数理解析研究所講究録
第 1633 巻 2009 年 80-95

Swarm Oscillators -'膜'相の解析-
'Membrane' Pattern of Swarm Oscillators Model

田中ダン[1,2]、飯田一輝[1]
1 福井大学 大学院工学研究科 知能システム工学専攻
〒910-8507 福井県福井市文京 3-9-1
2 科学技術振興機構 戦略的創造研究推進事業
個人型研究さきがけ研究員 兼任

Dan Tanaka[1,2], Kazuki Iida[1]
1 Department of Human and Artificial Intelligent Systems (HART),
Graduate School of Engineering, University of Fukui
3-9-1 Bunkyo, Fukui, 910-8507, JAPAN
2 Precursory Research for Embryonic Science and Technology
(PRESTO), Japan Science and Technology Agency (JST)

EMail dan@u-fukui.ac.jp, dan@yukawa.kyoto-u.ac.jp
TEL/FAX +81-776-27-8795

概要

実空間に分布し動的内部自由度を持つ素子の集団を考える。このような系は、細胞群、非平衡下の分子群など枚挙に暇がない程多様に遍在する。そこに通底する一数理構造を探求するべく、極力少ない仮定のもと、解析計算可能なモデルの一候補を模索、導出した。導出された数理モデルは、豊富な創発構造を呈する。また、このモデルはダイナミカルネットワークや流動的スピングラスと捉えることもでき、今後の発展に期待している。本講演では、モデル構

築の紹介と、このモデルが呈する一つの時空パターン'膜(Membrane)' に対する解析を紹介する。なお、この'膜' パターンについての解析は、著者の受け持つ修士1年生(2008年度現在)、飯田一輝氏との共同研究である。

モデル

モデルの概要は以下の通りである。まず、モデル構築のためのミニマムな設定を模索する。素子内ダイナミクスの最も単純なものの一つとして、リミットサイクル振動が挙げられる。そこで、単一の素子はなんらかのパラメータ変化で、超臨界Hopf分岐するとしよう。多数の素子が空間に分布しているとき、素子間相互作用の最も単純な候補は、拡散場を介するものだろう。拡散場があるとき、その勾配を感じて素子が駆動するというのも合理的である。このような走化性を示すリミットサイクル振動子の集合体に対し、振動子の超臨界Hopf分岐点近傍において中心多様体縮約を実行した。導出されたモデルは以下の通りである。

$$\dot{A}_i = A_i - (1+\mathrm{i}c)|A_i|^2 A_i + \chi \mathcal{M}(\boldsymbol{r}_i), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = -A_i^* \nabla \mathcal{M}(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i} + c.c., \tag{2}$$

ここでA_iと$\boldsymbol{r}_i$は各々、素子iの、Hopf振動の複素振幅と位置座標である。$\mathcal{M}$は素子の感じる局所平均場で、結合関数Gとともに次で定義される。

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{r}) \equiv \sum_i A_i G(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \ \ , \ G(\boldsymbol{r}) \equiv \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^D} \frac{b e^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{\rho^2 + q^2}. \tag{3}$$

Dは空間次元、cは実定数、χ、b、ρは複素定数である。A_i^*はA_iの複素共役を表す。空間自由度を考慮してない非局所結合振動子系については、文献[1]を参照して頂きたい。拡散場のメモリ効果・時間的非局所効果は、陽には現れず結合関数Gの虚数部に繰り込まれる[2][3]。

上記のモデルにおいて更に、Hopf振動に位相縮約を適用すると

$$\dot{\phi}_i = 1 + [\kappa P_i + c.c.], \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = -\nabla_{\boldsymbol{r}_i} P_i + c.c., \tag{5}$$

が得られる。ここでϕ_i、$\boldsymbol{r}_i$は、i番目の素子の内部状態と位置である。κは複素定数で、P_iは素子間の相互作用を表し、

$$P_i = \sum_{j \neq i} e^{-\mathrm{i}(\phi_j - \phi_i)} G(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \tag{6}$$

で与えられる。

$G(\boldsymbol{r})$の定性的に重要な性質は、$|\boldsymbol{r}|$の増加とともに減衰振動することである。この性質は、空間一次元における$G(\boldsymbol{r})$、すなわち複素引数を持つ指数関数にも現れる。そこで簡単のために、あらゆる空間次元においても$G(\boldsymbol{r})$を指数関数とする近似を行う。このときのモデルは以下のように書ける。

$$\dot{\psi}_i = \sum_{i \neq j} e^{-|\boldsymbol{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha |\boldsymbol{R}_{ji}| - c_1) \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = c_3 \sum_{i \neq j} \hat{\boldsymbol{R}}_{ji} e^{-|\boldsymbol{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha |\boldsymbol{R}_{ji}| - c_2) \tag{8}$$

i, j：素子の番号
ψ_i：i番目の素子の位相
$\boldsymbol{r}_i$：i番目の素子の位置ベクトル
$\Psi_{ji} \equiv \psi_j - \psi_i$：$\psi_j$と$\psi_i$の位相差
$\boldsymbol{R}_{ji} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$：$\boldsymbol{r}_j$と$\boldsymbol{r}_i$の間の距離ベクトル
$\hat{\boldsymbol{R}}_{ji} \equiv \frac{\boldsymbol{R}_{ji}}{|\boldsymbol{R}_{ji}|}$：上記距離ベクトルの単位ベクトル

このモデルには4つの実パラメータ(c_1, c_2, c_3, α)があり、これらの値とシステムサイズL^D、素子数Nによってさまざまな時空間パターンを成す。空間自由度と内部自由度を持つ素子群からなる常微分方程式系で、素子同士の相互作用によってさまざまな創発構造を呈すのである。(これらモデルの詳細な導出過程は文献[4]に、幾つかのパターンの紹介は文献[4]の添付動画、及び、文献[5]に載せている。) 豊富な創発構造のうち、本報告では特に、二次元空間において素子群が膜状に配置する'膜(Membrane)'パターンに着目する。以降の解析は、飯田一輝氏との共同研究である。

'膜(Membrane)'パターン

Membraneパターンはパラメータ$c_1 = 1.3, c_2 = 3.0, c_3 = 0.02, \alpha = 0.0$近傍で観察される。このパターンでは図1左のように数個の素子を他の素子が囲う。素子群の位置関係は固定的ではない(図3)。膜状に配置される素子と膜内素子は頻繁に入れ替わり、かつ、その素子数比も変化する。

時間とともに膜は形を変え、素子が散在しそうになり、再び、まとまりのある膜状構造になり、を繰り返す。このパターンではパラメータ α が 0 であるため、一見複雑な様相を見せつつも、他のパターンと比較して解析が容易であるとも予想される。またMembraneはあるパラメータ範囲内

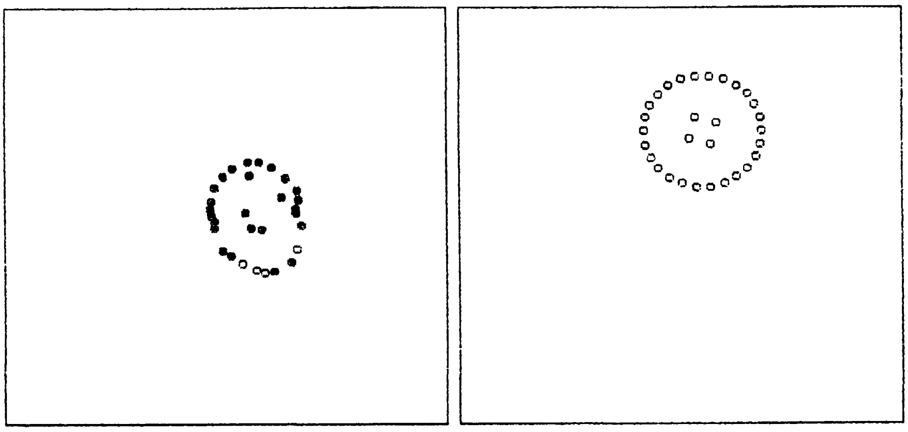

図 1: Membrane(左) と Section of Fruit(右)。システムサイズ $L = 10$、素子数 $N = 30$。グレースケールは各素子の内部状態 ψ_i を表す。周期境界二次元空間でのスナップショット。

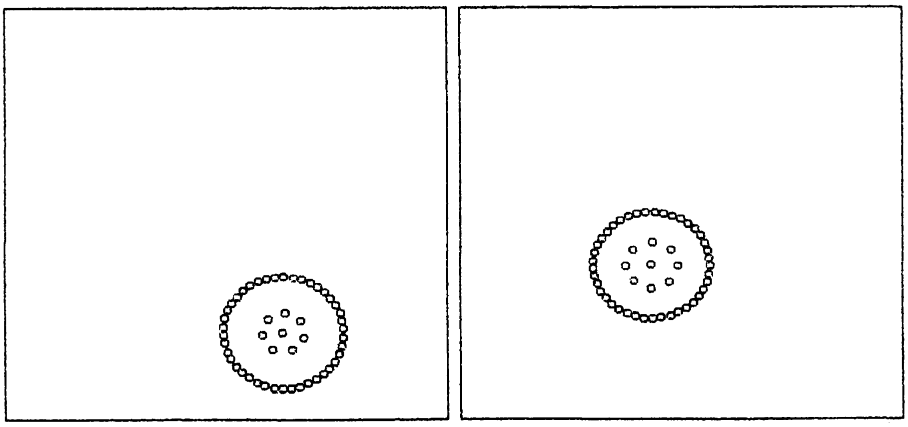

図 2: 初期値が異なると細部が異なるパターンになることがある (システムサイズ $L = 10$、素子数 $N = 50$)

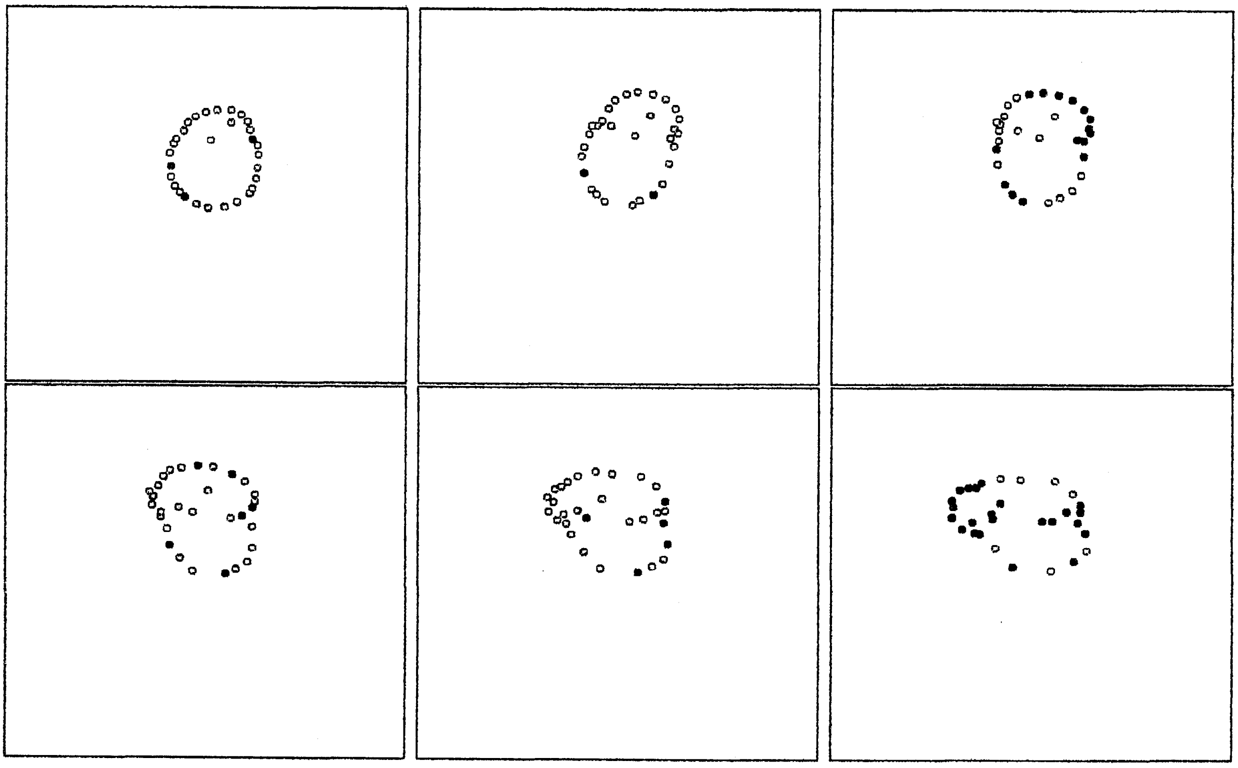

図 3: Membrane の時間変化挙動。左上 $t = 0$、中上 $t = 25$、右上 $t = 50$、左下 $t = 75$、中下 $t = 100$、右下 $t = 125$。

では、我々が‘果実(Section of Fruit)’と呼ぶ、対称性の良い終状態に漸近する場合がある(図1右)。Section of Fruitは同一のパラメータ、同一の素子数であっても初期値によって内部の素子の数や並び方、膜状配置された外側素子からなる円の(近似的)直径などが変化する。図2は初期値以外はともに同じ条件で数値計算したものであるが、形成されたSection of Fruitは上記のように内部の素子数が異なる(左図では8個、右図では9個)。

‘膜(Membrane)’パターン周囲の相図

まずMembrane周辺のパラメータ空間において、素子群がどのように振る舞うのかを調べた。Membraneが観察されるパラメータの周辺でc_1とc_2の値を0.2ずつ変化させ、オーダーパラメータの変化を調べた。オーダーパラメータには「最近接素子との距離の平均」$< \min_j |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| >$と「内部状態の分散」$< (\bar{\psi}_i - \psi_i)^2 >$を用いた。ここで、$\bar{*}$は$i$での平均、$< * >$は$i$と$t$での平均である。$t = 0 \sim 5000$までは、トランジェントとして無視し、$t = 5000 \sim 10000$の時間平均を用いた。そのほかの条件は素子数$N = 20$、システムサイズ$L = 10$、周期境界条件である。その結果を図4,5に示す。

この結果から大きく4つの相(A,B,C,D)にわかれていること、4つの領域を分けている境界線がおおよそπの整数・半整数倍になっていること、領域AやDの境界線が弯曲し

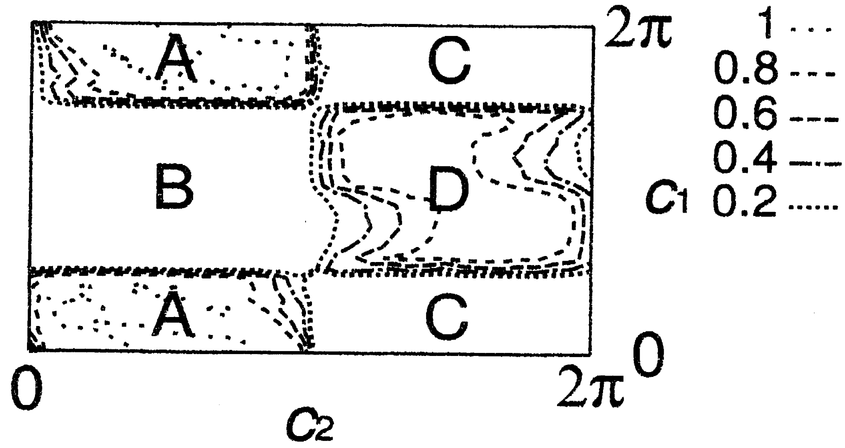

図 4: 最近接素子との距離の平均の等高線表示

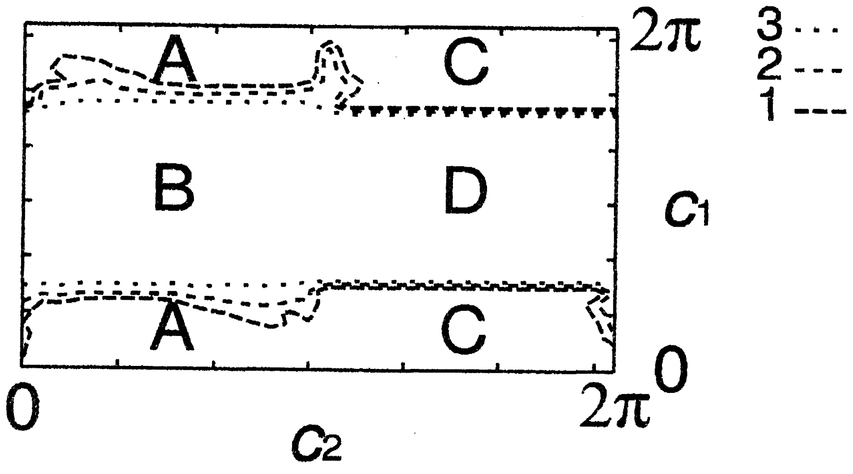

図 5: 内部状態の分散等高線表示

ていることが見てとれる。各領域での代表的なパターンを図 6に示す。

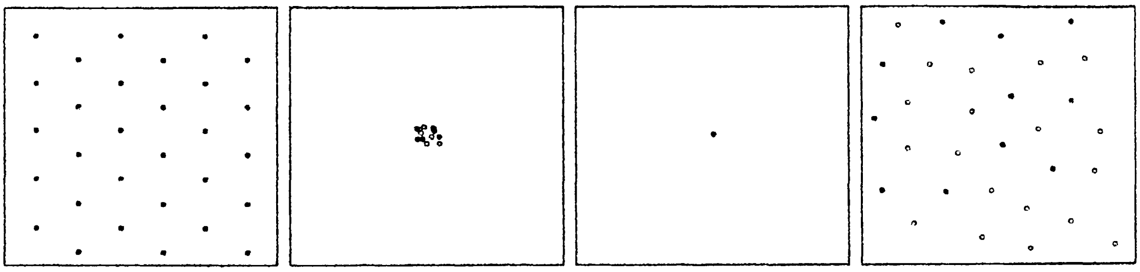

図 6: 左から順に領域 A($c_1 = 0.5, c_2 = 1.5$),B($c_1 = 3.0, c_2 = 2.0$), C($c_1 = 6.0, c_2 = 4.0$),D($c_1 = 4.0, c_2 = 4.0$) の典型パターン (どのパターンも $c_3 = 0.02, \alpha = 0$)

二体系解析

一般に多体系の解析は困難である。そこで、素子数$N = 2$に単純化して、それぞれの領域における素子群の挙動を、解析計算と数値計算の両方で求めた。

まず内部状態を考える。ふたつの素子$1, 2$の内部状態をψ_1, ψ_2とし、位相差を$\psi_1 - \psi_2 \equiv \Psi$とする。式(7)に$\alpha = 0$を代入して、$e^{-|\mathbf{R}_{21}|} = e_R$とおくと

$$\dot{\Psi} = -2e_R \sin\Psi \cos c_1 \tag{9}$$

を得る。ここで注目すべきは、パラメータc_1が$\cos$関数の中に入っていることである。領域AとCにおいて、$\dot{\Psi}$は$\Psi > \pi$のとき正、$\Psi < \pi$のとき負になり、これは内部状態に引力が働き、位相が揃おうとすることを表す。また領域BとDにおいては、$\dot{\Psi}$は$\Psi > \pi$のとき負、$\Psi < \pi$のとき正になり、これは位相に斥力が働くことを表す。

次に位置を考える。素子数が２の場合、素子は同一直線上を移動する。そのため、ふたつの素子の位置を$x_i \equiv \hat{\boldsymbol{R}}_{21}|_{t=0} \cdot \boldsymbol{r}_i$、位置差を$x_1 - x_2 \equiv R$とする。位相差と同様にして

$$\dot{R} = -2c_3 e_R (R/|R|) \cos\Psi \sin c_2 \tag{10}$$

を得る。やはりここで注目すべきは、パラメータc_2がsin関数の中に入っていることである。位相の場合と同様にして考えると、領域ＡとＤにおいては斥力が、領域ＢとＣにおいては引力が働いていると言える。

２素子系の数値計算を行った。結果を図7,8に示す。数値計算は、素子数が２であることをのぞけば、最初の数値計算と同じ条件下で行った。この結果は解析計算の結果と一致する。

位置が重なり、位相に斥力が働いて形成される、孤立クラスター

多体系の場合、領域Ｂではいくつかの素子が一点に集まったクラスターがいくつか形成され、それ以上動こうとしない。この原因を考える。２素子系と同様に、多体であっても領域Ｂでは位置に引力、位相に斥力が働いていると予想される。また、相互作用は$e^{-|R_{ji}|}$の項により、近い素子からの影響が強い。そのため、ある初期値からスタートすると、近くの素子同士がより近付くと考えられる。こうしてまず、いくつかの素子が一点に集まったクラスターがいくつか形成される。次に、２〜３個の素子が一点にあつまり、

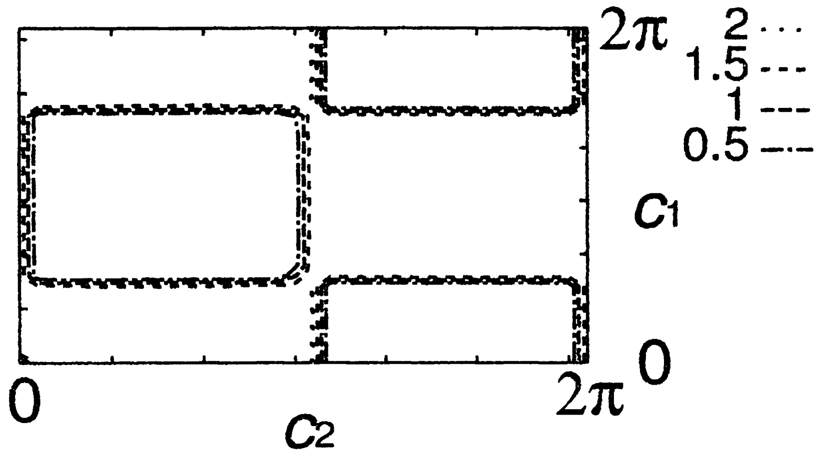

図 7: 2素子系の最近接素子までの距離 (2素子系なので、単純に2素子間距離に等しい) の平均の等高線表示

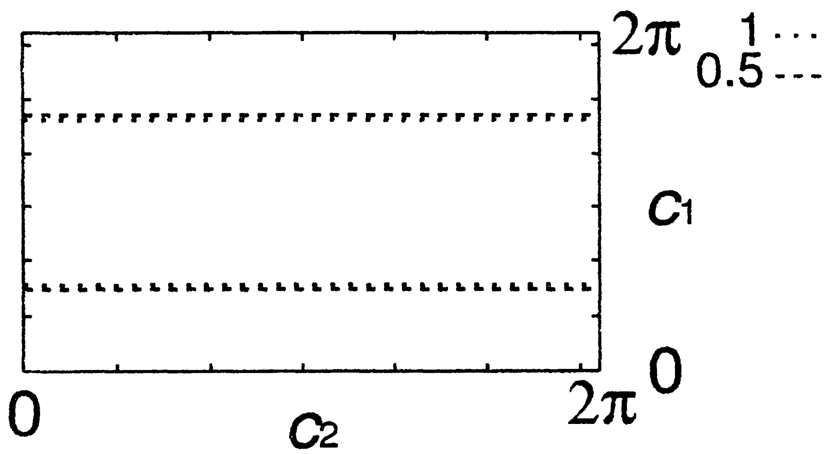

図 8: 2素子系の内部状態の分散の等高線表示

外部からの影響がない状態を考える。内部状態に斥力が働いているから、２素子の場合、素子の内部状態はπずれて同期する。よって、この２つの素子から他の素子への影響は$e^{-|\mathbf{R}|}(\sin(\theta)+\sin(\theta+\pi))=0$より、相殺されて消える。また３つの素子の場合も、内部状態に斥力が働いていると考えられるから、位相は$2/3\pi$ずれて同期する。$e^{-|\mathbf{R}|}(\sin\theta+\sin(\theta+\frac{2}{3}\pi)+\sin(\theta-\frac{2}{3}\pi))=0$より、他素子への影響は相殺される。４つ以上の素子の場合についても、同様に他素子への影響が消える。このようにして、いくつかの素子が一点に集まったクラスターが形成され、クラスター間の相互作用が消え、素子が停止すると考えられる。

以上より、素子数が多い場合でも、２素子系と同様の効果により相境界線が引かれるものと考えられる。一方で、二体系では領域ＡやＤの境界の弯曲は見られず、この付近ではMembrane(やSection of Fruit)が見られる。これらは一見２素子系の外挿では説明できないように思えるかもしれないが、Membraneの形成機構は２素子系の結果から次のような解釈が可能である。

‘膜(Membrane)’パターンの構造維持機構

Membraneが見られるパラメータにおいては、近い振動子同士は同位相同期し、同期クラスターができる(図9)。同位相振動子間には斥力が働き、クラスター外縁の振動子は離れる。離れた振動子はクラスターからの影響が指数関数

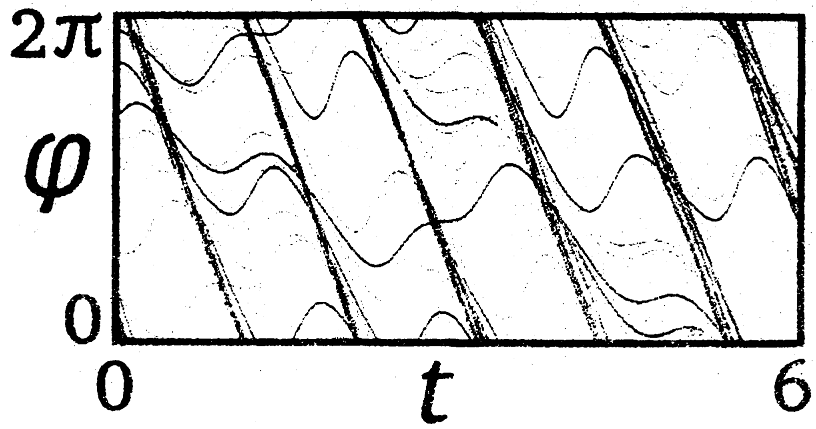

図 9: Membrane の位相変化の時系列。横軸が時間、縦軸が位相。グレースケールは素子の番号を表す。束になった直線が同期クラスター、それ以外が非同期素子を表す。

的に減衰し、同期できなくなる。非同期振動子は、クラスターから斥力と引力の両方を受け、その場で揺らぐ。但し、平均的には引力が勝り、クラスターへ復帰する。上記を繰り返し、Membrane が形成されている。

上記過程での「平均的には引力が勝る」ことは、再び 2 素子系を考える事で理解できる。2 素子系における式 (9) を式 (10) で割り、解くと位相と位置が拘束される不変曲線

$$|\sin\Psi| = E\exp(a|R|) \tag{11}$$

を得る。ここで E は初期値によって決まる保存量であり、$a = -\cos c_1/(c_3 \sin c_2)$ である。Membrane パターンにおいては $a \approx -94.7$ であり、大きい R において、$|\sin\Psi|$ が減ると急激に $|R|$ が増える関数形である。これは、位相差 Ψ が 0 からほんの僅かずれただけで、$|R|$ が急激に減少すること

を意味する。多素子系であっても同様の傾向が見られるだろうから、非同期振動子が同期クラスターから受ける力は平均的には引力が勝ると推論できる。

まとめと議論

本報告では、動的内部自由度を持つ素子が空間を自己駆動する系の普遍的一モデルとして、Swarm Oscillatorsモデルを紹介した。このモデルの多様なパターンのうち、'膜(Membrane)'パターンに注目した。「最近接素子との距離の平均」と「内部状態の分散」をオーダーパラメータとして相図を求めた。その結果、おおまかに4相に別れ、それらの相の境界付近でMembraneパターンが観察された。各相の形成機序を、2素子系の解析から議論した。特にMembraneパターンの複雑さは、位置の引力・斥力、位相(内部自由度)の引力・斥力が、相互に切り替わりフィードバックすることにより生じている。

Membraneは、あるパラメータ領域では'果実(Section of Fruit)'パターンに至るが、過渡状態では無く終状態としてMembraneが存在するパラメータ領域もあるようである。たとえば数値計算では、$c_1 = 1.3, c_2 = 3.0, c_3 = 0.02, \alpha = 0.0$の場合、$t = 10^3 \sim 10^4$程でSection of Fruitに至る。しかし、$c_1 = 1.33, c_2 = 2.92, c_3 = 0.02, \alpha = 0.0$では、遥かに長い$t = 10^7$まで計算してもSection of Fruitには至らない。Membraneは、Section of Fruitと多重安定性を有して

いるかもしれない。より厳密な検討は課題である。Section of Fruitは対称性が良いので、このパターンの解析を通し、Membraneの解析も更に進むと期待される。このような解析を通し、動的内部自由度を持つ素子が空間を自己駆動する系に対して、普遍的一数理構造を提言できればと考えている。

飯田一輝は、本研究の一部に関わるソフトウェア開発に対して、（財）上月スポーツ・教育財団から助成を受けた。この場を借りて同財団に深く感謝する。

参考文献

1. Dan Tanaka and Yoshiki Kuramoto
   Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling
   Physical Review E **68** 026219 (August 2003)

2. Dan Tanaka
   Chemical turbulence equivalent to Nikolavskii turbulence
   Physical Review E **70** 015202(R) (July 2004)

3. Dan Tanaka
   Turing instability leads oscillatory systems to spatiotemporal chaos
   Progress of Theoretical Physics **161** 119 (April 2006)

4. Dan Tanaka

General Chemotactic Model of Oscillators
Physical Review Letters **99** 134103 (September 2007)

5. Dan Tanaka
Swarm Oscillators - normal form of motile particles with internal dynamics -
Progress of Theoretical Physics (in press)