数理解析研究所講究録
第 1636 巻 2009 年 157-162

Ambush Game について

兵庫県立大学・経営学部　菊田健作 (KIKUTA Kensaku)
School of Business Administration
University of Hyogo

1 はじめに

ある海峡を密輸組織 (Infiltrator) が密輸船 (Agent) を侵入させることを目論んでいる。一方、当局 (Defender) はこれを阻止するためにケーブル等の探知装置 (Detector) を設置する場所を検討している。Infiltrator は探知されないように Agent の侵入地点を決めたい、一方、Defender は探知する可能性が大きくなるように Detector の設置場所を決めたい。この状況を Infiltrator と Defender の間の 2 人ゼロ和ゲームとして定式化したものを Ambush game と呼ぶ。

本稿の目的は文献 Baston and Kikuta(2008) の内容を中心にして Ambush game とその周辺について述べ、今後の検討課題を探ることである。Ruckle (1983) や Garnaev (2000) は、Ambush game とその周辺について解説した部分を含む成書である。

2 Ambush game

本節では Ambush game を定義しこれまでに得られている成果について簡略に述べる。次のような Defender と Infiltrator の 2 人ゼロ和ゲームを考える。Defender が区間 $[0,1]$（上述の海峡をモデル化したもの）においてそれぞれが長さ $a_1,\ldots,a_m$ の m 個の部分区間（上述の m 個のケーブル等）を選ぶ。$a_1 \geq \ldots \geq a_m > 0$ を仮定する。Infiltrator は区間 $[0,1]$ 内に r 個の点（Agent の侵入地点）を選ぶ。Infiltrator が選んだすべての点が Defender が選んだ部分区間の和集合に属するとき（すべての Agent を捕捉するとき）、Defender は利得 1 を得る。そうでないときは 0 を得る。Defender は相手が選ぶ点の個数 r を知っており、また Infiltrator は m および $a_1,\ldots,a_m$ を知っている、と仮定する。このゲームを $\Gamma(a_1,\ldots,a_m;r)$ と表し、ゲームの値を $v(a_1,\ldots,a_m;r)$ で表す。Infiltrator の純粋戦略空間は $[0,1]^r$ である。一方、Defender の純粋戦略を部分区間の左端を指定することで表すことにする。ただし、右端が区間 $[0,1]$ からはみ出るような選び方も許すことにする。例えば、$a_m = 0.2$ とするとき、区間の左端を 0.9 とすれば、部分区間は $[0.9,1.1]$ となり、区間 $[0,1]$ からはみ出るが、このときは区間 $[0.9,1]$ を指定

したと考えることにする。このようにして、Defender の純粋戦略空間を $[0,1]^m$ と表す。いま、$x=(x_1,\ldots,x_m)\in[0,1]^m, y=(y_1,\ldots,y_r)\in[0,1]^r$ に対し、Defender の利得が 1 になるのは、

$$y_j \in \cup_{i=1}^m [x_i, x_i+a_i], \quad \forall j=1,\ldots,r,$$

のときである。

Ruckle(1981) は $r=1$ のときのゲームを定義し、$m=1$ のときにゲーム $\Gamma(a_1;1)$ を解いた。Defender の一つの最適戦略は n 個の区間 $[(p-1)a_1, pa_1], p=1,\ldots,n,$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{n}$ で選ぶことである。ここに、n は $na_1\ge 1$ を満たす最小の整数である。これにより Defender は Agent を捕捉する確率を少なくとも $\frac{1}{n}$ とできる。一方、Infiltrator は n 個の点 $p(a_1+\varepsilon), p=0,\ldots,n-1,$ のそれぞれを確率 $\frac{1}{n}$ で選べば、捕捉される確率を高々 $\frac{1}{n}$ とできる。ここに、$\varepsilon>0$ かつ $(n-1)(a_1+\varepsilon)\le 1$ である。区間 $[0,1-a_1]$ の各点を一様に選ぶことは Defender にとって最適でない。

Ruckle(1983) は $m=2, r=1$ のとき、(i) $a_1=a_2$, (ii) $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{3}$, (iii) $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{5}$ の場合にゲーム $\Gamma(a_1,a_2;1)$ を解いた。Baston and Bostock(1987) は $m=2, r=1$ でかつ $a_1\ge\frac{1}{2}$ のときにゲーム $\Gamma(a_1,a_2;1)$ を解いた。また、Lee(1990) は $m=2, r=1$ でかつ $\frac{1}{3}\le a_1<\frac{1}{2}$ のときにゲーム $\Gamma(a_1,a_2;1)$ を解いた。一方、Zoroa et al.(1999) はゲーム $\Gamma(a_1,a_2;1)$ において、a_1 と a_2 の間に種々の関係が成り立つとき成果を得ている。例えば、$0<a_2<a_1<\frac{1}{2}$ であり、ある整数 k に対し $ka_1<1\le(k+1)a_1, ka_1+a_2\ge 1$ とする。さらに、ある整数 ℓ に対して、$k\ell a_2<1$ かつ $a_1+(k-1)\ell a_2+a_2\ge 1$ が成立するとき、ゲームを解いている。

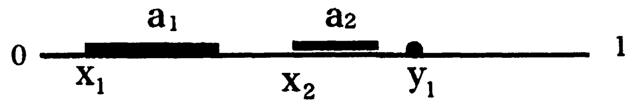

図 1：ゲーム $\Gamma(a_1,a_2;1)$

Baston and Kikuta(2004) はゲーム $\Gamma(a_1,a_2;2)$ の値の上・下限を与えている。特に、$\frac{a_1}{a_2}$ が整数ならば、その上・下限はゲームの値に一致する。Woodward(2003) は有限行列ゲームを考え、それを解くことによりゲーム $\Gamma(a_1,\ldots,a_m;1)$ を解くことが可能であることを示した。さらに、この行列ゲームが Garnaev(1997, 2000) によって導入された離散空間上での Ambush game に関連があることを示した。この方面での Ambush game のさらなる研究は、Zoroa et al.(2001) を参照されたい。

3 Ambush game：Agent が幅を持つ場合

この節では、Baston and Kikuta(2008) について述べる。前節のモデルとの相違点は、Infiltrator が点ではなくて 1 個の部分区間 J を選ぶ、ということである。区間 J の幅を $b>0$ とする。

Infiltrator の純粋戦略を区間の左端 y によって表す。また、Defender が選ぶ区間を $I_1, \ldots, I_m$ とする。I_i の幅は $a_i > 0$ である。Defender の利得は

$$\begin{cases} 0, & \text{if } |J \cap I_i| < \lambda b \text{ for all } i = 1, \ldots, m, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここに、λ の値は両 Player とも知っており、$0 \le \lambda \le 1$ とする。もしも、$a_i < \lambda b$ であるならば、$|J \cap I_i| < \lambda b$ となるから、区間 I_i は Agent を捕捉できない。よって、すべての $i = 1, \ldots, m$ に対し、$a_i \ge \lambda b$ を仮定する。このゲームを $G_\lambda(a_1, \ldots, a_m; b)$ と表し、その値を $w_\lambda(a_1, \ldots, a_m; b)$ と表す。

例 1　$m = 3, a_1 = a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = \frac{1}{10}, b = \frac{1}{5}, \lambda = \frac{1}{3}$ とする。Defender, Infiltrator がそれぞれ純粋戦略 $x = (0.1, 0.3, 0.6), y = 0.5$ を選んだとすると

$$|J \cap I_3| = |[0.6, 0.7]| = \frac{1}{10} > \lambda b = \frac{1}{15}.$$

よって、Defender の利得は 1 である。

定理（Kikuta and Baston 2008）$0 < b < 1$ とする。このとき

$$w_\lambda(a_1, \ldots, a_m; b) = v(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; 1)$$

ここに、

$$\alpha_i \equiv \frac{a_i + (1 - 2\lambda)b}{1 - b}, i = 1, \ldots, m.$$

この定理により、Agent が幅を持つ場合は、従来の Agent が点の場合の分析に帰着することがわかる。この定理を直観的に理解するには次のような関係を考えればよい。詳細は Kikuta and Baston (2008) を参照されたい。Agent（区間 J）がある区間 I_i によって捕捉されるか否かは、それぞれの区間の中心どうしの距離によって決まる。下の図 2 は、区間 J の中心が動く範囲を示したものである。一方、図 3 は区間 I_i の中心 C と区間 J の中心 B との距離が高々 $\frac{\beta_i}{2}$ であれば Agent は捕捉されることを示している。つまり、点 B が幅 β_i の区間に入るとき、Agent は捕捉される。いま、ゲームが行われる区間の幅を 1 から c としたときのゲームの値をそれぞれ $w_\lambda(a_1, \ldots, a_m; b; c), v(a_1, \ldots, a_m; 1; c)$ とすると次が成立する。

$$w_\lambda(a_1, \ldots, a_m; b; 1) = v(\beta_1, \ldots, \beta_m; 1; 1 - b) = v(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; 1) \tag{1}$$

ここに

$$\beta_i \equiv a_i + (1 - 2\lambda)b = (1 - b)\alpha_i, i = 1, \ldots, m.$$

である。ゲームが行われる区間を $1 - b$ から 1 に調整することにより式 (1) の 2 番目の等号が得られる。最適戦略の対応関係は複雑であるのでここでは割愛する。

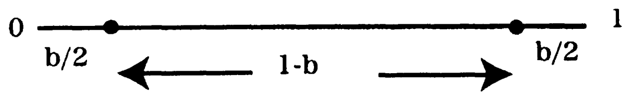

図2: Agent の中心が動く範囲

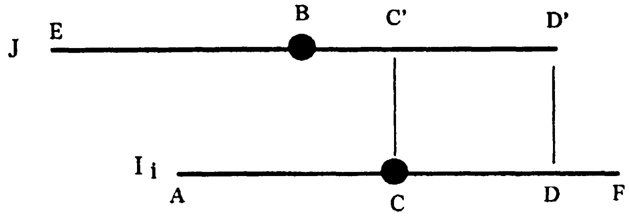

図3: Detector の中心について

図3において、B,C はそれぞれ区間 J, I_i の中心である。したがって、$EB = BD' = \frac{b}{2}$、また $AC = CF = \frac{a_i}{2}$ である。$AD \geq \lambda b$ となるためには、

$$C'D' \geq \lambda b - \frac{a_i}{2}, \quad BC' \leq \frac{a_i}{2} + \frac{b}{2} - \lambda b = \frac{\beta_i}{2}$$

でなければならない。

例1 (続き)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{24}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{4}{15}, \quad \beta_3 = \frac{1}{6}$$

$$w_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}; \frac{1}{5}; 1) = v(\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{6}; 1; \frac{4}{5}) = v(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{24}; 1)$$

となる。

例2 $m = 2, r = 1$ の場合に定理を応用する。$G_\lambda(a_1, a_2; b)$ と $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2; 1)$ が対応する。つまり、$w_\lambda(a_1, a_2; b) = v(\alpha_1, \alpha_2; 1)$。さらに、$\alpha_i = \frac{a_i+(1-2\lambda)b}{1-b}$, $i = 1, 2$. 第2節で述べたように、$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{3}$ のときゲーム $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2; 1)$ は解かれている。これを a_1, a_2, λ, b を使って書き変えると、$a_1 = \frac{1-(3-4\lambda)b}{2}, a_2 = \frac{1-(4-6\lambda)b}{3}$ を得る。仮に、$\lambda = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}$ とすると、$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{5}$ となる。つまり、ゲーム $G_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}; \frac{1}{5})$ とゲーム $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1)$ とが対応する。下図4と5はそれぞれゲーム $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1)$ とゲーム $G_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}; \frac{1}{5})$ における Defender の最適戦略を示したものである。図4において、Defender はそれぞれの配置を確率 $\frac{1}{3}$ で選択すると、Agent が区間 $[0, 1]$ のどの点を通過しようとも、3回のうち2回は捕捉できることがわかる。一方、図5においては、幅 $\frac{1}{5}$ の物体がどこを通過しようとも、その物体の幅の $\frac{1}{3}$、つまり $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$ を3回のうち2回は確認できることがわかる。

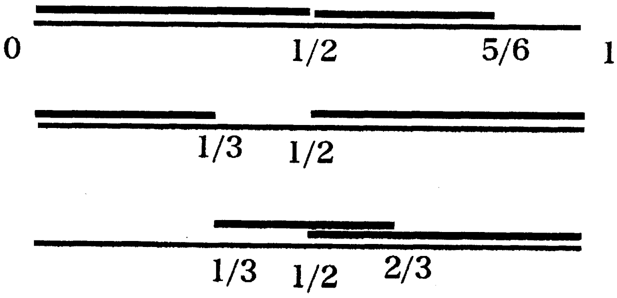

図4: $\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{3};1)$

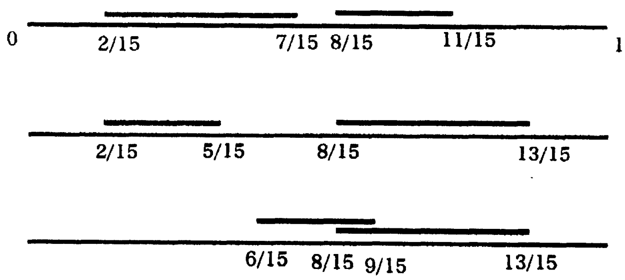

図5: $G_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3},\frac{1}{5};\frac{1}{5})$

4　関連したゲーム

本節では、Ruckle(1983) から２つの例を引用するが、これ以外にも多数の例が掲載されているので参照されたい。さらに、中井 (1986) の 38、40 頁を参照されたい。

4.1 The interval hider game

Ruckle (1983) 76 頁に The interval hider game が紹介されている。Blue と Red がそれぞれ区間 $[0,1]$ の部分区間 B, R を選ぶ。ただし、区間 B の幅は β 以上でなければならない。一方、区間 R の幅は α 以下でなければならない。Red の利得は、$B \cap R \neq \emptyset$ のとき 1 であり、$B \cap R = \emptyset$ のとき 0 である。このゲームは、第 3 節で与えたゲームにおいて、$\lambda = 0, m = 1, b = \beta, a_1 = \alpha$ の場合である。$\alpha + \beta < 1$ を仮定する。$t = \max\{s: 整数, (s+1)\beta + s\alpha < 1\}$ とおくと、ゲームの値は $\frac{1}{t+1}$ となることが Ruckle (1983) で示されている。Blue の一つの最適戦略は、区間 $[p(\alpha+\beta+\varepsilon), \beta + p(\alpha+\beta+\varepsilon)], p = 0, \ldots, n$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{n+1}$ で選ぶことである、ここに $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}\beta - \alpha$ である。一方、Red の一つの最適戦略は、区間 $[(p+1)\beta + n\alpha, (p+1)(\beta+\alpha)] \cap [0,1], p = 0, \ldots, n$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{n+1}$ で選ぶことである。

4.2 2次元の Interval hider game（Ruckle (1983) 96 頁）

Blue と Red がそれぞれ $[0,1] \times [0,1]$ の部分区間 $B = [a,b] \times [c,d]$ および $R = [a',b'] \times [c',d']$ を選ぶ。ただし、区間 B は $b - a \geq \beta_1, d - c \geq \beta_2$ を満たさなければならない。一方、区間 R は $b' - a' \leq \alpha_1, d' - c' \leq \alpha_2$ を満たさなければならない。Red の利得は、$B \cap R \neq \emptyset$ のとき 1 であり、$B \cap R = \emptyset$ のとき 0 である。このゲームの値は、$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{m+1}$ となる。ここに、$n = \max\{s: 整数, (s+1)\beta_1 + s\alpha_1 < 1\}$ であり、$m = \max\{s: 整数, (s+1)\beta_2 + s\alpha_2 < 1\}$ である。

5　おわりに

次のことが今後の検討課題である。

（1）第3節のモデルの離散ヴァージョンを定式化し、第3節の定理に対応するものを考えること。
（2）ゲーム $\Gamma(a_1, a_2; 1)$ で $0 < a_2 \le a_1 < \frac{1}{2}$ の場合を分析すること。いくつかのスペシアルケースが既に解かれている。
（3）第3節では、Infiltrator は1個の区間を選ぶとした。これを、複数個の区間を選ぶとした場合の検討。

参考文献

[1] V.J. Baston and F.A. Bostock 1987. A continuous game of ambush. *Naval Res. Logist.* **34**, 645-654.

[2] V.J. Baston and K. Kikuta 2004. An ambush game with an unknown number of infiltrators. *Oper. Res.* **52**, 597-605.

[3] V.J. Baston and K. Kikuta 2008. An ambush game with a fat infiltrator. (mimeo).

[4] A.Y. Garnaev 1997. On a Ruckle problem in discrete games of ambush. *Naval Res. Logist.***44**, 353-364.

[5] A.Y. Garnaev 2000. *Search Games and Other Applications of Game Theory.* Springer. Berlin.

[6] K.T. Lee 1990. On Ruckle's game of ambush. *Naval Res. Logist.* **37**, 355-363.

[7] T.Nakai 1986. 探索理論展望. *mimeo* .

[8] W.H.Ruckle 1981. Ambushing random walks II. *Oper. Res.* **29**, 108-120.

[9] W.H.Ruckle 1983. *Geometric Games and Their Applications.* Pitman,Boston.MA

[10] N.Zoroa, P.Zoroa and M.J. Fernandez-Saez 1999. A generalization of Ruckle's results for an ambush game. *Eur.J.Oper.Res.* **119**, 353-364.

[11] N.Zoroa, P.Zoroa and M.J. Fernandez-Saez 2001. New results on a Ruckle problem in discrete games of ambush. *Naval Res. Logist.* **48**, 98-106.

[12] L.D. Woodward 2003. Discretization of the continuous ambush game. *Naval Res. Logist.* **50**, 515-529.