

Notes on Reverse Recursion Theory and Reverse Mathematics (逆再帰理論と逆数学に関して)

木原 貴行

東北大学理学研究科数学専攻

2008 年 9 月 10 日

概要

1. 超準モデル上の再帰理論の取り扱い、より無矛盾性に優れた計算理論の展開へと役立ち、また弱い理論における計算構造の扱いが重要となる逆数学への影響も大きいと考えられる。実際、この研究の主な応用は逆再帰理論として知られており、また、別の応用として、ラムゼー型定理に関する逆数学に関する結果も知られている。これらに関する新たな概念を導入し、それらから自然に浮上する幾つかの問題を紹介する。
2. ラムゼー型定理に関する逆数学は古くから深く研究されている。この研究に関連して、以前、筆者が得た結果などから自然に浮上する問題を紹介する。

1 超準モデル上の計算と逆再帰理論

1.1 根底の考え

通常、計算理論は標準モデル \mathbb{N} 上において展開される。しかし、標準モデルを前提とした理論の展開は、たとえば量化記号が複雑に入り組んだ式に対する数学的帰納法や最小値原理などの強力な推論を自動的に要請し、この結果、無矛盾性の意味で非常に悪いものとなってしまふ。このため、ここでは超準モデルの可能性を排除せず、仮に超準モデル上であっても通用する計算理論を展開したい。特に、ここでは $I\Delta_0$ のような非常に弱い推論しか仮定しないような、無矛盾性の意味で非常に良い算術の体系で議論を展開する。逆計算理論に関する研究としては、Chong-Yang[4],[5] が詳しい。

また、別な大きな目的としては、計算理論による超準モデルの解析を行うものがある。物理学者ドイチュは、量子力学の良い理解のために、量子計算の概念を導入した。「計算」

は、直感的によく理解可能な概念であり、ある対象の上でどのような計算が展開できるかを調べることは、その対象自体の理解にも大きく繋がると考えられる。このため、超準計算を定式化することは、超準モデルという異質な対象への理解と繋がるだろう。

また、最後の目的として、逆数学への応用がある。逆数学における基本理論では、算術に対して $I\Sigma_1$ しか仮定していないにも関わらず、定理や理論の分離をする際、多くの場合 ω -モデル (標準モデル) をつくり、二階の構造によって目的を達する。しかし、理論上は、一階の構造を超準モデルにすることによっても目標を達せられ、また、超準モデルの可能性を考慮することで、証明の幅は広がるはずである。それにも関わらず、実際にほとんど行われなないのは、超準モデルが良く理解されたものではないからだろう。超準モデル上の計算が身近で手軽な概念になれば、これは容易に達成されるはずである。超準モデルにおける再帰理論の逆数学への応用としては、たとえば Chong[3] がある。

1.2 超準モデルにおける計算の導入

一階算術のモデルに関する定義と基本的性質に関しては、Kaye[9] および Kossak-Schmerl[10] を参照せよ。

超準モデル上 (あるいは弱い公理しか持たない算術体系上) の計算の定式化やその基本的性質の証明は、Groszek-Slaman[7],[8], Slaman-Woodin[15] などによる。以後、 M は $I\Delta_0 + \exp$ のモデルとする。

定義 1.1 (各点計算可能性, see Slaman-Woodin[15]). $\Sigma_1(M)$ 集合 $\tilde{\Phi} \subseteq (\text{Fin})^M \times (\text{Fin})^M \times M \times M$ について、次を満たすとき $\Phi(X; x) = y$ と書く。

$$\exists P, N \text{ } M\text{-有限} (P \subset X \wedge N \subset \bar{X} \wedge \langle P, N, x, y \rangle \in \tilde{\Phi}).$$

A から f を各点計算可能とは、次を満たすときを指す。

$$\exists \tilde{\Phi} \in \Sigma_1(M) \forall x \in M (\Phi(A; x) = f(x)).$$

このとき、 $f \leq_{pT} A$ と書く。

注意. 各点計算可能性には問題点が一つある。 A から f を各点計算するアルゴリズム Φ が与えられているとき、我々は A をオラクルとした計算を実行させた後、適当な超準時間経過後に再びこのモデルにアクセスすることにより f の各点での値を知ることができる。しかし、それを繰り返したところで、我々に可能なのは f の N -有限個の値を知ることだけである。超準有限個の結果を知ることが実現できない可能性があるのは、超準有限

オラクルの超準有限和が必ずしも超準有限でないため、 M -有限個の計算に用いるオラクルの総量が非有界になり得るからである。このため、有界時間の計算の実行では、 M -有限個の入力に対する計算結果が決定せず、結果としてそれを知る方法が存在しなくなってしまう。各点計算のこのような問題は Groszek-Slaman[8] により指摘され、実際、各点計算が非推移的であることが示された。

希望としては、超準時間の計算を行えるのだから、当然、超準有限個の計算結果を知ることができてほしい。ただし、超準有限個の入力 $\mathbf{x} = \vec{x}$ に対する出力 \vec{y} をあわせたものが超準有限になるという保証は無い。この困難を回避するためには、超準有限個の入力 \mathbf{x} と超準有限個の出力 \mathbf{y} の対についてを考えればよい。 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ に対し、ある有界時間で \mathbf{x} の全ての入力について計算が停止し、その計算結果が \mathbf{y} と一致しているかを問う。

定義 1.2 (像計算可能性 see Slaman-Woodin[15]). A から f を像計算可能とは、

$$\exists \Phi \in \Sigma_1(M) \forall a, b \in M \\ (\Phi(A; a) = b \leftrightarrow (\forall x \in a \exists y \in b f(x) = y \wedge \forall y \in b \exists x \in a f(x) = y)).$$

このとき、 $f \leq_{iT} A$ と書く。

上記の定義では、計算の生成結果のみにアクセスする方法だけしか得られないが、さらに、超準有限個の計算結果を全て正確に知る方法を要請したい場合もある。このため、我々は計算可能性の定義に関して、次の更なる改良を行う。

定義 1.3 (計算可能性). A から f を計算可能とは、

$$\exists \Phi \in \Sigma_1(M) \forall a \in M (\Phi(A; a) \downarrow \leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in a \leftrightarrow f(x) = y)).$$

このとき、 $f \leq_T A$ と書く。

命題 1.1. $\leq_T \Rightarrow \leq_{iT} \Rightarrow \leq_{pT}$. さらに、 A, B が集合なら、 $A \leq_T B \Leftrightarrow A \leq_{iT} B$.

定義 1.4. $P(A)$ を A の M -有限部分集合全体、 $N(A)$ を A の M -有限部分集合全体のこととする。

命題 1.2. 集合 A, B について、次の 2 条件は同値。

1. $A \leq_T B$,
2. $P(A), N(A) \leq_{pT} B$.

定義 1.5 (チューリング次数). M のチューリング次数全体の集合 \mathcal{D}^M を $\mathcal{P}(M) / \equiv_T$ に

より定義する. ここで, $\mathcal{P}(M)$ はべき集合全体, $X \equiv_T Y$ は $X \leq_T Y$ かつ $Y \leq_T X$ により与えられる同値類.

1.3 超準モデルの非正則次数構造と標準モデルの問題

定義 1.6 (正則性). モデル M の集合 X が正則とは, 任意の a に対して $X \upharpoonright a$ が M -有限であるときを指す.

定義 1.7. M 上のチューリング次数 $\mathbf{a} \in \mathcal{D}^M$ が非正則とは, 次数 \mathbf{a} の正則集合が存在しないときを指す.

Chong-Yang の問題 [5]

非正則次数の構造を研究せよ.

非正則集合をオラクルとして用いる計算は非常に扱いにくく, 非正則次数の構造を調べるのは困難である. まず, 次の基本的な問題を提出する.

問題 1. $\mathbb{1}\Delta_0 + \exp$ の超準モデルには常に非正則次数が存在するか? また, 有界カットは常に非正則次数を持つか?

定理 1.1 (Chong-Qian-Yang[6]). PA の可算飽和モデルにおいて, 任意の $\mathbf{a} \in \mathcal{D}^M (\geq \deg(\mathbb{N}))$ は非正則次数である.

この結果に注目して, 超準モデルの部分集合としての標準モデルの次数を探ってみよう.

定義 1.8. ある $S \subseteq \mathbb{N}$ について $\mathbf{s} = \deg(S)$ となる次数 $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^M$ を標準次数と呼ぶ. そうでないとき, 超準次数と呼ぶ. モデル M における標準次数全体の集合を $\mathcal{D}_\mathbb{N}^M$ と書く.

注意. \mathbb{N} の任意の無限部分集合 S は \mathbb{N} を計算する. なぜなら, まず, $b > \mathbb{N}$ を任意に固定する. 与えられた M -有限集合 a について, $a \subset \mathbb{N}$ かどうかを調べるには, $m = \max a$ について,

$$m \in \mathbb{N} \leftrightarrow \exists n \in [m, b] y \in S.$$

かどうかを調べればよい. $a \subset \bar{\mathbb{N}}$ の判定も同様にして容易に分かるだろう.

Chong-Qian-Yang の定理により, 一般に $\deg(\mathbb{N})$ の上に正則次数は存在しない. しかし, 次の弱い性質は満たす.

定理 1.2. 任意の標準次数 $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}^M$ に対して, その上をジャンプの行き先とする正則次数 $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_{reg}^M$ が存在する. つまり,

$$\forall \mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}^M \exists \mathbf{r} \in \mathcal{D}_{reg}^M (\mathbf{r}' \geq \mathbf{s}).$$

証明. $\deg(S) = \mathbf{s}$ なる集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ を取る. $\checkmark : \mathbb{N} \rightarrow M$ を共終写像とする. このとき, $R = \{\langle \checkmark i, S(i) \rangle : i \in \mathbb{N}\}$ とする. 任意の $a \in M$ について $R \upharpoonright a$ は \mathbb{N} -有限なので M -有限. よって, $\mathbf{r} = \deg(R) \in \mathcal{D}_{reg}^M$. さらに,

$$x \in S \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \langle \checkmark i, S(i) \rangle \in R.$$

まず, $S \leq_T R \oplus \mathbb{N}$ を見る. 肯定的計算の方だけ確認する. M -有限集合 a について, $\max a \notin \mathbb{N}$ なら拒否し, さもなくば a は \mathbb{N} -有限なので, 各点での計算可能性を見れば十分. しかし, $i \in S \leftrightarrow (p_R(i))_1 = 1$. ここで, p_R は R の下からの枚挙で, R -計算可能である.

次に, $R \oplus \mathbb{N} \leq_T R'$ を見る. $\mathbb{N} \leq_{p_T} R'$ を示せば十分. しかし, $x \in \mathbb{N} \leftrightarrow p_{R'}(x) \downarrow$ □

問題 2. \mathcal{D}^M において $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}^M$ は定義可能か?

定理 1.3 (Chong-Qian-Yang[6]). M を PA の可算飽和モデルとする. このとき, $\mathcal{D}^M(\leq \deg(\emptyset^{(\mathbb{N})}))$ で $\mathcal{D}^M(\geq \deg(\mathbb{N}))$ は定義可能.

$X \in SSy(M)$ ならば $M \models X \leq_T \mathbb{N}$ なので, $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}^M \neq \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ は容易に分かる. しかし, low 基底定理を考えれば, もしかしたらジャンプについては M と \mathbb{N} で一致しうるのではないだろうか? この問題を定式化しよう.

定義 1.9 (標準ジャンプ作用素). $\circ : \mathcal{D}_{\mathbb{N}}^M \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{N}}^M$ を

$$\mathbf{a}^\circ = \mathbf{b} \leftrightarrow \exists A, B \subseteq \mathbb{N} (\deg(A) = \mathbf{a} \wedge \deg(B) = \mathbf{b} \wedge \mathbb{N} \models \deg(A)' = \deg(B)).$$

により定義し, これを標準ジャンプ作用素と呼ぶ.

問題 3. 超準モデルと標準モデルの次数の関係についての問題を幾つか挙げる.

1. 標準ジャンプと (超準) ジャンプが一致するような超準モデルは存在するか?
2. 標準ジャンプが中間ジャンプになるようなモデルは存在するか? つまり, $\forall S \subseteq \mathbb{N} (S <_T S^\circ <_T S')$ なるモデルは存在するか?

3. あるモデル M で, M において各 $S \subseteq \mathbb{N}$ について $\Phi(S) \subseteq \mathbb{N}$ を満たすプログラム Φ で,

$$\forall S \subseteq \mathbb{N} \models S <_T \Phi(S) <_T S'$$

かつ \mathbb{N} で次数不変汎関数となるものは存在するか?

4. $X \in SSy(M) \leftrightarrow M \models X \equiv_T \mathbb{N}$ は成立するか?

定理 1.4. 上の問題 3. において, 次数不変性を要求しなければ, そのようなものは存在する.

証明. $S \subseteq \mathbb{N}$ を任意に取る. low 基底定理の証明を超準モデル内でトレースする. Φ は S をオラクルに用いて \mathbb{N} の S -計算可能万能無限二分木を生成し, その道を取るようなプログラムとする. オラクル $S \geq_T \mathbb{N}$ を用いることにより, 標準部分で切る作業が簡単に行えることがポイントとなる. つまり, \mathbb{N} で S -計算可能な無限二分木は M でも S -計算可能であり, さらに M の超準性により, 道も S -計算可能に得られる. これに加え, low 基底定理と同様の構成を行えばよい. \square

非正則次数の性質を調べるために, 非正則集合の複雑さを見よう. 非正則集合は有限でない有界始切片を持つ. まず, この始切片がどの程度の複雑になりえるかを見よう.

定義 1.10. $M \models \neg I\Sigma_n$ とする. このとき, 次の非正則集合 K を含む次数を l -合成次数と呼ぶ.

$$\forall i, j < l (i < j \rightarrow \emptyset <_T K \upharpoonright a_i <_T K \upharpoonright a_j <_T K).$$

を満たす列 $\{a_i\}_{i \in l}$ が存在する. 特に $l = \mathbb{N}$ のとき, 可算合成次数と呼び, $l = M$ のとき, 無限合成次数と呼ぶ.

定理 1.5. 1. $M \not\models I\Sigma_n$ なら, $\text{deg}(\mathbb{N}) \cup \text{deg}(\emptyset^{(\mathbb{N})})$ の下に可算合成次数が存在する.
2. 任意の可算超準モデルにおいて, 無限合成次数は存在する.

証明. (1) I_i を Σ_{n+i} カットとし, b_i を各 I_i の上界とする. $a_i = \sum_{j < i} b_j$ により定義する. さらに, $I_i + a_i$ を $\{x + a_i : x \in I_i\}$ と定義する. このとき,

$$K = \bigcup_{i \in \omega} (I_i + a_i)$$

が求めるものである.

(2) M の可算性により, 各次数 $\mathbf{a} \in \mathcal{D}^M$ について, $\mathcal{D}^M(\leq \mathbf{a})$ は可算である. したがって, $\mathcal{D}_\mathbb{N}^M$ は連続体濃度を持つ. よって, 各 $\mathbf{a}_i \in \mathcal{D}_\mathbb{N}^M$ を $\mathcal{D}^M(\leq \bigoplus_{j < i} \mathbf{a}_j)$ に属さない

ものとして選び、前のようにして非正則集合を構成すればよい。□

問題 4. 可算合成次数, 無限合成次数はどの程度低い次数として得られるか?

2 二階算術の理論と逆数学

2.1 理論の保存性

二階算術に関する定義と基本的性質に関しては Simpson[13] を参照せよ。

定義 2.1. T_1, T_2 を理論, Γ を文の集合とする. このとき, T_2 が T_1 上 Γ -保存的とは, T_2 で証明できる Γ の任意の文は T_1 でも証明できることを指す.

二階算術の理論 RCA_0 と, 有限の立場の現代的形式化といわれる原始再帰算術 PRA との対応は次により知られる.

定理 2.1 (see Simpson[13]). RCA_0 は PRA 上 Π_2^0 -保存的. したがって, 特に RCA_0 の無矛盾性は PRA の無矛盾性に還元される.

二階算術の理論間の保存性を得るための典型的な手法は, ω -部分モデルを用いるものである.

定義 2.2. \mathcal{M} が \mathcal{M}' の ω -部分モデルとは, \mathcal{M} が \mathcal{M}' の部分構造であり, なおかつ一階部分が等しいことである.

つまり, $\mathcal{M} = (M, S_M)$, $\mathcal{M}' = (M', S_{M'})$ としたとき, $M = M'$ かつ $S_M \subseteq S_{M'}$ のことである.

補題 2.1 (see Simpson[13]). T_1 の任意の可算モデルが T_2 のある可算モデルの ω -部分モデルならば, T_2 は T_1 上 Π_1^1 保存的.

この補題を応用して, 理論 T_1 の与えられたモデルに対し, ある種の算術的強制法を用いてジェネリック集合を付け加えることにより T_2 のモデルを得るという手法を用いて, 算術の理論間の Π_1^1 -保存性に関する様々な結果が得られている.

定理 2.2 (Harrington). WKL_0 は RCA_0 上 Π_1^1 -保存的.

定理 2.3 (Brown and Simpson[1]). $\text{RCA}_0 + \Pi_\infty^0\text{-BCT}$ は RCA_0 上 Π_1^1 -保存的.

定理 2.4 (Cholak-Jockusch-Slaman[2]). $\text{RCA}_0 + \text{COH}$ は RCA_0 上 Π_1^1 -保存的.

さらに, Π_1^1 を拡張した特殊な文のクラスに関しても, 幾つかの保存的結果が知られている.

定義 2.3. 論理式のクラス Uniq を次により定義する.

$$\text{Uniq} = \{ \forall X \exists! Y \varphi(X, Y) : \varphi \text{ 算術的. } \}.$$

定理 2.5 (Simpson-田中-山崎 [14]). WKL_0 は RCA_0 上 Uniq -保存的.

定理 2.6 (山崎 [17]). $\text{RCA}_0 + \Pi_\infty^0\text{-BCT}$ は RCA_0 上 Uniq -保存的.

定理 2.7 (木原 [in preparation]). $\text{RCA}_0 + \text{COH}$ は RCA_0 上 Uniq -保存的.

これに関して, 山崎 [in private communication] は, explicit に書けない任意の二階算術の公理 α について, それを RCA_0 に加えても Π_1^1 -定理を増やさなければ Uniq -型の定理も増やさないと予想した. また, 横山 [in private communication] も同種の次の問題を提起した.

問題 5. 二階算術の体系 $T \supset \text{RCA}_0$ で, T は RCA_0 上 Π_1^1 -保存的だが Uniq -保存的でないものは存在するか?

問題 6. T を Π_2^1 理論とする. $T + \text{IS}_n$ は IS_n 上 Π_1^1 -保存的であり, ある $m \geq n$ に対し $T + \text{IS}_m$ が IS_m 上 Uniq -保存的であるとする. このとき, $T + \text{IS}_n$ は IS_n 上 Uniq -保存的か?

参考文献

- [1] D. K. Brown and S. G. Simpson, The Baire category theorem in weak subsystems of second-order arithmetic, *Journal of Symbolic Logic* **58**(1993), pp. 557–578.
- [2] P. A. Cholak, C. G. Jockusch and T. A. Slaman, *On the strength of Ramsey's theorem for pairs*, *J. Symb. Logic.* **66**(2001), 1-55.
- [3] C. T. Chong, *Nonstandard methods in Ramsey's theorem for pairs*, <http://www.math.nus.edu.sg/~chongct/ims.pdf>
- [4] C. T. Chong and Y. Yang, *Recursion theory in weak fragments of arithmetic: A study of cuts*. In: **Proc. Sixth Asian Logic Conference**, Beijing, pp. 47-65,

World Scientific, 1998

- [5] C. T. Chong and Y. Yang, *Computability theory in arithmetic: Provability, structure and techniques*, in: **Computability Theory and Its Applications**, pp. 73-81, Contemporary Math. 257, Amer. Math. Soc., 2000.
- [6] C. T. Chong, L. Qian and Y. Yang, *The Friedberg jump inversion theorem revisited: A study of undefinable cuts*. In: **Logic Colloquium**, Prague 1998, pp. 140-153, 2000.
- [7] M. J. Groszek and T. A. Slaman, *Foundations of the priority method I-finite injury and infinite injury*, preprint.
- [8] M. J. Groszek and T. A. Slaman, *On Turing reducibility*, preprint.
- [9] R. Kaye, **Models of Peano Arithmetic**, Oxford Logic Guides 15, Oxford University Press, 1991.
- [10] R. Kossak and J. H. Schmerl, **The Structure of Models of Peano Arithmetic**, Oxford Logic Guides 50, Oxford University Press, 2006.
- [11] J. S. Miller and R. Solomon, *Effectiveness for infinite variable words and the dual Ramsey theorem*, Arch. Math. Log. 43(2006) 543-555.
- [12] K. R. Milliken, *A Ramsey theorem for trees*, J. Combinatorial Theory, 26(1979), 215-237.
- [13] S. G. Simpson, **Subsystems of Second Order Arithmetic**, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.
- [14] S. G. Simpson, K. Tanaka and T. Yamazaki, *Some conservation results on weak König's lemma*, Ann. Pure Appl. Log. 118(2002), 87-114.
- [15] T.A. Slaman and W. H. Woodin, Σ_1 -collection and the finite injury priority method, **Mathematical logic and its applications**, Lecture notes in Mathematics, vol. 1388, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [16] R. I. Soare, **Recursively Enumerable Sets and Degrees**, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1987.
- [17] T. Yamazaki, *Some more conservation results on the Baire category theorem*, Ann. Pure Appl. Log. 118(2002), 87-114.
- [18] Y. Yang, *Iterated trees and fragments of arithmetic*, Arch. Math. Log. 34(1995), 97-112.