$$

ここで、 σ は $\{1,\ldots,N\}$ の置換で $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$ となるもの、また、 $w_i := w^*(\sum_{j\geq i} P_{\sigma(i)}) - w^*(\sum_{j>i} P_{\sigma(i)})$ $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$.

例 3. 理科の 4 科目の得点と重要度が下の表で与えられているとする。この重要度は合計すると

	物理	化学	生物	地学
得点 $\mathbf{a}$	80	70	30	40
重要度 P	0.2	0.3	0.4	0.1

1 になるが、これを関数 $w^*(x) := x^\alpha$ で歪める。このとき、
$WOWA_{P,\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = (1-0.8^\alpha)\times 80 + (0.8^\alpha - 0.5^\alpha)\times 70 + (0.5^\alpha - 0.4^\alpha)\times 40 + (0.4^\alpha - 0^\alpha)\times 30$ である。ここで、$\alpha \to \infty$ とすると最高点である $WOWA_{P,\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = 80$ であり、$\alpha \to 0$ とすると最低点である $WOWA_{P,\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = 30$ である。

$\mathcal{B}$ 上のファジィ測度 μ が distorted probability　であるとは確率 P があり、$[0,1]$ 上の非減少関数 f があり $\mu = f \circ P$ と書けるときをいう。

命題 3.7. *$X := \{1,2,\ldots,N\}$ とする. $WOWA_{P,\mathbf{w}}$ に対して, distorted probability μ が存在して*

$$WOWA_{P,\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = (C)\int \mathbf{a}d\mu$$

ここで $\mathbf{a} \in R_+^N$ である.

Yager [28] は下記のような一般化された OWA operator を提案した。

定義 3.8. *[28] $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_N)$ を N 次の weighting function とする。ここで、Yager's generalized OWA (YGOWA) は下のように定義される。*

$$YGOWA_{\mathcal{F}}(a_1,\ldots,a_N) = \sum_{i=1}^{N} w_i a_{\sigma(i)}$$

ここで、σ は $\{1,\ldots,N\}$　上の置換で $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$ を満たすもの, w_i は $w_i = f_i(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(N)})$ とする。

さらに一般化された OWA を定義しよう。

定義 3.9. $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_N)$ を N 次の *weighting function* とする。このとき *generalized OWA (GOWA)* は下の式で定義される。

$$GOWA_{\mathcal{F}}(a_1, \ldots, a_N) = \sum_{i=1}^{N} w_i a_{\sigma(i)}$$

ここで、 σ は $\{1, \ldots, N\}$ 　上の置換で $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$ を満たすもの, w_i は $w_i = f_i(a_1, \ldots, a_N)$ とする。

GOWA と YGOWA との違いは f_i にある。YGOWA の方は定義域が限定されていることに注意したい。

命題 3.5 と同様にして以下の命題が成り立つ。

命題 3.10. $X := \{1, 2, \ldots, N\}$ とし、$\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_N)$ を N 次の重み関数とする。このとき $GOWA_{\mathcal{F}}, \mathbf{a} \in R^N$, $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して確率 $\mu_{\mathbf{a}}$ が存在して $\mu_{\mathbf{a}}(\{N\}) := f_1(\mathbf{a})$, $\mu_{\mathbf{a}}(\{1, \ldots, i\}) := f_1(\mathbf{a}) + \cdots + f_i(\mathbf{a})$ を満たし、

$$GOWA_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) = (C) \int \mathbf{a} d\mu_{\mathbf{a}}$$

が成り立つ。

ここで、定理 2.4 により Choquet 積分は GOWA であるが、必ずしも GOWA は Choquet 積分で表せないことに注意する。

ここで GOWA にどのような条件を付け加えたら Choquet 積分になるかは Open Problem とする。

4 Choquet-Stieltjes 積分型 Aggregation Operator

定義 4.1. *[14]* $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とし、μ を $\mathcal{B}$ 上のファジィ測度である。$\varphi : R^+ \to R^+$ は非減少関数とするとき、 *Lebesgue-Stieltjes* 測度 ν_φ *[17]* を

$$\nu_\varphi((a, b)) := \varphi(b - 0) - \varphi(a + 0),$$

where $\varphi(a + 0) := \lim_{x \to a+0} \varphi(x)$, $\varphi(b - 0) := \lim_{x \to b-0} \varphi(x)$、で定義し、$\mu, \varphi$ に関する *Choquet-Stieltjes* 積分 $CS_{\mu,\varphi}(f)$ を

$$CS_{\mu,\varphi}(f) := \int_0^\infty \mu_f(r) d\nu_\varphi(r),$$

で定義する。ここで $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$ である。

$X=\{1,2,\ldots,N\}$ とするとき, Choquet-Stieltjes 積分は $i-$th order statistics を使って

$$
\begin{aligned}
CS_{\mu,\varphi}(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^{N}(\varphi(a^{(i)})-\varphi(a^{(i-1)}))\mu(\{(i)\cdots(n)\}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi(a^{(i)})\{\mu(\{(i)\cdots(n)\})-\mu(\{(i+1)\cdots(n)\})\}
\end{aligned}
$$

となる。このことから以下の命題が成り立つ。

命題 4.2. *[14]* $(X,\mathcal{B})$ を可測空間とし、μ を $\mathcal{B}$ 上のファジィ測度とする。

$\varphi: R^+\to R^+$ は非減少関数とするとき μ,φ に関する f の *Choquet-Stieltjes* 積分は $\varphi(f)$ の *Choquet integral* である。すなわち

$$
CS_{\mu,\varphi}(f)=(C)\int\varphi(f)d\mu
$$

である。

定義 4.3. 重みベクトル $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_N)$ と狭義単調増加関数 ϕ について, *quasi-weighted mean* QWM は以下の式で定義される。

$$
QWM_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})=\phi^{-1}(\sum_{i=1}^{N}p_i\phi(a_i))
$$

ここで $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_N)\in R^N$ である.

例 4. $a_i>0$, $p_i=1/N$ とする。ここで $\phi(x)=\log x$ のとき QWM は相乗平均となり $\phi(x)=1/x$ のときは 調和平均となる。

命題 4.4. $X:=\{1,2,\ldots,N\}$ とし、 $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_N)$ は *a weighting vector* とする. 2^X 上の確率 P を $P(\{i\}):=p_N$ で定義すると

$$
QWM_{\mathbf{p}}(\mathbf{a})=\phi^{-1}(CS_{P,\phi}(\mathbf{a}))
$$

for $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_N)\in R^N$.

次に Losonczi mean を定義しよう。

定義 4.5. *[11]* π_i は関数で ϕ は狭義単調増加関数とする。*Losonczi's mean* LM は下の式で定義される。

$$
LM(a_1,\ldots,a_N)=\phi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\pi_i(a_i)\phi(a_i)}{\sum_{i=1}^{N}\pi_i(a_i)}\right)
$$

この Losonczi's mean は QWM, WM, やその他の平均例えば counter-harmonic mean $\sum a_i^p/\sum a_i^{p-1}$ (the BADD operator [27]) とも呼ばれる) などの一般化になっている [3, 23]。

命題 4.6. $X := \{1, 2, \ldots, N\}$, $\pi_i : R \to R^+$, 狭義単調増加 $\phi : R \to R$ とする. このとき、2^X 上の確率 P が $P_{\mathbf{a}}(\{i\}) := \frac{\pi_i(a_i)}{\sum_{i=1}^N \pi_i(a_i)}$ で定義できて、

$$LM_{\pi,\phi}(\mathbf{a}) = \phi^{-1}(CS_{P_{\mathbf{a}},\phi}(\mathbf{a}))$$

for $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in R^N$.

さらにこの Losonczi mean を一般化しよう。

定義 4.7. *(Generalization Losonczi mean)* $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_N)$ を N 次の重み関数とする。このとき、 *Generalized Losonczi's mean* は下の式で定義できる。

$$GLM_{\mathcal{F}}(a_1, \ldots, a_N) = \phi^{-1}(\sum_{i=1}^N w_i \phi(a_i))$$

ここで w_i は $w_i = f_i(a_1, \ldots, a_N)$ で定義されるものである。

Generalization Losonczi mean と積分との関係は以下のようになる。

命題 4.8. $X := \{1, 2, \ldots, N\}$, $\pi_i : R \to R^+$, 狭義単調増加 $\phi : R \to R$ とし、$\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_N)$ を N 次の重み関数とする。$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in R^N$ に対して 2^X 上の確率 P を $P_{\mathbf{a}}(\{i\}) := \frac{\pi_i(\mathbf{a})}{\sum_{i=1}^N \pi_i(\mathbf{a})}$ で定義すると、

$$GLM_{\mathcal{F},\phi}(\mathbf{a}) = \phi^{-1}(CS_{P_{\mathbf{a}},\phi}(\mathbf{a}))$$

が成り立つ.

以下では、これらの Aggregation Operator の大小関係を見ていこう。μ を $(X, \mathcal{B})$ 上のファジィ測度とする。$\mu(X) = 1$ を仮定することで次の不等式が成り立つ。 [15].

(1) φ が凸なら

$$(C)\int \varphi(f)d\mu \geq \varphi\left((C)\int f d\mu\right).$$

(2) φ が凹なら

$$(C)\int \varphi(f)d\mu \leq \varphi\left((C)\int f d\mu\right).$$

これを利用すると次の命題が得られる。

命題 4.9. (1) φ が凸なら

$$(C)\int \mathbf{a}dP_{\mathbf{a}} \leq GLM_{\mathcal{F},\phi}(\mathbf{a}).$$

(2) φ が凹なら

$$(C)\int \mathbf{a}dP_{\mathbf{a}} \geq GLM_{\mathcal{F},\phi}(\mathbf{a}).$$

上の命題において $p_i = 1/N, \phi(x) = \log x$ とすると相加相乗平均の関係が得られる。

5 終りに

ここでは、平均型 Aggregation Operator について特殊から一般へという方向で、Choquet 積分との関係について対比させながら概観してきた。

コンピュータの発達に基づく人工知能分野の理論・応用研究の発展とともに、様々なデータの統合が必要になってきている。それが意識されて使われているものと、意識されずに使われているものと両方が考えられるが、実際の社会の中で、使われている Aggregation についてどのようなものがあるか、それを体系的にまとめることは今後の研究として、もっとも重要なことであろう。そのほとんどは単純な平均ではなく、かといって複雑で一般的な GLM の形であることも少ないだろう。どういったときに、どのような Aggregation がふさわしいかを考察すること、は重要なことである。また、様々な Aggregation Operator の相互関係も十分に調べきれているとはいえない。本論文で調べたように積分の (ファジィ) 測度が一つの指標となるだろう。応用を考える上で Aggregation Operator として便利なのものは、少ないパラメータで表わされパラメータを調節することで、うまく現実に合うようにできるものである。現在多様な研究がなされていて、多くの論文が発表されているが、これが決定版だというものは未だに存在していない状況である。今後のの課題もまだまだ豊富であるといえよう。

Acknowledgements

Paris.Partial support by the Spanish MEC (projects ARES – CONSOLIDER INGENIO 2010 CSD2007-00004 – and eAEGIS – TSI2007-65406-C03-02) is acknowledged.

References

[1] Bajraktarević, M. (1958) Sur une equation fonctionnelle aux valeurs moyennes, Glanik Mat.-Fiz. i Astr., Zagreb, 13, 243-248.

[2] Bajraktarević, M. (1963) Sur une genéralisation des moyennes quasilineaire, Publ. Inst. Math. Beograd., 3:17 69-76.

[3] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M. (1988) Means and their Inequalities, D. Reidel Publishing Company.

[4] Beliakov,G. Pradera,A. Calvo,T. (2008) Aggregation Functions: A Guide for Practitioners (Studies in Fuzziness and Soft Computing), Springer

[5] Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (eds.) (2002) Aggregation Operators, Physica-Verlag.

[6] Cauchy, A.L. (1821), Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, Imprimerie royale, Paris.

[7] Choquet,G. (1955) Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5,131-295.

[8] Dellacherie, C. (1971) Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg, Leçture Notes in Mathematics 191 77-81.

[9] Fodor, J., Marichal, J.-L., Roubens, M. (1995) Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Trans. on Fuzzy Systems 3:2 236-240.

[10] Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (eds.) (2000) Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications, Physica-Verlag.

[11] Losonczi, L. (1971) Über eine neue Klasse von Mittelwerte, Acta Sci. Math (Acta Univ. Szeged) 32 71-78.

[12] Miranda, P., Grabisch, M. (2002) p-symmetric fuzzy measures, Proc. of the IPMU 2002 Conference, 545-552, Annecy, France.

[13] Murofushi, T., Sugeno, M. (1989) An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems 29 201-227.

[14] Narukawa, Y., Murofushi, T. (2008) Choquet Stieltjes integral as a tool for decision modeling, Int. J. of Intel. Syst. 23 115-127.

[15] Narukawa,Y.,(2007) Distances defined by Choquet integral, IEEE International Conference on Fuzzy Systems,London, CD-ROM [#1159].

[16] Ralescu,A.L., Ralescu, D.A, (1997) Extension of fuzzy aggregation, Fuzzy sets and systems, 86,321-330.

[17] Riesz, F., Nagy, B. (1955) Functional analysis, Frederick Unger Publishing, New York.

[18] Schmeidler, D. (1986) Integral representation without additivity, Proceedings of the American Mathematical Society, 97 253-261.

[19] Sugeno, M., Narukawa, Y., Murofushi, T. (1998) Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space, Fuzzy Sets and Systems 99 205-211.

[20] Sugeno, M.(1974), *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology.

[21] Torra, V. (1996) Weighted OWA operators for synthesis of information, actas del Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE-FUZZ'96) (ISBN 0-7803-3645-3), 966-971, New Orleans, USA.

[22] Torra, V. (1997) The weighted OWA operator, Int. J. of Intel. Syst. 12 153-166.

[23] Torra, V., Narukawa, Y. (2007) Modeling decisions: information fusion and aggregation operators, Springer.

[24] Torra, V., Narukawa, Y. (2007) Modelització de decisions: fusió d'informació i operadors d'agregació, UAB Press.

[25] van der Waerden, B. L. (1969) Mathematical statistics, Springer, Berlin.

[26] Yager, R. R. (1988) On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 18 183-190.

[27] Yager, R. R., Filev, D. P. (1994) Parameterized and-like and or-like OWA operators, Int. J. of General Systems 22 297-316.

[28] Yager, R.R. (1993) Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems, 59 125-148.