

## T-コノルム生成関数による distorted probability の構成

岡崎悦明 本田あおい  
九州工業大学・情報工学部

### 1 はじめに

t-コノルムは  $[0, 1]$  における二項演算であり 1942 年に Menger によって提案された t-コノルムが始まりである [3]. その後定義を少しずつ変えながら研究され, 現在ではファジィ理論において重要な役割を果たしている. それはファジィ集合演算, ファジィ論理演算の拡張演算としての役割であり, また, ファジィ測度とも深い関連がある [1]. 本稿では 1963 年の Schweizer と Sklar の t-ノルム, t-コノルムに関する論文からいくつかの定理を紹介し, ファジィ測度への応用を検討する.

### 2 準備

**定義 1** (t-ノルム [6]).  $[0, 1]$  上の二項演算  $T : \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が次の (T-1)-(T-4) を満たすとき, これを t-ノルムとよぶ.

$$(T-1) \quad T(0, 0) = 0, \quad T(x, 1) = x \text{ for } x > 0,$$

$$(T-2) \quad x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \text{ ならば,}$$

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2),$$

$$(T-3) \quad T(x, y) = T(y, x),$$

$$(T-4) \quad T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z).$$

**定義 2** (t-コノルム).  $[0, 1]$  上の二項演算  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が (T-2)-(T-4) と次の (T-1') を満たすとき, これを t-コノルムとよぶ.

$$(T-1') \quad S(1, 1) = 1, \quad S(x, 0) = x \text{ for } x < 1.$$

t-ノルムと t-コノルムは互いに双対の関係にある. すなわち  $T$  を t-ノルムとすると

$$S(x, y) := 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

は  $t$ -コノルムとなる,  $S$  を  $t$ -コノルムとすると

$$T(x, y) := 1 - S(1 - x, 1 - y)$$

は  $t$ -ノルムとなる.

次にファジィ測度の定義を示す. 本論文を通して,  $X$  を空でない集合,  $\mathcal{F}$  を  $X$  の  $\sigma$ -集合体とする.

**定義 3** (ファジィ測度 [7]). 集合関数  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  が次の条件を満たすとき,  $\mu$  をファジィ測度という.

1.  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1$
2. 任意の  $A, B \in \mathcal{F}$  に対して  $A \subset B$  ならば  $\mu(A) \leq \mu(B)$

**定義 4** ([2]). ファジィ測度  $\mu$  に対して, ある  $t$ -コノルム  $T$  が存在し, 任意の  $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$  に対して

$$\mu(A \cup B) = T(\mu(A), \mu(B))$$

が成り立つとき,  $\mu$  を  $t$ -コノルムに基づくファジィ測度とよぶ.

$T$  が  $t$ -ノルムでは, (T-1) のため有界性を満たさずファジィ測度にならない.

次の  $\lambda$ -ファジィ測度は  $t$ -コノルムに基づくファジィ測度である.

**定義 5** ( $\lambda$ -ファジィ測度). ファジィ測度  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  に対して, ある  $\lambda \in (-1, \infty)$  が存在して, 任意の  $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$  について

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B)$$

が成り立つとき,  $\mu$  を  $\lambda$ -ファジィ測度という.

**命題 6.**  $\lambda$ -ファジィ測度は  $t$ -コノルムに基づくファジィ測度である.

**証明.**  $S(x, y) := x + y + \lambda xy$  とすればよい.

**定義 7** (distorted probability 確率から導かれるファジィ測度). ファジィ測度  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  に対して, ある確率測度  $P(A)$  ( $A \in \mathcal{F}$ ) と非減少関数  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が存在して, 任意の  $A \in \mathcal{F}$  に対して

$$\mu(A) = f \circ P(A)$$

が成り立つとき,  $\mu$  は *distorted probability* または確率から導かれるファジィ測度という.

一般にファジィ測度は加法性をもたない扱いにくい測度であるが, 確率から導かれるファジィ測度は比較的扱いやすいファジィ測度であるといえる. 確率から導かれるファジィ測度は確率  $P$  を単調非減少関数  $f$  で歪めた測度であり, 確率  $P$  と関数  $f$  が決まれば全体が決定される.  $P$  は加法的な測度であり扱いやすい.  $f$  は非減少関数であるので,  $P$  の加法性はくずれるものの  $P$  での測度の大小関係は  $\mu$  に遺伝する.  $\lambda$ -ファジィ測度のようにパラメータで表現されるファジィ測度も扱いやすいファジィ測度である. 例えば  $\lambda$ -ファジィ測度は  $X$  が有限集合ならば, 1点集合の測度とパラメータ  $\lambda$  の値が決まれば全体が決定される.

### 3 Schweizer-Sklar の定理

Menger 以後, Schweizer と Sklar が 1960 年の論文 [4] で群や半群の演算に関する議論をし, 1961 年の論文で triangular-norm ( $t$ -ノルム) の概念を導入した [5]. これらの議論の中で全単射でない関数の逆関数に相当するものを定義する必要が生じ, [4] で擬逆関数に関する議論が行われている.

ここでは 1963 年の Schweizer らの論文 [6] からいくつかの結果を紹介する.

**定理 8** ([6]).  $S(x, y)$  を  $t$ -ノルム,  $0 \leq a_0 \leq 1$  とする.  $I_0 = [0, a_0], I_1 = [a_0, 1], h : [0, 1] \rightarrow I_1$  を連続な増加関数とし,  $h^*$  を次のように定義する:

$$h^*(x) := \begin{cases} 0, & x \in I_0 \\ h^{-1}(x), & x \in I_1, \end{cases}$$

ただし  $h^{-1}$  は  $h$  の逆関数とする. このとき  $[0, 1]$  上の二項演算

$$T(a, b) = h^*(S(h(a), h(b)))$$

は  $t$ -ノルムである.

**例 9.**  $S(x, y) := xy, h(x) := \frac{x^2+1}{2}$  とすると,

$$h^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \sqrt{2x-1}, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

である. このとき新しい  $t$ -ノルム

$$T(a, b) := \begin{cases} 0, & (a^2+1)(b^2+1) < 2 \\ \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2} - 1}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が生成される.

**定理 10** ([6]).  $f$  は  $[0, 1]$  上の連続な単調減少関数で,  $f(0) = b_0 > 0$  ( $\infty$  でもよい) かつ  $f(1) = 0$  とする.

$$f^*(x) := \begin{cases} f^{-1}(x), & x \in [0, b_0) \\ 0, & x \in [b_0, \infty], \end{cases}$$

ただし  $f^{-1}$  は  $f$  の逆関数とする. このとき  $[0, 1]$  上の二項演算

$$T(a, b) := f^*(f(a) + f(b)).$$

は  $t$ -ノルムである.

**定理 11** ([6]).  $S_1$  と  $S_2$  を  $t$ -コノルムとし,  $\rho \in (0, 1)$  とする.  $[0, \rho]$  上の二項演算  $U_1$  と  $[\rho, 1]$  上の二項演算  $U_2$  を次のように定義する:

$$U_1(a, b) := \rho \cdot S_1\left(\frac{a}{\rho}, \frac{b}{\rho}\right),$$

$$U_2(a, b) := \rho + (1 - \rho) \cdot S_2\left(\frac{a - \rho}{1 - \rho}, \frac{b - \rho}{1 - \rho}\right).$$

このとき  $[0, 1]$  上の二項演算

$$S(a, b) := \begin{cases} U_1(a, b) & (a, b) \in [0, \rho] \times [0, \rho], \\ b = \max(a, b) & (a, b) \in [0, \rho] \times [\rho, 1], \\ a = \max(a, b) & (a, b) \in [\rho, 1] \times [0, \rho], \\ U_2(a, b) & (a, b) \in [\rho, 1] \times [\rho, 1] \end{cases}$$

は  $t$ -コノルムである。

#### 4 ファジイ測度の構成法

前章で紹介した Schweizer らの結果は,  $t$ -ノルムや  $t$ -コノルム, 関数  $f$  とその擬逆関数を使って, 新しい  $t$ -ノルムや  $t$ -コノルムを生成するというものである。これらを利用し  $t$ -コノルムに基づく新しい確率から導かれるファジイ測度のクラスを構成することができる。

まず定理 8 を利用して確率から導かれるファジイ測度を構成する。この定理では  $t$ -ノルムが生成されるが, ファジイ測度を生成するには  $t$ -コノルムを用いるので, 双対関係にある  $f, f^*$  を用いて定式化する。

**定理 12.**  $f$  は  $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  なる連続な単調関数で,  $f(0) = 1$  かつ  $f(1) = b > 0$  とする。このとき集合関数  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$\mu(A \cup B) := f^*(f(\mu(A)) \cdot f(\mu(B)))$$

は確率から導かれるファジイ測度である。

**証明.**  $f(\mu(A \cup B)) = f(\mu(A)) \cdot f(\mu(B))$  であるから, 確率  $P$  を

$$P(A) := \log_b(f(\mu(A))) / \log_b(f(\mu(X)))$$

と置けば,

$$\mu(A) = (\log_b \circ f)^* \circ P(A)$$

となる。  $g(x) := (\log_b \circ f)^*(x)$  は非減少かつ  $g(0) = 0, g(1) = 1$  さらに  $\mu = f \circ P$  となり,  $\mu$  は確率から導かれる。

**例 13.**  $f(x) := \lambda x^p + 1, p > 0, \lambda > -1$  とする。このとき,  $f(0) = 1, f(1) > 0$  かつ

$$f^*(f(x)f(y)) = \left(x^p + y^p + \lambda x^p y^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

である。今の場合  $A \cap B = \phi$  のとき

$$\mu(A \cup B) = \left(\mu(A)^p + \mu(B)^p + \lambda \mu(A)^p \mu(B)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

をみたすファジイ測度を得られる。

次に定理 10 を利用して確率から導かれるファジィ測度を生成する.

**定理 14.**  $f$  は  $[0, 1]$  上の連続な単調増加関数で,  $f(0) = 0$  かつ  $f(1) = b_0 < 1$  とする.

$$f^*(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, b_0) \\ f^{-1}(x), & x \in [b_0, 1], \end{cases}$$

ただし  $f^{-1}$  は  $f$  の逆関数とする. このとき集合関数  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$\mu(A \cup B) := f^*(f(\mu(A)) + f(\mu(B)))$$

は確率から導かれるファジィ測度である.

**証明.** ファジィ測度であることを示す. 有界性は明らかであるので, 単調性を示せばよい.  $\mu(A) \geq \mu(B)$  として一般性を失わない.

(i)  $f(\mu(A)) + f(\mu(B)) < b_0$  のとき

$$f^*(f(\mu(A)) + f(\mu(B))) = \mu(A) + \mu(B) \geq \mu(A).$$

(ii)  $f(\mu(A)) + f(\mu(B)) \geq b_0$  のとき

$$f^*(f(\mu(A)) + f(\mu(B))) = 1 \geq \mu(A).$$

となり単調性を満たす. 次に確率から導かれることを示す. 任意の  $A \in \mathcal{F}$  に対して  $P(A) := f(\mu(A))$  とおくと,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

となるので  $P$  は確率測度,

$$\mu(A) = f^* \circ P(A)$$

が成り立ち,  $f^*$  は非減少関数であるので  $\mu$  は確率から導かれる. □

最後に定理 11 を利用して複数のファジィ測度から新しいファジィ測度を生成することを考える. 以下の定理を用いると区間に応じて性質のことなるファジィ測度を合成することができる.

**定理 15.** ファジィ測度  $\mu_1, \mu_2$  に対して  $[0, 1]$  上の二項演算  $h_1, h_2$  が存在して

$$\mu_1(A \cup B) = h_1(\mu_1(A), \mu_1(B)),$$

$$\mu_2(A \cup B) = h_2(\mu_2(A), \mu_2(B))$$

が成り立つとする.  $\rho \in (0, 1)$  とし,  $[0, \rho]$  上の二項演算  $g_1$  と  $[\rho, 1]$  上の二項演算  $g_2$  を次のように定義する.

$$g_1(a, b) := \rho h_1\left(\frac{a}{\rho}, \frac{b}{\rho}\right),$$

$$g_2(a, b) := \rho + (1 - \rho) h_2\left(\frac{a - \rho}{1 - \rho}, \frac{b - \rho}{1 - \rho}\right).$$

このとき, 以下のように定義される集合関数  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  はファジィ測度である. 任意の  $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$  に対して

$$\mu(A \cup B) := \begin{cases} g_1(\mu(A), \mu(B)), & (\mu(A), \mu(B)) \in [0, \rho] \times [0, \rho), \\ \mu(B) = \max(\mu(A), \mu(B)), & (\mu(A), \mu(B)) \in [0, \rho] \times [\rho, 1], \\ \mu(A) = \max(\mu(A), \mu(B)), & (\mu(A), \mu(B)) \in [\rho, 1] \times [0, \rho), \\ g_2(\mu(A), \mu(B)), & (\mu(A), \mu(B)) \in [\rho, 1] \times [\rho, 1]. \end{cases}$$

## 参考文献

- [1] 中島信之, t-ノルムの全て, 三恵社, 2001.
- [2] D. Dubois and H. Prade, A class of fuzzy measures based on triangular norms, *Int. J. General Systems*, **8**, pp. 43-61, 1982.
- [3] K. Menger, Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **28**, 535-537, 1942.
- [4] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific. J. Math.*, **10**, pp. 313-334, 1960.
- [5] B. Schweizer and A. Sklar, Associative functions and statistical triangle inequalities, *Publ. Math. Debrecen*, **8**, 169-186, 1961.
- [6] B. Schweizer and A. Sklar, Associative functions and abstract semigroups, *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 69-81, 1963.
- [7] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gains, editors, *Fuzzy automata and decision processes*, pp. 89-102, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [8] T. Terano, K. Asai and M. Sugeno, *Fuzzy Systems Theory and its Applications*, Academic Press, Sandiego, CA 1992(English translation of ファジィシステム入門, オーム社, 1987).
- [9] Z. Wang and G. J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York and London, 1992.

[連絡先]

〒820-8502 飯塚市川津 680 番 4

九州工業大学情報工学部

岡崎悦明