数理解析研究所講究録
第 1632 巻 2009 年 96-105

ヒルベルト空間の中のいくつかの空間の配置の幾何

(Geometry of the relative position of several subspaces in a Hilbert space)

榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto) 甲子園大学総合教育研究機構

この仕事は、綿谷安男氏との共同研究である。この論説の内容は、以下の通りである。(主に、[EW2]の内容の紹介であり、一部に準備中の結果[EW3]のアナウンスを含んでいる。)

(1)我々の仕事の動機とその枠組み　**(2)主結果**
(3)直既約ヒルベルト表現と準同型代数　**(4)拡張されたDynkin 図形のdefect**
(5)コクセター関手と向き付け変更

(1)我々の仕事の動機とその枠組み

われわれの仕事の動機は次の通りである。次の仕事の無限次元ヒルベルト空間への拡張を行う。

(1)**Gelfand-Ponomarevの分類定理**(1970)Problem of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space (有限次元ヒルベルト空間の中の4つの部分空間の組で直既約なものの完全分類)

(2)**Gabrielの定理**

有限連結クイバーで、有限次元の直既約表現は有限個だけであるものは、その下のグラフがDynkin図形A_n, D_n, E_6, E_7, E_8の一つに限る。

何故、4 個の部分空間の組を考えるのか。 空間 K を、有限次元ヒルベルト空間とし、作用素 T は、K 上の線形作用素としよう。$H = K \oplus K$ の中の次の4個の部分空間の組を考えよう。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x,x); x \in K\}, E_4 = \{(x,Tx); x \in K\}$$

それを次の記号$S_T = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$で書くことにする。この組 S_T は、作用素Tに標準的に結びついていると言われる。S を K上の線形作用素とする。このとき, $S_T = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$ と Tに対して、次のことが成立する。S が T とsimilarであるのは、S_S と S_Tが同型であるときに限る。この方法で T の情報は、S_Tの情報で捕まえることが出来る。

4 個の部分空間の (一般に、n 個の部分空間の)枠は、次である。

定義:H をヒルベルト空間として、E_1, E_2, E_3, E_4 を Hの中の閉部分空間とする。

このとき、$S = (H; E_1, E_2, \ldots, E_n)$ を、n-部分空間の組という。2つの n-部分空間の組 $S = (H; E_1, E_2, \ldots, E_n)$,と$T = (K : F_1, F_2, \ldots, F_n)$ が**同型**とは、ある有界可逆線形作用素 $\Phi \in B(H,K)$ で、$\Phi(E_i) = F_i (i = 1, \ldots, n)$ を満たすものが存在するときを言う。このとき、そのことを $S \simeq T$で表す。その直和$S \oplus T$ は、次で定義される。

$S \oplus T = (H \oplus K; E_1 \oplus F_1, E_2 \oplus F_2 \ldots, E_n \oplus F_n)$.

n-部分空間の組$S = (H; E_1, E_2, \ldots, E_n)$ が 0 であるとは、$H = 0$のときをいう。

一つの組 $S = (H; E_1, E_2, \ldots, E_n)$ が**直既約**であるとは、もし $S \simeq S_1 \oplus S_2$ であるとき、$S_1 \simeq 0$ であるか $S_2 \simeq 0$がなりたつときをいう。

一般のヒルベルト空間の中の直既約な n−部分空間の組 を調べよう。n=1については, $S = (H; E_1) = (\mathbb{C}; \mathbb{C})$ であるか、$(\mathbb{C}; 0)$. である。n=2, については、
$S = (H; E_1, E_2) = (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C}), (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0), (\mathbb{C}; 0, \mathbb{C}), (\mathbb{C}; 0, 0)$. である。n=3, については、もし $\dim H < \infty$であれば、$S = (H; E_1, E_2, E_3), \dim H = 1, \dim E_i = 0$ or 1,と、その他に、

$\dim H = 2, S = (H; E_1, E_2, E_3) = (\mathbb{C}^2; \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ のみが、存在する。

$\dim H = \infty$. については、未解決の問題である。もし Halmosの transitive lattice 問題が肯定的に解決されると、その存在が導かれる。

n=4 については、有限次元 Hilbert 空間の中の直既約4−部分空間の組の完全分類が存在する。その分類では、直既約4−部分空間の組の様々な型のものが現れる。例えば、ジョルダン標準形が現れる。

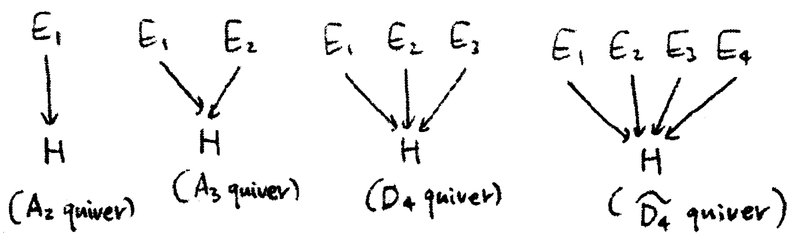
無限次元ヒルベルト 空間では,非可算個の 直既約 標準4−部分空間の組 が現れる。例えば、S を ヒルベルト 空間上の片側シフトとする。このとき、S_S は、直既約である。更に、直既約 標準4−部分空間の組に同型でない非可算個の直既約4−部分空間の組が存在する。

ここで、Gelfand−Ponomarev の有限次元ヒルベルト空間の中の直既約な4個の部分空間の組についての分類結果を挙げておこう。それは、直既約な4個の部分空間の組 $S = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$に対する不変量defect$\rho(S) = \sum_{i=1}^4 \dim(E_i) - 2\dim(H)$によって、次の形で分類される。$H$の部分集合$M$について、$[M]$で、$M$から生成される閉部分空間を表す。

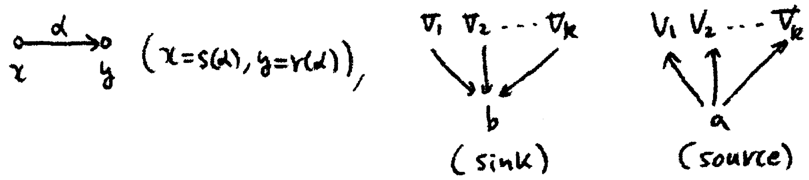
(I) $\dim H = 2k (k = 1, 2, \ldots)$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k]$,
$\{e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k\}$ は Hの基底とする。
(I_a) $\rho(S) = -1$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k], E_2 = [f_1, \ldots, f_k], E_3 = [e_2 + f_1, \ldots, e_k + f_{k-1}], E_4 = [e_1 + f_1, \ldots, e_k + f_k$
(I_b) $\rho(S) = +1$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k], E_2 = [f_1, \ldots, f_k], E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \ldots, e_k + f_{k-1}, f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \ldots, e$
(I_c) $\rho(S) = 0$の場合(パラメータは、なし).
$H = [e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k], E_2 = [f_1, \ldots, f_k], E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \ldots, e_k + f_{k-1}], E_4 = [e_1 + f_1, \ldots, e_k +$
(I_d) $\rho(S) = 0 (\lambda \neq 0, 1)$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k], E_2 = [f_1, \ldots, f_k], E_3 = [e_1 + \lambda f_1, e_2 + f_1 + \lambda f_2, \ldots, e_k + f_{k-1} + \lambda f_k], E_4 =$
(II) $\dim H = 2k + 1 (k = 0, 1, 2, \ldots)$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k], \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k\}$ is a basis for H.
(II_a) $\rho(S) = 2$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \ldots, f_k, e_{k+1}]$,

$E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \ldots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [f_1, e_1 + f_2, \ldots, e_{k-1} + f_k, e_k + e_{k+1}]$.
(II$_b$) $\rho(S) = -2$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k], E_2 = [f_1, \ldots, f_k]$,
$E_3 = [e_2 + f_1, \ldots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_2, \ldots, e_{k-1} + f_k, e_k + e_{k+1}]$.
(II$_c$) $\rho(S) = +1$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \ldots, f_k]$,
$E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \ldots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \ldots, e_k + f_k, e_{k+1}]$.
(II$_d$) $\rho(S) = -1$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \ldots, f_k]$,
$E_3 = [e_2 + f_1, \ldots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \ldots, e_k + f_k]$.
(II$_e$) $\rho(S) = 0$の場合
$H = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, f_1, \ldots, f_k]$,
$E_1 = [e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \ldots, f_k]$,
$E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \ldots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \ldots, e_k + f_k]$.

Gelfand-Ponomarev は、直既約4-部分空間の組 $S = (H; E_1, \ldots, E_4)$ の不変量defect
$$\rho(S) = \sum_{i=1}^{4} \dim(E_i) - 2\dim(H)$$
を定義して、それを、直既約4-部分空間の組Sの分類に使った。無限次元の場合には, Fredholm 作用素を使って 不変量 $\rho(S)$を、拡張定義できる。それには、直既約4-部分空間の組 $S = (H; E_1, \ldots, E_4)$ に対して、
加算作用素 $A_{ij} : E_i \oplus E_j \to H (i, j = 1, \ldots, 4), A_{ij}(x_i, x_j) = x_i + x_j (x_i \in E_i)$を、まず、定義する。このとき、$\dim A_{ij} < \infty, \dim A_{ij}^* < \infty$, の場合を、$A_{ij}$ が、quasi-Fredholm 作用素であるという。このとき、その指数 $Ind(A_{ij})$を、$Ind(A_{ij}) = \dim Ker A_{ij} - \dim Ker A_{ij}^*$. で定義する。直既約4-部分空間の組$S = (H; E_1, \ldots, E_4)$ が、quasi-Fredholm であるとは、すべての A_{ij} が、quasi-Fredholm 作用素であることとする。このとき、その defect $\rho(S)$ を、$\rho(S) = \frac{1}{3} \sum_{i<j} Ind(A_{ij})$により、定義する。もし、$\dim H < \infty$,のときは、Gelfand-Ponomarev のdefectと、われわれの defectの一致が示せる。また、Gelfand- Ponomarev は、有限次元 Hilbert 空間　の中の直既約4-部分空間の組を分類するために、コクセター関手 Functors Φ^+, Φ^-を使用した。無限次元の場合においても、コクセター関手 Φ^+, Φ^- が構成できて、ある条件下では、Φ^+, Φ^- は、不変量defectが、保存される。4-部分空間の組は、クイバー $\widetilde{D_4}$. の表現と捕えることができる。よって、われわれは、拡大 Dynkin 図形の無限次元表現を考えることができる。つまり、部分空間の組は、次のようにクイバー(有向グラフ)の表現と見なせる。ここから、話は、(2)のGabrielの定理に移る。

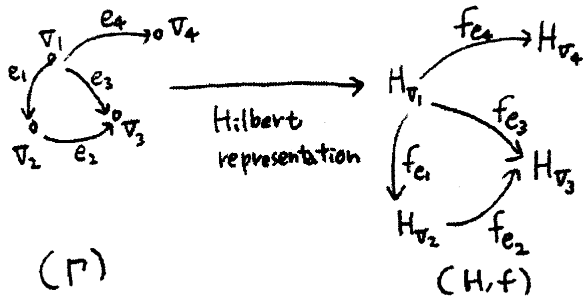


定義: クイバー $\Gamma = (V, E, s, r)$ とは、頂点の集合 V,矢の集合 Eと、2つの写像 $s, r : E \to V$からなる4つ組で、写像s, rは、各矢 $\alpha \in E$をその始点 $s(\alpha)$ と終点 $r(\alpha)$に写すものである。$b \in V$がsinkであるとは、$b \neq s(\ell)$が、すべての$\ell \in E$について成立するときをいう。さらに、$a \in V$がsourceであるとは、$a \neq r(\ell)$が、すべての$\ell \in E$について成立するときをいう。



定義:$\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。(H, f)が、Γのヒルベルト表現とは、

$H = (H_v)_{v \in V}$がヒルベルト空間の族で、
$f = (f_\alpha)_{\alpha \in E}$が、有界線形作用素$f_\alpha : H_{s(\alpha)} \to H_{r(\alpha)}$の族で、あるものをいう。



定義:$\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。$(H, f), (K, g)$を、Γの2つのヒルベルト表現とする。(H, f)と(K, g)が、準同型であるとは、ある有界線形作用素$\varphi_v \in B(H_v, K_v)$の族 $\varphi = (\varphi_v)_{v \in V}$で、$\varphi_{r(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \varphi_{s(\alpha)}$を満たすものが存在するときをいう。このとき、$\varphi : (H, f) \to (K, g)$と書く。すべての準同型$\varphi : (H, f) \to (K, g)$の全体を、$Hom((H, f), (K, g))$と書く。また、$Hom((H, f), (H, f))$を、$End(H, f)$で書く。

定義:$\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。$(H, f), (K, g)$を、Γの2つのヒルベルト表現と

する。(H,f)と(K,g)が、同型であるとは、ある有界可逆線形作用素$\varphi_v \in B(H_v, K_v)$の族 $\varphi = (\varphi_v)_{v\in V}$で、$\varphi_{r(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \varphi_{s(\alpha)}$を満たすものが存在するときをいう。このとき、$(H,f) \simeq (K,g)$と書く。

定義:$\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。(K,g), (K',g')を、Γのヒルベルト表現とする。直和$(H,f) = (K,g) \oplus (K',g')$を、$H_v = K_v \oplus K'_v (v \in V)$, $f_\alpha = g_\alpha \oplus g'_\alpha (\alpha \in E)$で定義する。ヒルベルト表現$(H,f)$が0であるとは、$H_v = 0 (v \in V)$のときをいう。$\Gamma$の0でないヒルベルト表現が、直既約であるとは、もし$(H,f) \simeq (K,g) \oplus (K',g')$ならば、$(K,g) \simeq 0$か$(K',g') \simeq 0$のこととする。直既約性を示す道具は、次の命題である。

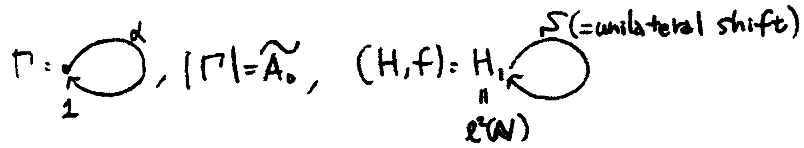
命題:(H,f)を、Γのヒルベルト表現とする。このとき、次は同値である。

(1) (H,f)は、直既約である。

(2) $End(H,f)$の元で、idempotentなものは、0か、Iである。

(2)主結果

例1

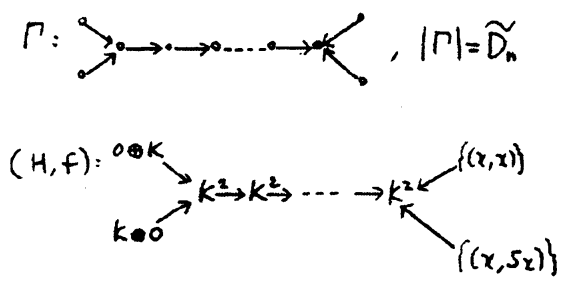


ここで、Sは、$H_1 = \ell^2(\mathbb{N})$上の片側シフトである。

このとき、(H,f)は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

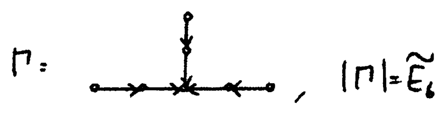
証明: $T \in End(H,f)$を、idempotentなものとする。このとき、$T^2 = T$かつ$TS = ST$である。そうすると、Tは下三角Toeplitz行列となる。Tは、idempotentであるので、Tは、0か、Iになる。

例2



このとき、(H,f)は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

例3



$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(H,f): & & & \{(x,x,x)\} \arrow[d] & & \\
& & & \{(x+y,\ x+Sy,\ x)\} \arrow[d] & & \\
& 0^2\oplus K \arrow[r] & K\oplus 0\oplus K \arrow[r] & K^3 & K^2\oplus 0 \arrow[l] & 0\oplus K\oplus 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

このとき、(H,f)は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

例4

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Gamma: & & & & \circ \arrow[d] & & & \\
& \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}
,\quad |\Gamma| = \widetilde{E}_7
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(H,f): & K\oplus 0^3 \arrow[r] & K\oplus 0\oplus \{(x,x)\} \arrow[r] & K\oplus 0\oplus K^2 \arrow[d] \\
& & \{(x,y,x,y)\} \arrow[r] & K^4 \\
& 0\oplus K\oplus 0^2 \arrow[r] & 0\oplus K\oplus \{(y,Sy)\} \arrow[r] & 0\oplus K^3 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

このとき、(H,f)は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

例5

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Gamma: & & & \circ \arrow[d] & & & & & \\
& \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}
,\quad |\Gamma| = \widetilde{E}_8
$$

(H,f):

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0^3\oplus K\oplus 0^2 \arrow[r] & 0^3\oplus K\oplus \{(y,Sy)\} \arrow[r] & 0^3\oplus K^3 \arrow[r] & 0^2\oplus K^4 \arrow[d] & \\
& & & \{(x,x)\}\oplus K^4 \arrow[dl] & \\
\{(y,z,x,0,y,z)\} \arrow[rr] & & K^6 & & \\
& & & K^2\oplus \{(x,y,x,y)\} \arrow[ul] & K^2\oplus 0^4 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

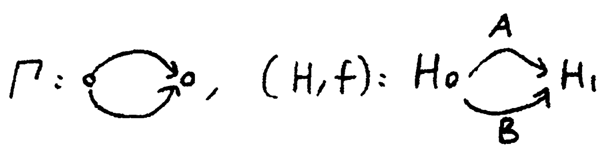
このとき、(H,f)は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

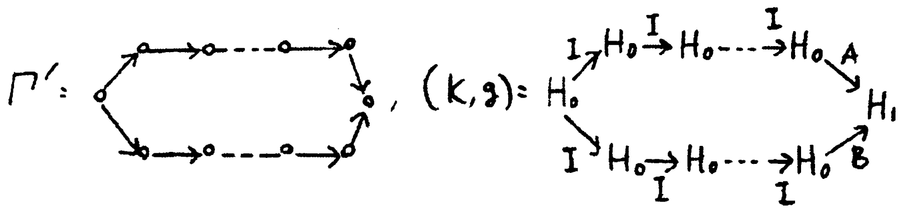
定理:Γ を有限連結クイバーとする。もし下の無向グラフ$|\Gamma|$が、拡大Dynkin図形の一つを含むならば、Γの無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在する。

系 : Γ を有限連結クイバーとする。もしΓ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在しないならば、
その下の無向グラフ$|\Gamma|$は、Dynkin図形の一つである。

(注意)この逆が、真であるかは、未解決の問題である。

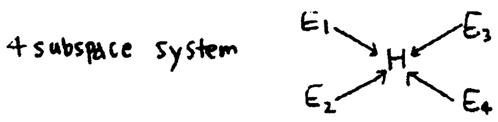
(3)直既約ヒルベルト表現と準同型代数
(この節の結果は、[EW3](準備中)にある)
定理: Γを、$\widetilde{A}_1$とし、Γ′を$\widetilde{A}_n$とする。その表現をそれぞれ、(H,f), (K,g)とおく。



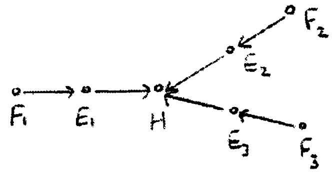


このとき、次をもつ。
$End(H,f) \simeq End(K,g)$.
これ以外の多くの型の間の準同型代数の関係については、[EW3]で、詳しく説明されている。

(4)拡張されたDynkin 図形のdefect
われわれは、4部分空間の組について、その不変量defectをFredholm指数を使って定義した。



つまり、4つ組$S = (H; E_1, \ldots, E_4)$について、そのdefect$\rho(S)$を、
$\rho(S) = \frac{1}{3}\sum_{i<j} Ind(A_{ij})$で定義した。ここで、$A_{ij} : E_i \oplus E_j \to H$は、
$A_{ij}((x_i, x_j)) = x_i + x_j (x_i \in E_i, x_j \in E_j)$で定義される加算作用素であり、
$Ind(T) = \dim\ker T - \dim\ker T^*$である。
このとき、この定義は、有限次元のときのものと一致する。
次に、拡大Dynkin図形$\widetilde{E}_6$の場合を考える。



これに対して、われわれは、defectの

定義として、$\rho(S) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} d(E_i,F_j)$をおく。ここで、

$d(E_i,F_j) = \dim(E_i \cap F_j) - \dim(E_i + F_j)^{\perp}$である。

$\widetilde{E_6}$の表現のクラスとして、$S = (H;E_i,F_j)$で次のものを考える。

$\dim(E_i \cap F_j) < \infty, \dim(E_i + F_j)^{\perp} < \infty$なるものを取る。このクラスのものに対して、上でdefectを定義すると、有限次元では、この定義は、もとの有限次元のdefectの定義と一致する。$\widetilde{E_7}$についても、同様に定義できる。$\widetilde{E_8}$については、無限次元の例を含めるように、今のところ定義できてはいない。

(5)コクセター関手と向き付け変更

(2)の主定理は、Γのすべての向き付けについて、Γの無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することを示している。しかし、例では、ひとつの包含関係のときの向き付けのみしか、Γの無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することを、示していない。そのため、向き付けを変えたときにも、Γの無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することを、示す必要がある。その為の、武器となるものが、コクセター関手である。これについて、残りの節では、[EW2]に従って、説明する。このために、ある性質の良いクラスを設定しよう。

例として、次を見よう。

3つの部分空間$H_1 \subset H_2 \subset H_3$を考えよう。このとき、

$K_1 = H_1, K_2 = H_2 \cap H_1^{\perp}, K_3 = H_3 \cap H_2^{\perp}$とおく。

このとき、

$H_1 = K_1 \oplus 0 \oplus 0 \to_{I\oplus 0\oplus 0} H_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus 0 \to_{I\oplus I\oplus 0} \ \to H_3 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3.$

定義:

Γを有限クイバーとする。Γの下の無向グラフ$|\Gamma|$を、A_nとする。(H,f)をΓのヒルベルト表現とする。例えば、$H_1 \leftarrow^{f_1} H_2 \rightarrow^{f_2} H_3 \leftarrow^{f_3} H_4 \rightarrow^{f_4} H_5 \rightarrow^{f_5} H_6$がその例である。このとき、

(H,f)が**正-ユニタリ対角形**であるとは、ある$m \in \mathbb{N}$と、あるヒルベルト空間の直交分解

$H_k = \oplus_{i=1}^{m} H_{k,i}$ ($H_{k,i}$は0があり得る)、ある作用素の分解

$f_k = \oplus_{i=1}^{m} f_{k,i} : \oplus_{i=1}^{m} H_{s(\alpha_k),i} \to \oplus_{i=1}^{m} H_{r(\alpha_k),i}$で次を満たすもの存在することである。

各$f_{k,i} : H_{s(\alpha_k),i} \to H_{r(\alpha_k),i}$が、$f_{k,i} = 0$であるか、または、ある正のスカラー$\lambda_{k,i}$,あるユニタリ$u_{k,i}$が存在して、

$f_{k,i} = \lambda_{k,i} u_{k,i}$と書けることである。

次の補題が鍵である。

補題:Γを有限クイバーとする。Γの下の無向グラフ$|\Gamma|$を、A_nとする。(H,f)をΓのヒルベルト表現とする。$a \in V$を、sourceとする。もし、(H,f)が正-ユニタリ対角形であるならば、$\Phi_a^-(H,f)$は、正-ユニタリ対角形である。

このことと、次の事実を使う。

命題:Γ_0とΓを有限クイバーとする。Γ_0とΓの下の無向グラフ$|\Gamma_0|$と$|\Gamma|$を、$A_n(n \geq 2)$とする。
ここで、Γ_0は、標準な向きをもつものとする。つまり、$\circ_1 \to \circ_2 \to \circ_3 \to \cdots \circ\!\!\to \circ_n$ とする。
このとき、ある$v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$で次を満たすものが存在する。
v_kは、$\sigma^-_{v_{k-1}} \cdots \sigma^-_{v_2}\sigma^-_{v_1}(\Gamma_0)$のsourceであり、$\sigma^-_{v_m} \cdots \sigma^-_{v_2}\sigma^-_{v_1}(\Gamma_0) = \Gamma$であり、
$v_k \neq n(\forall k = 1, 2, \cdots, n)$である。
この事実とコクセター関手を組み合わせて、$(H,f) = \Phi^-_{v_m} \cdots \Phi^-_{v_2}\Phi^-_{v_1}(H^{(0)}, f^{(0)})$をもつ。これで、望まれた$\Gamma$の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することが、示せたことになる。

以下では、**道具**になる反射関手を説明する。
定義:$(\sigma^+_b(\Gamma))$
Γを有限クイバーとする。$b \in V$をsinkとする。$b \in V$の周りの矢の集合を、
$E^b = \{\alpha \in E; r(\alpha) = b\}$と書く。
$b \in V$の周りの矢の向きだけを反対方向に変えたクイバーを、$\sigma^+_b(\Gamma)$で、表す。つまり、
$\sigma^+_b(\Gamma) = (\sigma^+_b(V), \sigma^+_b(E), r, s), \sigma^+_b(V) = V, \sigma^+_b(E) = \{\overline{\alpha}; \alpha \in E^b\} \cup (E \setminus E^b)$とするのである。
定義:$(\Phi^+(H,f))$
Γを有限クイバーとする。$b \in V$をsinkとする。Γのヒルベルト表現を、(H,f)とする。これから、
$\sigma^+_b(\Gamma)$のヒルベルト表現$\Phi^+_b(H,f) = (K, g)$を定義する。
$b \in V$の周りのヒルベルト空間H_bの直和から、H_bへの和写像h_bを、

$h_b((x_{s(\alpha)})) = \sum_{\alpha \in E^b} f_\alpha(x_{s(\alpha)}) \in H_b$で定義する。　$K_b = \ker h_b \subset \oplus_{\alpha \in E^b} H_{s(\alpha)}$と置く。
$i_b : K_b \to \oplus_{\alpha \in E^b} H_{s(\alpha)}$(埋め込み)とする。$P_\beta : \oplus_{\alpha \in E^b} H_{s(\alpha)} \to H_{s(\beta)}(\beta \in E^b)$を、射影とする。
ここで、$K_v = K_b(v = b), K_v = H_v(v \neq b)$と置き、
$g_{\overline{\beta}} = P_\beta \bullet i_b(\beta \in E^b), g_\beta = f_\beta(\beta \notin E^b)$と置く。
定義:$(\sigma^-_a(\Gamma))$
Γを有限クイバーとする。$a \in V$をsourceとする。$a \in V$の周りの矢の集合を、
$E_a = \{\alpha \in E; s(\alpha) = a\}$と書く。
$a \in V$の周りの矢の向きだけを反対方向に変えたクイバーを、$\sigma^-_a(\Gamma)$で、表す。つまり、
$\sigma^-_a(\Gamma) = (\sigma^-_a(V), \sigma^-_a(E), r, s), \sigma^-_a(V) = V, \sigma^-_a(E) = \{\overline{\alpha}; \alpha \in E_a\} \cup (E \setminus E_a)$とするのである。
定義:$(\Phi^-(H,f))$
Γを有限クイバーとする。$a \in V$をsourceとする。Γのヒルベルト表現を、(H,f)とする。これから、
$\sigma^-_a(\Gamma)$のヒルベルト表現$\Phi^-_a(H,f) = (K, g)$を定義する。座標写像
$\widetilde{h_a} : H_a \to \oplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)}$を、
$\widetilde{h_a}(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in E_a}$と、定義する。$K_a = (\mathrm{Im}\,\widetilde{h_a})^\perp \subset \oplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)}$と置く。
$j_\beta : H_{r(\beta)} \to \oplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)}(\beta \in E_a)$を、埋め込み写像とする。
$Q_a : \oplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)} \to K_a = (\mathrm{Im}\,\widetilde{h_a})^\perp$を、

射影とする。これらを用いて、$K_v = K_a(v = a), K_v = H_v(v \neq a)$と置き、
$g_{\bar{\beta}} = Q_a \bullet j_\beta(\beta \in E_a), g_\beta = f_\beta(\beta \notin E_a)$と置く。

道具(向き付け変更)

定理:Γを有限クイバーとする。$a \in V$をsourceとする。Γのヒルベルト表現を、(H,f)とする。

(条件)(H,f)は直既約である。また、$\sum_{\alpha \in E_a} \mathrm{Im} f_\alpha^*$は、閉である(これを、$a \in V$で余-閉であるという)。

このとき、もし、$\Phi_a^-(H,f) \neq 0$ならば、$\Phi_a^-(H,f)$は、直既約である。

参考文献

[EW1]M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space,* Adv. Math. 201 (2006), 263-317.

[EW2]M. Enomoto and Y. Watatani,*Indecomposable representations of quivers of infinite-dimensional Hilbert spaces,*(Journal of Functional Analysis, in press)

[EW3]M. Enomoto and Y. Watatani,in preparation.