

## あるクリスタライン運動の多角形解の挙動について

岐阜大学・教育学部 石渡 哲哉 (Tetsuya Ishiwata)<sup>1</sup>

Faculty of Education,  
Gifu university

### 1 Introduction

クリスタライン運動 (Crystalline motion) は, 1990 年前後に S. Angenent and M.E. Gurtin [1] あるいは, J. Taylor[11] によって提案された多角形曲線 (あるいは多面体曲面) の運動である。彼らは, 多角形曲線の各辺がいくつかの固有の角度の線分だけで構成されるものを扱い, その各辺の移動速度がその辺の長さの逆数に比例する運動を導出した。ここで現れる「辺の長さの逆数に比例する」量はクリスタライン曲率と呼ばれ, この量に依存する多角形曲線の運動は, クリスタライン運動とか, クリスタライン曲率流などと呼ばれている。扱う解多角形の属するクラスやクリスタライン曲率の定義については, 次節で述べる。

解多角形, 第  $j$  辺のクリスタライン曲率, その辺の法線速度及び法線ベクトルを, それぞれ  $\Omega(t)$ ,  $H_j(t)$ ,  $V_j(t)$ ,  $N_j$  で表す。Taylor が提案したクリスタライン曲率流  $V_j = -H_j$  については, 90 年代以降活発に研究されており, 特に, 凸多角形に限定した場合の漸近挙動に関する研究は詳細に調べられている。また, 非凸多角形の場合も  $V_j = -H_j$  は K. Ishii and H. M. Soner[7] で, その一般化の場合を M. -H. Giga and Y. Giga[2] で解の挙動や等高面解との関係が論じられている。また, [8] では解多角形の時間発展途中における変形や凸性獲得に関連する考察が行なわれている。

一方, Gurtin らは熱力学見地からバルクからの効果を盛り込んだモデル方程式 (以後 Gurtin モデルと呼ぶ。):

$$\beta(N_j)V_j = U - H_j$$

を導出した。ここで,  $\beta$ ,  $U$  はそれぞれ物質界面の移動度の非等方性を現す正值関数, バルクからの寄与を表す定数である。本小論では, このモデルを拡張した次の方程式

$$\beta(N_j)V_j = U(t) - g(H_j) \quad (1)$$

を扱い, 平面上の多角形の運動を考える。ここで, 関数  $g = g(x)$  は曲率依存度を表す関数とし,  $x$  に関して局所リプシッツ連続かつ単調増加であるとし,  $g(0) = 0$ ,  $g(-x) = -g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$  を満たし, この発散の増大度は線形あるいは優線形であるとする。例えば,  $g(x) = x|x|^\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) である。また, 関数  $U(t)$  は連続関数とし, 更に今回は広

---

<sup>1</sup>e-mail: tisiwata@gifu-u.ac.jp

がっていく界面の挙動に興味があるので、 $0 < U_* \leq U(t) \leq U^*$  を満たす  $U_*, U^*$  が存在する場合を扱う。

以下、この方程式に対して、初期図形及び解図形を次節で述べる許容多角形のクラスで考えるが、特に初期図形が非凸である場合について考察する。

## 2 準備

ここでは、結晶界面のように固有の法線ベクトルをもつ線分で構成された多角形のクラスを導入し、このクラスの多角形の各辺に対して、クリスタライン曲率を定義する。<sup>2</sup> まず、その基礎となる図形として次のウルフ (Wulff) 図形  $\mathcal{W}_\sigma$  を用意する:

$$\mathcal{W}_\sigma = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \cdot n \leq \sigma(n) \text{ for all } n \in S^1\}.$$

この図形は、結晶の表面エネルギー密度関数  $\sigma = \sigma(n)$  ( $n \in S^1$ ) を与えた場合の結晶の平衡形を表している。結晶の平衡形を求める問題をウルフの問題といい、上の図形は面積一定条件下での全表面エネルギーの最小化問題の解となっている。例えば、 $\sigma \equiv 1$  であればウルフ図形は単位円となる。このウルフ図形が多角形となるとき、 $\sigma$  はクリスタラインエネルギー (crystalline energy) であるという。以下、この場合を考える。

本小論では、クリスタライン運動の解を、ある限定された多角形のクラスでのみ考えると先に述べた。このクラスの多角形を許容多角形 (admissible polygon) という。以下、記号  $\mathcal{N}_A$  で図形  $A$  の境界がもつ外向き単位法線ベクトル全体の集合を表すとす。

**Def.**(許容多角形)  $\Omega$  を  $K$  辺多角形とする。以下の二条件を満たすとき、 $\Omega$  は許容 (Admissible) であるという。

(i)  $\mathcal{N}_{\mathcal{W}_\sigma} = \mathcal{N}_\Omega$

(ii) For all  $j = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ ,

$$\frac{s\mathbf{N}_j + (1-s)\mathbf{N}_{j+1}}{|s\mathbf{N}_j + (1-s)\mathbf{N}_{j+1}|} \notin \mathcal{N}_{\mathcal{W}_\sigma}, \quad (0 < \forall s < 1)$$

where  $\mathbf{N}_j \in \mathcal{N}_\Omega$  is the outward normal vector of the  $j$ -th edge and  $\mathbf{N}_K = \mathbf{N}_0$ .

1つ目の条件は、許容多角形はウルフ図形の各辺と同じ法線ベクトルを持つ線分からなる境界で囲まれていることを表し、2つ目の条件は、ある辺の法線ベクトルがウルフ図形の第  $k$  番目の辺の法線ベクトル  $\varphi_k \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}_\sigma}$  であるとき、その辺の隣の辺の法線ベクトルは、ウルフ図形の境界上でみて両隣のどちらかの辺の法線ベクトル、つまり、 $\varphi_{k+1}$

<sup>2</sup>後でみるように、クリスタライン曲率は、ここで導入された多角形に対しては、曲率円を用いた曲率の捉え方と同様の見方が自然に出来る量となっている。

あるいは  $\varphi_{k-1}$  であることを表している。つまり、境界上の各頂点の両側の辺の繋がり方が、ウルフ図形と同様であるということである。

この許容多角形のクラスはウルフ図形に依存しているため、ウルフ図形が異なる場合には異なる特徴をもつ多角形が属することに注意する。以後、許容多角形の属する多角形のクラスを  $AP_\sigma$  で現す。

次に、許容多角形  $\Omega$  の各辺に対してクリスタライン曲率を定義する。 $d_j$  を  $\Omega$  の第  $j$  辺の長さとし、 $l_\sigma(\mathbf{n})$  は  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{W_\sigma}$  を法線ベクトルにもつウルフ図形の辺の長さを表すとする。 $\Omega$  の第  $j$  辺のクリスタライン曲率  $H_j$  は

$$H_j := \chi_j \frac{l_\sigma(N_j)}{d_j}$$

と定義される。ここで、 $\chi_j$  は遷移数 (transition number) と呼ばれ、

$$\chi_j := \frac{1}{2} (\text{sgn}(\theta_{j+1} - \theta_j) + \text{sgn}(\theta_j - \theta_{j-1})) \quad (\theta_j : \text{第 } j \text{ 辺の法線角度})$$

と定義される。

ここで現れる遷移数は、辺の近傍での多角形の形状を特徴付ける数で、辺の近傍で凸ならば  $\chi_j = 1$ 、凹ならば  $\chi_j = -1$ 、それ以外の場合は  $\chi_j = 0$  となっている。(図 1)

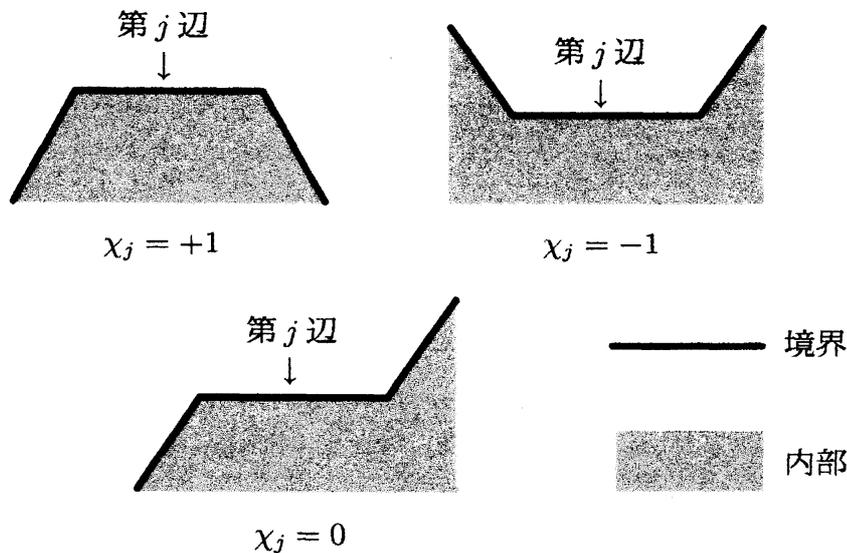


図 1: 遷移数

また、クリスタライン曲率の定義中にある量  $l_\sigma(N_j)/d_j$  は、次のように理解することができる。滑らかな曲線のある点での曲率は、その点での曲率円の半径を  $R$  とすると  $1/R$  で与えられる。この量は、単位円と曲率円との相似比であり、曲率を測りたい点において曲線に滑らかに接触するように単位円を相似拡大・縮小するときの比率を表し

ている。許容多角形のクラスに対して、ウルフ図形に単位円の役割を与えて同じことを考える。許容多角形の各辺においてウルフ図形を拡大縮小して多角形曲線に接触させた場合の相似比は、ウルフ図形と多角形の辺の長さの比であり、 $l_\sigma(N_j)/d_j$  で与えられる。(図2)

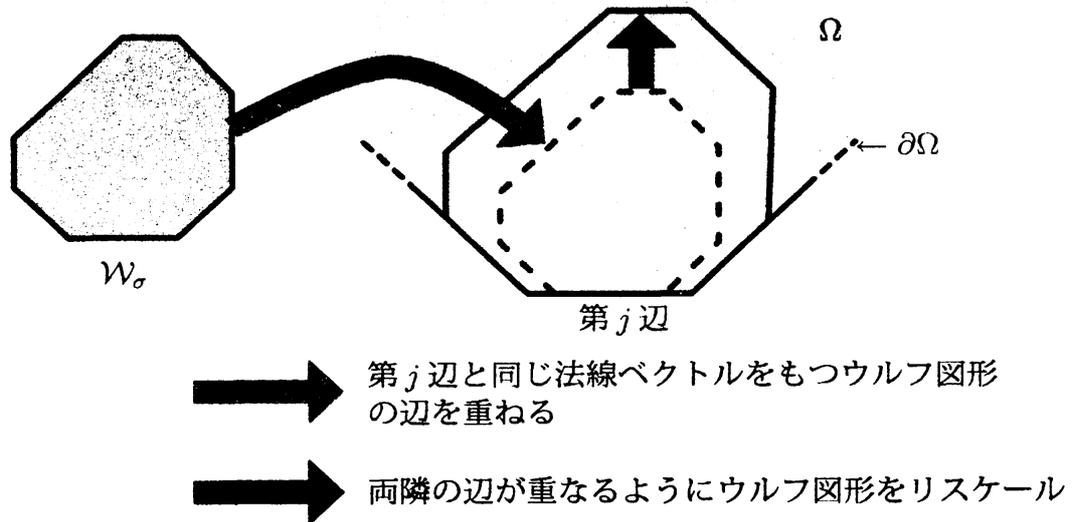


図2: 量  $l_\sigma(N_j)/d_j$

**Remark 1** クリスタライン曲率は以上のように曲率の定義の多角形版として自然なものとなっているため、滑らかな曲線に対する曲率運動の近似計算の際に、曲線を許容多角形で近似し、曲率をクリスタライン曲率で近似する手法が用いられることもある。このような方法を、クリスタライン・アルゴリズムといい、いろいろな曲率運動に対する近似方法として用いられている。本小論で述べる定理2などは、そのような計算方法が時間発展途中で破綻<sup>3</sup>しないことを保障するものと理解することもできる。

以上の定義より、凸許容多角形の各辺のクリスタライン曲率は正であり、また、ウルフ図形の各辺の曲率は常に1である。また、クリスタライン曲率が零または負である辺を持つ図形は、凸図形にはならない。また、そのような図形は星状領域にならないこともあることを注意しておく。(例えば、図3など。)

### 3 結果

以下、初期図形  $\Omega_0$  を非凸許容多角形とし、許容多角形のクラスの中で解多角形を扱う。初期許容多角形の各辺の長さは正なので、時間局所的には各辺の長さは正であり、短時間においては解多角形の許容性は崩れないことに注意する。

<sup>3</sup>扱う多角形が許容でなくなると、近似方法そのものが継続できなくなる。

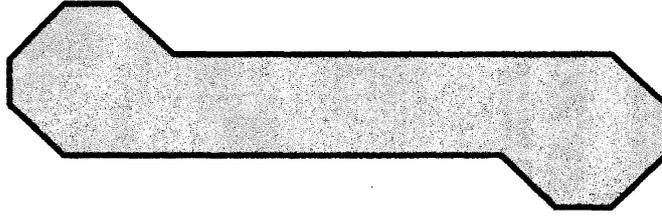


図 3: 各辺のクリスタライン曲率が非負で, 星状領域ではない例。

### 3.1 比較定理

まず, この節では解多角形が許容多角形のクラスに属しているものとして, 解の大よその挙動を知るため, まず以下の2つの許容多角形族を考える。

$\{\Omega^+(t)\}_{t \geq 0}$  を,

$$\beta(N_j)V_j \geq U(t) - g(H_j), \quad (2)$$

$$\Omega^+(0) = \Omega_0^+ \in AP_\sigma$$

を満たす許容多角形族とし,  $\{\Omega^-(t)\}_{t \geq 0}$  を,

$$\beta(N_j)V_j \leq U(t) - g(H_j), \quad (3)$$

$$\Omega^-(0) = \Omega_0^- \in AP_\sigma$$

を満たす許容多角形族とする。これらに対し, 以下が成立する。

**Theorem 1**  $\Omega_0^- \subset \Omega_0^+$  とする。このとき,  $\Omega^-(t), \Omega^+(t) \in AP_\sigma$  である限り,  $\Omega^-(t) \subset \Omega^+(t)$  が成立する。

**Corollary 1.1**  $\Omega_0^- \subset \Omega_0 \subset \Omega_0^+$  とする。このとき,  $\Omega^-(t), \Omega(t), \Omega^+(t) \in AP_\sigma$  である限り,  $\Omega^-(t) \subset \Omega(t) \subset \Omega^+(t)$  である。

**Corollary 1.2**  $\Omega_0^1, \Omega_0^2 \in AP_\sigma$ ,  $\Omega_0^1 \subset \Omega_0^2$  とする。 $\Omega_0^1, \Omega_0^2$  をそれぞれ初期図形に持つ方程式 (1) の解  $\Omega^1(t), \Omega^2(t)$  は,  $\Omega^1(t), \Omega^2(t) \in AP_\sigma$  である限り,  $\Omega^1(t) \subset \Omega^2(t)$  を満たす。

**Remark 2** 上の比較定理 (Corollary 1.2) は, Gurtin モデルの場合には既に Giga-Gurtin [3] によって示されている。

以下, 上の方程式 (2), (3) を満たす2つの許容多角形族を導入し, 方程式 (1) の解を内側および外側から挟み込み, おおよその挙動を捉える。

まず, 内側からの評価をする。 $H_*$  を  $g(H_*) = U_*$  を満たす定数とし,  $\mathcal{W}_*$  は各辺のクリスタライン曲率が  $H_*$  であるウルフ図形の相似形 (平行移動を含む) とすると,  $\Omega^-(t) = \mathcal{W}_*$  は (3) の定常解となる。よって, 初期図形  $\Omega_0$  が  $\mathcal{W}_* \subset \Omega_0$  を満たしていれば, 解多

角形は  $W_* \subset \Omega(t)$  を満たすことになり、解多角形の面積が零になることはない。つまり、解多角形が一点に収縮して消滅するような特異性は発生しない。

次に、外側からの評価をする。  $\alpha := U^* / \min_j \beta(N_j)$  とし、  $r(t) = r_0 + \alpha t$  とする。この関数  $r(t)$  を用いて、多角形族  $\{S_\sigma^+(r(t))\}_{t \geq 0}$  を考える。ここで  $S_\sigma^+(r)$  は、

$$S_\sigma^+(r) := \bigcap_{N \in N_{W_\sigma}} \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \cdot N \leq r\}$$

と定義される凸多角形である。

この多角形族は、方程式

$$V_j = \alpha$$

の自己相似解であり、(2) を満たす。直ちに分かるように、時間大域的に存在し、任意の時間において有界であり、時間無限大で  $\mathbb{R}^2$  全体へと広がる。  $\Omega_0 \subset S_\sigma^+(r_0)$  となるように  $r_0$  を取れば、  $\Omega(t) \subset S_\sigma^+(r(t))$  となるので、(1) の解多角形は任意の時間において有界であり、有限時間で面積が無限大に発散するような特異性は表れないことが分かる。

### 3.2 解多角形の変形

前節では、解多角形が許容多角形である場合について考察した。本節以後、初期図形を許容多角形とし、かつ、内部に  $W_*$  を含むものとする。先に触れたように、解多角形の許容性は時間局所的には保たれるが、(1) 時間発展途中での辺の消滅、あるいは、(2) 境界の自己接触による解多角形の分裂あるいは穴の生成、が起こりうる。このような特異性が生じた場合、解多角形が許容多角形のクラスから出てしまう可能性があり、今回扱っている枠組みでは運動の時間発展を継続できなくなる。1つの対処法は、非許容多角形に対する運動の枠組みを作ることである。許容性の条件のうち、(i) の条件を緩和し、過剰に辺があってもよいように拡張した本質的許容多角形のクラスが提案 ([6]) されており、その場合の解多角形の挙動についても、例えば、  $U = 0$  の場合については [13], [9] で考察されている。(ii) の条件が成り立たないような角を有する非許容多角形については、  $V_j = -H_j$  ( $U = 0, g(x) = x$  の場合。) に対して自己相似解を利用した解の構成方法 ([6]) が考察されているが、バルク効果のついた運動や一般の  $g$  に対しては、今後の研究が待たれる。ここでは、初期図形や運動にいくつか条件を設定することにより、特異性が生じた場合でも解多角形が非許容多角形にならない状況について考察をする。

$T_1 (> 0)$  を、(i)(ii) のどちらかの特異性が最初に発生した時刻とする。もし、  $\Omega(t)$  の  $t \rightarrow T_1$  での極限図形が許容多角形となっていれば、我々はその図形を初期図形として運動をリスタートし、  $t > T_1$  へ運動を接続することができる。このような操作を保障するため、以下の条件を課す:

(W): ウルフ図形が原点对称

(B):  $\beta(-N_j) = \beta(N_j)$

(R): 初期図形  $\Omega_0$  は任意の  $i, j$  に対して  $R_{i,j} > -\pi$  ( $\forall i, j$ ) を満たすとする。ただし,  $R_{i,j} = \theta_j - \theta_i$  ( $i \leq j$ ),  $\theta_j - \theta_i + 2\pi$  ( $i > j$ ) である。

以上の仮定のもと、次の定理を得る:

**Theorem 2** (W), (B) を仮定する。初期図形は、条件 (R) を満たす  $K_0$  辺非凸許容多角形とし、 $\mathcal{W}_*$  をその内部に含むものとする。このとき有限時刻  $T_1 > 0$  が存在して、 $\Omega(t)$  は  $[0, T_1)$  で  $K_0$  辺許容多角形であり、時刻  $t = T_1$  で少なくとも一つ辺が消滅する。このとき、消滅する辺はクリスタライン曲率が零の辺のみである。更に、極限図形  $\Omega(T_1) = \lim_{t \rightarrow T_1} \Omega(t)$  が存在し、 $\Omega(T_1) \in AP_\sigma$  かつ  $\mathcal{W}_* \subset \Omega(T_1)$  を満たす。

上の定理で課した3つの条件は、境界の自己接触による解多角形の非許容化を防ぐものである。例えば、条件 (W) が不成立の場合に図4のような図形を考えると、最下部の辺の曲率は正であるので、 $U(t)$  が十分小さい場合図のような境界の自己接触が起る。また、条件 (B) が成立しない場合、図5のような図形で、最下部の辺の上昇速度がその上にある辺の上昇速度を上回るように  $\beta$  の異方性を設定すると、図のような境界の自己接触を起こすことがある。以上2つの例は、条件 (R) を満たす初期図形であるが、境界の自己接触が起り、解多角形は分裂する。このような場合、接触箇所に来る角において一般に許容性が壊れることになる。

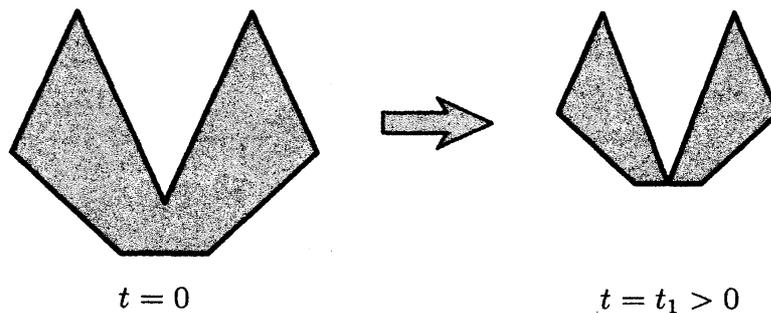


図4: 条件 (W) が成立しない場合の境界の自己接触。

最後に、条件 (R) が不成立の場合を考える。この場合、図6の様に初期図形は深く抉れた凹部を持ち得る。条件 (W), (B) が成立している場合においても、 $U(t)$  に対して凹部の幅が十分に狭い場合、図6右図のような境界の自己接触が起り、穴を形成する。仮に、穴形成後の境界を穴の境界と外側の境界との2つに分けて追跡しようとしても、接

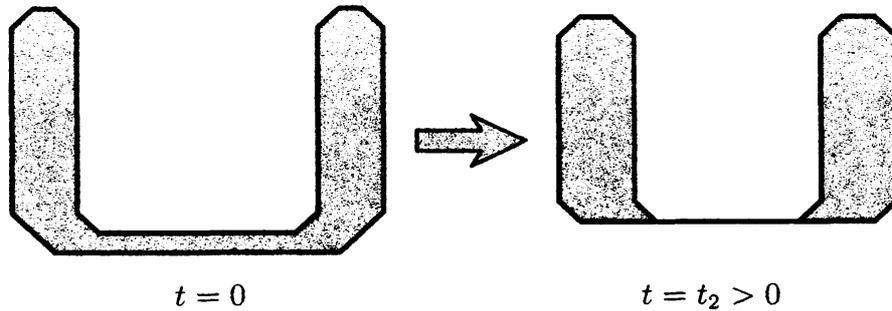


図 5: 条件 (B) が成立しない場合の境界の自己接触。

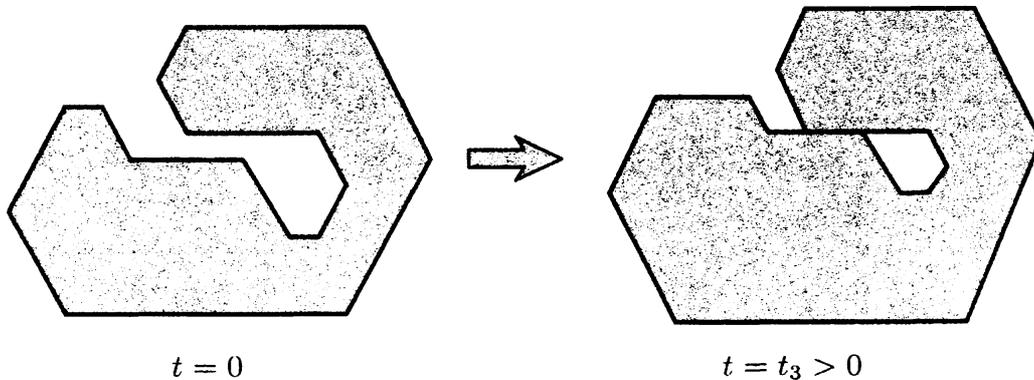


図 6: 条件 (W) が成立しない場合の境界の自己接触。

触が起きた箇所に出来る角において一般に許容性が崩れており、許容多角形の枠組みでは解の時間発展を継続できない。以上より、上の三条件が成立していない場合には、初期図形が非許容多角形である場合を扱えるようにする必要がある。

### 3.3 有限時間での凸化現象

今回扱っている運動では、方程式 (1) 中の  $U(t)$  が正であるので、凹部の外向きの移動速度は常に正である。また、凸部でクリスタライン曲率が非常に大きいところでは外向き移動速度が負になるので、時間発展と共に解多角形の凸凹は減る傾向にある。それでは、有限時間で解多角形は凸図形になるだろうか？それとも、凸凹が残った状態で時間発展を続けるだろうか？前者の、時間発展の途中で解図形が凸になる現象を**凸化現象**と呼ぶことにする。凸化現象については Grayson[4] の結果 - 自己交差しない滑らかな平面曲線を初期曲線に持つ曲率流方程式  $v = -k$  ( $v$  は曲線の各点での外向き法線速度,  $k$  はその点での曲率を表す。) の解曲線は有限時間で凸になる - が有名である。

クリスタライン曲率流  $V_j = -H_j$  は曲率流方程式のある種の空間離散化に対応しているため、クリスタライン曲率流に対しても、例えばウルフ図形が十分に円に近い場合などには凸化現象が常に成立することが予想できるが、現在までのところ、Grayson の結果のような強い主張が成立する条件は整備されていない。(主張を”ほとんど凸”と弱めれば、類似の結果を得ることはできる。[8])

以下、定理 2 で仮定した条件下で考える。定理から得られる極限図形  $\Omega(T_1)$  と初期図形  $\Omega_0$  を比べると、クリスタライン曲率が零の辺が消滅しただけであり、残った辺の法線角度は変化していないため、任意の二辺の間の回転角度  $R_{i,j}$  に影響を及ぼさない。つまり、初期図形  $\Omega_0$  が条件 (R) を満たしていれば、 $\Omega(T_1)$  も条件 (R) を満たす。よって、この図形を初期図形とした運動に対して再度定理 2 が適用可能であり、初期図形の辺の数は有限であることから、クリスタライン曲率が零の辺が消滅する時刻の有限列  $0 < T_1 < \dots < T_m < \infty$  を得ることができる。このとき、 $t = T_m$  においてクリスタライン曲率が零の辺は存在しない。つまり、凸化現象に関する以下の結果を得ることができる。

**Theorem 3** 前定理と同じ仮定をする。このとき、解多角形は有限時間  $t = T_m$  で凸化する。

凸化後は、凸多角形に対する結果に従う。例えば、 $g(x) = x$  の場合には [1], [12] などの結果に従う。

## 参考文献

- [1] S. Angenent and M.E. Gurtin, Multiphase thermomechanics with interfacial structure, 2. Evolution of an isothermal interface, Arch. Rational Mech. Anal. **108** (1989) 323–391.
- [2] M.-H. Giga and Y. Giga, Crystalline and level set flow – convergence of a crystalline algorithm for a general anisotropic curvature flow in the plane, Free boundary problems: theory and applications, I (Chiba, 1999), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appli., **13**, Gakkōtoshō, Tokyo, (2000) 64–79.
- [3] Y. Giga and M. E. Gurtin, A comparison theorem for crystalline evolution in the plane, Quart. J. Appl. Math. **LIV** (1996) 727–737.
- [4] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, J. Differential Geometry **26** (1987), 285–314.

- [5] M. E. Gurtin, Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane, Oxford, Clarendon Press (1993).
- [6] H. Hontani, M.-H. Giga, Y. Giga and K. Deguchi, Expanding selfsimilar solutions of a crystalline flow with applications to contour figure analysis, *Discrete Applied Mathematics* **147** (2005) 265–285.
- [7] K. Ishii and H. M. Soner, Regularity and convergence of crystalline motion, *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1998) 19–37 (electronic).
- [8] T. Ishiwata, Motion of non-convex polygons by crystalline curvature and almost convexity phenomena, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **25** (2008) 233–253.
- [9] T. Ishiwata, Motion of essential admissible polygons by crystalline curvature flow, *Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications* **29** (2008), 201–210.
- [10] T. Ishiwata and S. Yazaki, Interface motion of a negative crystal and its analysis, *数理解析研究所講究録* 1588 (2008), 23–29.
- [11] J. E. Taylor, *Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. **52** (1991) 321–336, Pitman London.
- [12] S. Yazaki, Point-extinction and geometric expansion of solutions to a crystalline motion, *Hokkaido Math. J.* **30** (2001) 327–357.
- [13] S. Yazaki, Motion of Nonadmissible Convex Polygons by Crystalline Curvature, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **43** (2007), 155–170.