数理解析研究所講究録
第1631巻 2009年 98-106

Analysis of hovering insect in two-dimensional space

飯間信, 北大電子研, 〒001-0020 札幌市北区北 20 条西 10 丁目,
E-mail:makoto@nsc.es.hokudai.ac.jp

2008年11月27日

1 はじめに

流体中で運動する物体に働く力を理論的に求めることは流体力学の基本的な問題であるとともに様々な応用につながる大事な問題である。もし流れが2次元的であり、非圧縮かつ定常で渦無しでの場合は、物体に働く力は Blasius の公式により与えられる。Blasius の公式は物体を囲む任意の閉曲線上での積分で表されるためこの閉曲線を十分に大きく取ると流れの漸近挙動だけから物体に働く力が計算できる。具体的には一様流と物体周りの循環が分かればよく、物体の形状や物体近傍の流れの詳細は必要がない。

流れが2次元的であり、非圧縮かつ定常であるが渦度がゼロでない場合は、たとえば低レイノルズ数流れにおいて一様流中に置かれた物体に働く力を求めるという問題に対応する。今井 [10] によりこの場合の公式が与えられている。この公式は複素形式を用いて記述されており、物体に働く力は、やはり物体を囲む任意の閉曲線上での積分で表されている。また流れの渦あり領域は物体を含む放物領域に限られること、物体に働く力 $\boldsymbol{F} = (X, Y)$ は放物領域の外側での複素速度ポテンシャルを用いると、ポテンシャル流れの場合と同様に $X + iY = \rho U(m + i\Gamma)$ (ρ, U, m, Γ はそれぞれ流体の密度、一様流の速度、流れの湧きだしおよび循環成分を表す) と表されることを示した（この公式自体は Oseen 近似を用いて Filon[3] が先に導いている)。

ここで昆虫の飛翔のような場合をかんがえる [2, 4, 5, 6, 7, 8]。このとき翼のはばたきに伴って剥離渦が生じ渦構造が形成される。その渦構造は翼や他の渦構造と相互作用することで位置や形を変え、翼に非定常な力を生じさせる。このような力は飛翔に本質的であると考えられている。このような渦の発生と相互作用を伴う場合の力の生成の研究に関しては実験や数値計算が主であり、流れの漸近挙動に基づいた理論的な理解はまだなされていない。しかしこのような一般的な場合、つまり2次元流れだが非圧縮、非定常、渦度あり

の場合であっても、今井 [12] により複素形式の公式が与えられており、物体を含む任意の閉曲線上での積分で物体に働く力が計算できる。

本論文では、今井による公式を周期運動する物体に適用することで、生成される力が流れの平均成分だけで記述でき、一様流に比例することを示す。また応用例として、一様流を小さくしたときの極限を考え、2次元空間で空中停止する昆虫に働く力が非常にゆっくりではあるがゼロに収束することを示す [9]。

2 問題の設定

ここでは無限に広がる空間内の2次元非圧縮流体を考え、無限遠での流速が $x-$ 軸に平行に U であるとする。この流体の中を物体 B が任意の速度で周期 T の時間周期的に運動し、それにより同じ周期をもつ時間周期的な流れが発生するものとする.

流体運動は Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

に従う物とする。ここで $\boldsymbol{u} = (u, v)$ は速度場, ρ は密度, p は圧力, ν は動粘性率である。

方程式 (1) の回転を取ることで、渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega = \frac{\partial(\Psi, \omega)}{\partial(x, y)}, \tag{2}$$

を得る。ここで $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ は渦度を表し、Ψ は流れ関数 ($u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$) である。物体 B に働く力の時間平均を $\langle \boldsymbol{F} \rangle = (\langle F_x \rangle, \langle F_y \rangle)$ と書くと、

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle = \int_t^{t+T} \boldsymbol{F} \mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{F} = (F_x, F_y), \tag{3}$$

$$F_i = \iint_B \sigma_{ij}(t) n_j \mathrm{d}S \quad (i = x, y), \tag{4}$$

と書かれる。ここで $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ は応力テンソルの成分であり ($u_x = u, u_y = v$), $\mu = \rho\nu$ は粘性係数である。また $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ な B 上の単位外向き法線ベクトルである。本論文の第一の目的は $\langle \boldsymbol{F} \rangle$ を流れの漸近的性質によりあらわすことである。

3 流れの漸近挙動

物体から遠く離れた場所での速度場について考える。物体近くに原点 O をとり、流れが無限遠で一様流 $(U,0)$ に漸近するとすると、流れ場は

$$\boldsymbol{u} = U\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{v}, \quad \lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty} \boldsymbol{v} = 0, \tag{5}$$

のように書かれる。ここで $\boldsymbol{e}_x$ は x 方向の単位ベクトルである。流れ関数 Ψ を $\Psi = Uy + \psi$ のように書くと、式 (2) は

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + 2\nu k\frac{\partial\omega}{\partial x} - \nu\Delta\omega = \frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)}, \tag{6}$$

のように変形できる ($k = \frac{U}{2\nu}$) であり、$\boldsymbol{v}$ は ψ で定まる。

十分遠方では $|\boldsymbol{v}| \ll U$ が成り立つので ψ と ω も小さいと仮定できる。このため微小パラメータ ϵ を導入して ω と ψ を $\omega = \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + ..., \psi = \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + ...$ のように展開し、(6) に代入して $O(\epsilon)$ の項を取り出すと Oseen 方程式

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial t} + 2\nu k\frac{\partial\omega_1}{\partial x} = \nu\Delta\omega_1. \tag{7}$$

が得られる。場の時間周期性から $\omega_1(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\omega_1(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\boldsymbol{x})e^{i\Omega_n t}, \;\; \Omega_n = \frac{2\pi}{T}n \;\; (n \in \boldsymbol{Z}), \tag{8}$$

のように Fourier 展開でき、更に $A_n(\boldsymbol{x}) = B_n(\boldsymbol{x})e^{kx}$ と書くと、$B_n(\boldsymbol{x})$ を定める方程式は、

$$(\Delta - s_n^2)B_n = 0, \;\; s_n^2 = k^2 + i\frac{\Omega_n}{\nu}. \tag{9}$$

のようになる。

$s_n = r_n e^{i\theta_n}$ とおき、$\mathrm{Re}(s_n) \equiv \alpha_n = r_n\cos\theta_n$ および $\mathrm{Im}(s_n) \equiv \beta_n = r_n\sin\theta_n$(Re と Im は実部と虚部を表す) とおくと、不等式 $\alpha_n > 0, \;\; \frac{\alpha_n}{k} \geq 1$ (等号成立は$\beta_n = 0$ の場合) が成立することを示すことができる。方程式 (9) の解で、$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} B_n = 0$ を満たす物は、

$$B_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{n,m}H_m^{(1)}(z)e^{im\theta}, \;\; z = is_n r, \tag{10}$$

と書ける。ここで $R_{n,m}$ は定数、$H_m^{(1)}$ は第一種 Hankel 関数, (r,θ) は極座標における位置座標である。$H_m^{(1)}$ の漸近形は:

$$H_m^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{\pi}{2}m - \frac{\pi}{4}\right)\right] \ (r \to \infty). \tag{11}$$

である。以上をまとめると (7) の時間周期解は

$$\omega_1(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{m,n}(\boldsymbol{x},t), \tag{12}$$

$$\omega_{m,n}(\boldsymbol{x},t) = C_{m,n} e^{i\Omega_n t} e^{kx} e^{im\theta} H_m^{(1)}(z), \tag{13}$$

($C_{m,n}$ は定数) と書けることになる。

式 (12) は $\omega_{m,n}$ の重ね合わせで書かれるが、遠方で $\omega_{m,n}$ が重要となる領域を考察する。$p_n = \frac{\alpha_n}{k}$ とおくと、以下の不等式が成立する:

$$|\omega_{m,n}| \leq C_{\max} r^{-\frac{1}{2}} \exp[-kr(p_n - \cos\theta)], \tag{14}$$

($C_{\max}$ はある定数)

ここで不等式

$$kr(p_n - \cos\theta) < C, \tag{15}$$

が成立する領域を考えると、この領域内では $\omega_{m,n}$ は値を持つが、その外側では $\omega_{m,n}$ は指数関数的より早く減少する。式 (15) で表される領域を今後 wake と呼ぶことにする。$p_n \geq 1$ なので、式(15) で定められる領域は、$p_n = 1\ (n = 0)$ の場合、放物線 $x = \frac{k}{2C}y^2 - \frac{C}{2k}$ の内部、$p_n > 1\ (n \neq 0)$ の場合、楕円 $k^2(p_n^2 - 1)\left\{x - \frac{C}{k(p_n^2-1)}\right\}^2 + k^2 p_n^2 y^2 = \frac{p_n^2}{p_n^2-1}C^2$ の内部となる。$\omega_{m,0}$ は流れの時間平均成分に対応し、この成分は定常 Oseen 方程式の wake と一致する [10]. 一方、$n > 0$ の場合は非定常成分に対応し、領域は有界である。これらの式から、$\omega_{m,n}$ がしめる領域 $A_n (n \geq 1)$ 間での包含関係は、$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, のようになる。なお、領域 $A_n(n \geq 1)$ は一様流がゼロの極限 $k \to 0$ でも有界にとどまることを示すことができる。

まとめると、ω_1 の時間平均成分、変動成分はそれぞれ $\langle\omega_1\rangle(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{m,0}, \omega_1'(\boldsymbol{x},t) \equiv \omega(\boldsymbol{x},t) - \langle\omega_1\rangle(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{m,n}$ のように書かれ、$\langle\omega_1\rangle$ は放物線内部 A_0 で大きな値をもち、ω_1' は楕円内部 A_1 で大きな値をもつ。これらの外側では値は指数関数より早くゼロに収束する。なお、$O(\epsilon^2)$ 以上の項を計算したばあいでも ω_m' は ω_1' と同じ形になることが示せるため [9]、全渦度場の時間平均成分からのずれ ω' は楕円領域内にとどまり、その外部では流れは定常と見なせる。定常な場合の漸近挙動は今井 [10] により調べられているので、その結果を用いて次章以降の解析に役立てることが出来る。

4 周期運動する物体に働く力の時間平均

前節で見たように、周期運動する物体周りの流れの漸近挙動は、十分に遠く離れると時間平均成分だけしか現れないことが分かった。この結果を用いて周期運動する物体に働く力の時間平均を求めよう。２次元空間内で任意の運動をする任意形状の物体に働く力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ に働く力は、今井 [12] により以下のように与えられている:

$$F = -\frac{i}{2}\rho \oint_C \overline{W}^2 \mathrm{d}\overline{z} - 2\mu \oint_C z\frac{\partial \omega}{\partial z}\mathrm{d}z + i\rho \oint_C \omega z \mathrm{d}\Psi \tag{16}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ -i\rho \int_S z\omega \mathrm{d}V - \frac{i}{2}\rho \oint_B z(\overline{W}\mathrm{d}\overline{z} + W\mathrm{d}z) \right\}. \tag{17}$$

ここで $F = X + iY$、$W = u - iv$ は複素速度、$\overline{W}$ は W の複素共役である。注意すべき点は、公式中の量は一般に z と $\overline{z}$ を独立変数として持つため、複素関数の意味で解析関数ではないということである。特に W は一般には複素速度ポテンシャルを持たない。$W, \Psi,$ および ω の間の関係はそれぞれの定義から

$$W = 2i\frac{\partial \Psi}{\partial z},\ \ \omega = -2i\frac{\partial \overline{W}}{\partial z}, \tag{18}$$

となることが容易に分かる。

ここで周期流の仮定と前節で得た性質を用いて公式を変形する。周期関数 A を平均成分 $\langle A \rangle$ と変動成分 A' に分けたとき、２つの周期関数 A, B の積の平均は $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A'B' \rangle$ となる。このことを用いて式 (17) の時間平均をとると、

$$\begin{aligned}\langle F \rangle = &-\frac{i}{2}\rho \oint_C \langle \overline{W} \rangle^2 \mathrm{d}\overline{z} - 2\mu \oint_C z\frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial z}\mathrm{d}z + i\rho \oint_C \langle \omega \rangle z \langle \mathrm{d}\Psi \rangle \\ &-\frac{i}{2}\rho \oint_C \langle \overline{W}'^2 \rangle \mathrm{d}\overline{z} + i\rho \oint_C z\langle \omega' \mathrm{d}\Psi' \rangle\end{aligned} \tag{19}$$

となる。W と ω の関係は線型であるので $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}W' = -\frac{1}{2}i\omega'$ が成立する。前章で見たように ω' は楕円領域 A_1 の外では急激に 0 に近づくため C を A_1 を含むほど大きく取ると C 上で $\omega' \simeq 0$ と見なせる。すると W' はこの領域で解析的となるため、$W' = a_1 z^{-1} + O(z^{-2})$ と表される ($W' \to 0$ であることを用いた)。以上より、C を無限に大きく取る極限では $\oint_C \overline{W}'^2 \mathrm{d}\overline{z} = i\rho \oint_C z\langle \omega' \mathrm{d}\Psi' \rangle = 0$ が成立する。つまり流れの漸近挙動のうち時間平均成分だけが分かれば物体に働く力が計算出来るのである。結局、

$$\langle F \rangle = -\frac{i}{2}\rho \oint_C \langle \overline{W} \rangle^2 \mathrm{d}\overline{z} - 2\mu \oint_C z\frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial z}\mathrm{d}z + i\rho \oint_C \langle \omega \rangle z \langle \mathrm{d}\Psi \rangle. \tag{20}$$

(C の半径は十分大きい) という式で周期運動する物体に働く力が求められる。ところがこの公式 (20) は定常流に関する公式と同じ形をしており、更に定常流中に置かれた物体周りの流れは今井 [10] により既に研究されていて、物体に掛かる力が

$$\langle F \rangle = \rho U(\langle m \rangle + i\langle \Gamma \rangle), \tag{21}$$

と表される。結局周期流であっても、定常流と同じ公式が使えることが分かった。

5 応用例

ここでは応用例として昆虫の飛翔を考える。昆虫が周期的にはばたき運動を行い、その結果平均してある一方向に進んでいる場合を考える。その方向が完全に水平ではなく、鉛直成分をもつ場合を考えるとはばたき運動で生成された力が重力と釣り合うことが定常状態の実現に必要、つまり進行速度の大きさによらず進行方向成分の推力がゼロより大きくなければならない。この進行方向を x 軸にとり、昆虫の平均進行速度を $\langle V \rangle$ とすると時間平均した力の x 成分 $\langle X \rangle$ は式 (21) により $\langle X \rangle = -\rho\langle V \rangle\langle m \rangle$ となる。$\langle m \rangle$ を見積もるために流れの漸近挙動を Oseen 近似により調べることにする。Ossen 方程式の一般解 (方程式 (7) の時間平均) は

$$\langle W \rangle(x,y) = e^{kx}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n K_n(kr)e^{ni\theta} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \tag{22}$$

(C_n は定数,$K_n(kr)$ 第一種の変形ベッセル関数、$r = |z|$, $f(x,y) = f(z)$ $(z = x + iy)$ は複素速度ポテンシャルであり、以下の形を持つ [11]:

$$f(z) = -\langle V \rangle z + \frac{\langle m \rangle + i\Gamma}{2\pi}\log z - i\frac{k^{\frac{1}{2}}m^2}{4\pi^{\frac{1}{2}}U}\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \ldots \tag{23}$$

この式を用いて $\langle m \rangle$ の $k \to 0$ における挙動を見積もる。非圧縮流れなので、物体を含む大きな円内から円外へのフラックスは全体でゼロとなる。$K_n(z)$ の漸近形などを使ってこの大きさを見積もると、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{k}\mathrm{Re}(C_n) + \langle m \rangle = 0, \tag{24}$$

という関係式が得られる。

他方、十分遠方で、流れが Oseen 方程式で良く記述できる場所を一点考え、原点からの距離を $r = r_0$ とすると、$\langle V \rangle \to 0$ $(k \to 0)$ の極限で kr_0 はゼロに収束する。このとき,

K_n は $K_0(kr_0) \simeq -\ln(\frac{1}{2}kr_0), K_n(kr_0) \simeq \frac{1}{2}(n-1)!(\frac{1}{2}kr_0)^{-n}$ $(n \geq 1)$ のような漸近形をもつ。これらは $kr_0 \to 0$ の極限で発散する。そこで、実際の昆虫飛翔に対応して流速がどこでも有限である場合を考え、Oseen 方程式の一般解 (22) を用いると、係数 C_n は

$$C_0 = O(\frac{1}{\ln(kr_0))}), \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}C_1 e^{i\theta} - \frac{\langle m \rangle}{2\pi} = O(kr_0), \tag{26}$$

$$C_n = O((kr_0)^n)\ (n \geq 2). \tag{27}$$

のように評価される。結局式 (24) から、

$$\langle m \rangle = \frac{D_0}{k\ln(kr_0)} + O(kr_0), \tag{28}$$

(D_0 はある定数) となることがわかる。最終的に、$\langle X \rangle$ の挙動として、

$$\langle X \rangle = \frac{\rho\nu}{2}k\langle m \rangle = \frac{D_0'}{\ln(kr_0)} + O(kr_0). \tag{29}$$

(D_0' は kr_0 と独立な定数) であることがわかり、$\langle V \rangle \to 0$ の極限で $\lim_{\langle V \rangle \to 0}\langle X \rangle = \lim_{kr_0 \to 0}\langle X \rangle = 0$ となることがわかる。つまり 2 次元空間中で有限重力下ではばたき飛行を行う昆虫は、発生する流れが周期的であるとすると、はばたき方の詳細に寄らず空中停止の極限で生成する力がゼロとなり飛べなくなる。

6 議論および結論

ここでは今井の公式および粘性定常流れの表式を用いて周期運動する物体に働く力の表式がその平均成分で表されること、その応用例として昆虫飛翔ではばたき飛行が生成する力について議論した。特に空中停止の極限において発生する力がゼロに収束することをしめした。

ここでの議論は流れの遠方場の性質のみに依存しており、境界運動や流れの詳細によらない。これはポテンシャル流で物体周りの循環や一様流といった少数の流れの性質だけから翼に掛かる力が計算できることに似ている。一般には流れは渦有りとなるが、遠方場では渦が重要な領域は放物領域に限られており外側ではポテンシャル流で良く記述される。そのポテンシャル流の湧きだし成分と循環成分が翼に掛かる力の時間平均を表している。

昆虫の飛翔などの解析においてはこれまで翼の運動の詳細や渦構造の詳細、あるいはそれらの動力学の解析が行われてきたが、ここでの結果は力を決める量は遠方場の性質のみ

に表れるということである。今後渦構造と遠方場の関係を調べることで昆虫飛翔時に昆虫に働く力の予測や評価が可能になるものと思われる。

昆虫の空中停止に関する結果は、実は Stokes のパラドックスと同等の構造を持っている。というのは流れが周期的である場合でも遠方の流れは平均流で記述され、空中停止（つまり一様流がゼロ）の極限では遠方場は Stokes 方程式で記述される。この極限でも変動成分は有界にとどまる。よく知られているように 2 次元で一様流中の物体周りの流れを計算するとき、無限遠で有界な Stokes 方程式の解は存在しないので、無限遠で有界な解を求めようとすると力がゼロとなってしまうのである [9]。

ここでの仮定は境界運動が周期的で、かつ流れが周期的であるというものである。境界運動の周期性と流れの周期性はもちろん一般には同等でなく、境界運動が周期的であっても流れが非周期的になりうる [1]。非周期的な流れを周期的な流れの周期 T が無限大になった極限と考えることにすると、流れの変動成分はもはや有界領域にとどまらずここでの議論は成り立たない。このような場合境界運動が周期的であっても重力下で空中停止が可能となるかもしれないが、その際は生成する力も非定常となるため何らかの制御系を考慮する必要性があると考えられる。

最後に、東工大の宮本安人博士には証明を読んでいただいたことに感謝します。また本研究は科研費 (19740228,20033009) の助成を受けたものである。

参考文献

[1] P. Blondeaux and L. Guglielmini. Chaotic flow generated by an oscillating foil. *AIAA JOURNAL*, 43(4):918–922, 918–922 2005.

[2] C. P. Ellington. The aerodynamics of hovering insect flight. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, 305:1–180, 1984.

[3] F. N. G. Filon. The forces on a cylinder in a stream of viscous fluid. *Proc. Proc. R. Soc. Lond. A.*, 113:7–27, 1926.

[4] M. Iima and T. Yanagita. Is a two-dimensional butterfly able to fly by symmetric flapping? *J. Phys. Soc. Japan*, 70(1):5–8, 2001.

[5] M. Iima and T. Yanagita. An Analysis of a Symmetric Flapping Model: A Symmetry-Breaking Mechanism and its Universality. *Theor. Appl. Mech.* , 50:237–245, 2001.

[6] M. Iima and T. Yanagita. Asymmetric motion of a two-dimensional symmetric flapping model. *Fluid Dyn. Res.* , 36:407–425, 2005.

[7] M. Iima and T. Yanagita. A transition from ascending flight to vertical hovering: a study

of a symmetric flapping model. *Europhys. Lett.* ,74:55–61, 2006.

[8] M. Iima. A two-dimensional aerodynamic model of freely flying insects. *J. Theor. Biol.* , 247:657–671, 2007.

[9] M. Iima. A paradox of hovering insect in two-dimensional space. *J. Fluid Mech.* , 617:207–229, 2008.

[10] I. Imai. On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to filon's paradox. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 208:487–516, 1951.

[11] I. Imai. A new method of solving oseen's equations and its application to the flow past an inclined elliptic cylinder. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 224:141–160, 1954.

[12] 今井 功. 仮想質量と仮想角運動量 – 渦運動への応用. 第 29 回日本物理学会予稿, 29:14–16,1974.