数理解析研究所講究録
第 1636 巻 2009 年 185-192

不確実性を伴う競合施設配置問題に対するタブー探索法に基づく近似解法

徳島大学総合科学部　宇野　剛史 (Takeshi Uno)
Faculty of Integrated Arts and Sciences, The University of Tokushima
広島大学大学院工学研究科　片桐　英樹 (Hideki Katagiri)
広島大学大学院工学研究科　加藤　浩介 (Kosuke Kato)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1　はじめに

競合施設配置問題は商業施設など他の施設との競合関係を考慮する必要のある施設に対して，利益や獲得購買力等の最大化を目的として最適な配置を求める問題である．Drezner [3] は施設の潜在的利用者の分布が平面内の有限個の点の集合として表される市場において，利用者から獲得可能な購買力の総和の最大化を目的として，既に競合施設が配置されている状況において新たに平面上に施設を配置するモデルを考察した．Drezner のモデルは現在の競合施設配置問題の研究においても用いられており，施設の質を考慮した Bruno と Improta [2]，Uno ら [10]，Zhang と Rushton [13] などの発展研究が挙げられる．

Drezner のモデルにおいて利用者の保持する購買力は確定的に表されるが，現実においては利用者の人口推移や景気変動などにより確率的に変動すると考えられるため，不確実性によって生じるリスクを考慮して施設配置を行う必要がある．利用者の需要を確率変数として扱った非競合型の施設配置モデルについては既に考察されており，Berman と Krass [1]，Wagnera ら [12] などの研究が挙げられる．

本論文では，Huff [5] の勧誘力関数を導入した Drezner の配置モデルにおいて，購買力が確率変数として表される競合施設配置モデルを提案する．このとき，施設配置問題は確率計画問題として定式化され，この問題に対する配置を求めるために期待値モデルと分散モデルを導入する．これらの問題はいずれも非線形計画問題として表され，最適解を直接求めることは困難である．そこで，最適解の一つが 0-1 計画問題を解くことで求められることを示し，この 0-1 計画問題を効率的に求めるための解法を提案する．

タブー探索法は一般的な 0-1 計画問題に対する有効な解法アルゴリズムの一つとして知られており，その概要は Reeves [8] の書籍に詳しい．Hanafi と Freville [4] は多次元ナップサック問題に対して，戦略的振動に基づくタブー探索法を提案し，その有効性を示した．本論文では，施設配置モデルの特性を用いた戦略的振動に基づくタブー探索法を提案する．さらに，数値実験により提案解法の有効性を検証する．

本論文の構成は次の通りである．第 2 章では，利用者の購買力が確率変数として表される競合施設配置モデルを提案し，施設配置問題を確率計画問題として定式化し，確率計画問題及び分散最小化問題に変換する．この問題を直接解くことが困難なことから，第 3

章では 0-1 計画問題に再定式化する．この問題に対する効率的解法として，第 4 章では施設配置モデルの特性を取り入れた戦略的振動に基づくタブー探索法を提案する．第 5 章では，競合施設配置問題の数値例に対して提案解法を適用し，その有効性について検証する．最後に，本論文の結論及び今後の課題を第 6 章で述べる．

2 問題の定式化

本研究における施設配置モデルでは，施設の潜在的利用者を平面 $\boldsymbol{R}^2$ 内の有限個の点上にのみ存在すると仮定し，そのような点を "需要点" とよぶことにする．平面上の需要点の例としては，地方における都市などが挙げられる．以下では，需要点を同じ位置にいる利用者の集合とみなすことにより，各需要点を一人の利用者として扱う．

需要点の数を n とし，需要点の指標集合を $D = \{1, \cdots, n\}$ とおく．意思決定者が配置する新規施設の数を m とし，$\boldsymbol{R}^2$ 上に存在する新規施設と競合する既存施設（競合施設）の数を k とする．新規施設及び非協力施設の指標集合を各々 $F = \{1, \ldots, m\}$，$F_C = \{m+1, \cdots, m+k\}$ とおく．

需要点 $i \in D$ の位置を $\boldsymbol{u}_i \in \boldsymbol{R}^2$ とする．施設 $j \in F \cup F_C$ の位置を $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{R}^2$ とし，その質的評価値を $q_j > 0$ とする．このとき，需要点 i から見た施設 j の勧誘力を，Huff [5] によって提案された次の勧誘力関数によって与える．

$$a_i(\boldsymbol{x}_j, q_j) \equiv \begin{cases} \dfrac{q_j}{||\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{x}_j||^2}, & \text{if } ||\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{x}_j|| > \varepsilon \\ \dfrac{q_j}{\varepsilon^2}, & \text{if } ||\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{x}_j|| \le \varepsilon \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，$\varepsilon > 0$ は利用者が施設まで移動するのに全く苦にならないと考える距離の上限である．全ての利用者は最大勧誘力をもつ施設のみを利用すると仮定し，最大勧誘力をもつ施設が複数ある場合には，競合施設を優先的に施設を一つだけ利用すると仮定する．

新規施設の位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ で表す．このとき，需要点 i が新規施設 j を利用するか否かを次の 0-1 変数を用いて表す：

$$\varphi_i^j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{需要点 } i \text{ が新規施設 } j \text{ を利用する場合,} \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{2.2}$$

需要点 i の購買力を確率変数 $\bar{w}_i > 0$ で表し，既存施設 j を利用する需要点の集合を $D_j \equiv \{i | \bar{\theta}_i^j = 1\}$ とする．このとき，既存施設 j の獲得購買力は $\sum_{i \in D_j} \bar{w}_i$ と表される．

以上より，利用者の購買力が確率変数として表される競合施設配置問題は，次の確率計画問題として定式化される：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{w}_i \varphi_i^j(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in R^{2m} \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

問題 (2.3) における解を求めるために，次の 2 つのモデルに基づく確定問題に変換する：
(i) 期待値最大化モデル

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & E[f(\boldsymbol{x})] \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in R^{2n}\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

(ii) 分散最小化モデル

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & V[f(\boldsymbol{x})] \\ \text{subject to} & E[f(\boldsymbol{x})] \geq \lambda, \\ & \boldsymbol{x} \in R^{2n}\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

ここで，λ は獲得購買力に対して与えられた満足レベルを表す．

問題 (2.4) 及び (2.5) は非線形計画問題であり，少なくとも 1 つの最適解を求める必要がある．しかし，この問題に対して目的関数の導関数や Kuhn-Tucker 条件等を用いて解析的に最適配置を求めることは困難である．さらに，Uno ら [11] は，例えば Koziel と Michalewicz [6] によって提案された GENOCOP のような非線形計画問題に対する発見的解法を用いても，最適解を求めることが困難であることを示した．このように問題を直接解くことが困難なことから，次章では，(2.4) 及び (2.5) の最適解の一つが 0-1 計画問題を解くことで得られることを示す．

3 0-1 計画問題への変換

前章で定式化した (2.4) 及び (2.5) では，与えられた新規施設の配置に対して，各需要点がどの施設を利用するかが分かれば問題の目的関数値を求めることができる．本章では，次の方針に基づき問題を解くことを提案する．

- 先に各需要点の施設利用状況を与えておき，それを実現する新規施設の配置が存在するかを判定する．
- 実現可能な利用施設状況の中から，問題の目的関数値を最適にする施設利用状況を求める．得られた施設利用状況を実現する施設配置が問題の最適解となる．

需要点 $i \in D$ に対して，競合施設の中での最大勧誘力を次式で表す：

$$a_i^C \equiv \min_{j \in F_C} \{a_i(\boldsymbol{x}_j, q_j)\} \tag{3.1}$$

式 (2.1) より，新規施設 $j \in F$ をどこに配置しても購買力を獲得できない需要点の集合を $D_j^{\triangle} = \{i \in D \mid \sqrt{q_j/a_i^C} \leq \varepsilon\}$ で表す．そのとき，新規施設 j が購買力を獲得できる地点が少なくとも 1 つ存在する需要点を $D_j = D \backslash D_j^{\triangle}$ とする．新規施設 j に対して，意思決定者が優先的に獲得したいと決めた需要点の集合を $\bar{D}_j \subseteq D_j$ とおき，

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & i \in \bar{D}_j \text{ の場合}, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{3.2}$$

とおく．このとき，$\bar{D}_j$ は n 次 0-1 変数ベクトル $\boldsymbol{l}_j = (l_{1j}, \cdots, l_{nj})$ で表される．新規施設 j と意思決定者によって与えられた n 次 0-1 変数ベクトル $\boldsymbol{l}_j$ に対して，補助変数 $r_j \geq 0$ を用いた次の問題について考える：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & r_j^2 \\ \text{subject to} & \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{u}_i\|^2 \leq \dfrac{q_j}{a_i^C} \cdot r_j, \quad \forall i \in \{\bar{i} | l_{\bar{i}j} = 1\}, \\ & \boldsymbol{x}_j \in R^2, \ r_j \geq 0 \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

問題 (3.3) の最適解を $(\boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{l}_j}, r_j^{\boldsymbol{l}_j})$ とおく．このとき，(2.4) 及び (2.5) の最適解を得るのに有用な次の定理が示される：

定理 1 新規施設 $j \in F$ に対して，意思決定者によって与えられた需要点の集合を $\bar{D}_j$ とし，$\bar{D}_j$ に対応する n 次 *0-1* 変数ベクトルを $\boldsymbol{l}_j$ とする．このとき，もし $r_j^{\boldsymbol{l}_j} < 1$ ならば，新規施設 j は $\boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{l}_j}$ に配置することで $\bar{D}$ 内の全ての需要点を獲得することが出来る．

証明：問題 (3.3) の制約条件及び $r_j^{\boldsymbol{l}_j} < 1$ より，次の関係式が $\bar{D}_j$ 内の全ての需要点に対してみたされる：

$$\|\boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{l}_j} - \boldsymbol{u}_i\|^2 < \frac{q_j}{a_i^C} \tag{3.4}$$

そのとき，$a_i^C < q_j / \|\boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{l}_j} - \boldsymbol{u}_i\|^2$ が成り立つ．式 (2.1) から，このことは，もし新規施設 j の位置が $\boldsymbol{x}_l^{\boldsymbol{l}_j}$ ならば，新規施設 j の勧誘力が競合施設よりも大きいことを意味する． ■

問題 (3.3) は凸計画問題であるので，(3.3) は逐次二次計画 (SQP) 法のような凸計画法に対する解法アルゴリズムを用いて解くことが出来る．SQP 法については，Nocedal と Wright [7] の書籍が詳しい．さらに，次の定理が成り立つ：

定理 2 $L = (\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m)^T \in \{0,1\}^{mn}$ とし，$\boldsymbol{x}^L = (\boldsymbol{x}_1^{\boldsymbol{l}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m^{\boldsymbol{l}_m})$ とする．このとき，配置 $\boldsymbol{x}^L$ が *(2.4), (2.5)* の最適解であるような行列 L が存在する．

証明：問題 (2.4) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とする．各 $i \in D, j \in F$ に対して，$\bar{l}_{ij} = \varphi_i^j(\boldsymbol{x}^*)$ が要素となるような 0-1 行列 $\bar{L} \in \{0,1\}^{mn}$ を定義する．このとき，全ての i, j に対して $\varphi_i^j(\boldsymbol{x}^L) = \varphi_i^j(\boldsymbol{x}^*)$ であり，かつ全ての新規施設 j に対して $r_j^{\boldsymbol{l}_j} < 1$ が成り立つことから，定理 1 より $\boldsymbol{x}^L$ もまた (2.4) の最適解である．このことは $\bar{L}$ が本定理の条件をみたす行列の一つであることを意味する．問題 (2.5) に対しても同様に行列の存在を示すことが出来る． ■

$\boldsymbol{r}^L = (r_1^{\boldsymbol{l}_m}, \ldots, r_m^{\boldsymbol{l}_m})$，及び，$\boldsymbol{1} = (1, \ldots, 1)$ とおく．定理 2 より，(2.4), (2.5) の最適解の一つは，各々次の 0-1 計画問題を求めることで得られる：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & E[f(\boldsymbol{x}^L)] \\ \text{subject to} & L \in \{0,1\}^{mn} \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & V[f(\boldsymbol{x}^L)] \\ \text{subject to} & E[f(\boldsymbol{x}^L)] \geq \lambda, \\ & L \in \{0,1\}^{mn}\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

問題 (3.5) 及び (3.6) の厳密解を求めるためには，(3.3) を最大 2^{mn} 回解く必要がある．このことは新規施設及び需要点の数が多い場合において，(3.5) 及び (3.6) を厳密に解くことが困難であることを意味する．次章では，これらの 0-1 計画問題に対する近似解を効率的に求めるための解法を提案する．

4 解法アルゴリズム

問題 (3.5) 及び (3.6) は 0-1 計画問題であり，その近似解法アルゴリズムの一つとして，戦略的振動に基づくタブー探索法 [4] が知られている．本章では，競合施設配置問題の特性を生かした戦略的振動に基づくタブー探索法を提案する．なお，問題 (3.6) は期待値制約を伴うことから (3.5) よりも解くことが困難である．よって，以下では (3.6) に対する解法についてのみ述べているが，(3.5) についても容易に応用可能である．

タブー探索法は近傍探索法の一つであり，その詳細については Reeves [8] の本が参考になる．提案手法では，探索過程における現在解 $L^{\mathrm{now}} \in \{0,1\}^{mn}$ から一つの要素を増減することをムーブと定義する．問題 (3.6) における現在解の近傍は，現在から一つのムーブのみで移動可能な解全体の集合として表す．近傍探索法において，L^{now} から次の探索解への移動は，目的関数値や制約違反度などの与えられた基準において近傍内で最良となる解が選ばれる．しかし，上記の選択ルールだけでは局所最適解の周辺では現在解として選ばれる解が循環することから，探索中において選ばれたムーブは与えられた期間 T_1 だけタブー制約を活性化させる．このとき，活性化されたムーブはタブーとみなされ，与えられた規準において近傍内で最良であっても次の探索解として選ばれることを禁止する．タブーとなるムーブの情報は探索過程においてタブーリストに格納される．

タブー探索法は解を集中的に探すのに優れた手法であるが，(3.6) が大規模な場合には実行可能領域が広くなることから最適解の導出が困難である．以下では，タブー探索法に戦略的振動を導入することで大域的に探索可能な解法アルゴリズムを提案する．

戦略的振動に基づくタブー探索法

手順 0: **[初期化]** ランダムに初期探索点 L^{now} を生成し，暫定最良解やタブーリスト等の初期化を行う．初期探索点が期待値制約をみたすならば，手順 5 へ進む．

手順 1: **[TS_PROJECT]** 期待値制約の改善を目的として，探索点 L^{now} をタブーでないムーブにより次の探索点に移す．この手順は探索点が期待値制約をみたすまで行う．

手順 2: **[TS_ADD]** 目的関数値の改善を目的として，探索点 L^{now} をタブーでないムーブにより次の探索点に移す．この手順は期待値制約をみたしつつ分散を改善するようなムーブが存在しなくなるまで行う．

手順 3: [TS_COMPLEMENT] 目的関数値の改善を目的として，探索点 L^{now} 付近を集中的に探索する．

手順 4: [TS_DROP] 期待値制約の改善を目的として，探索点 L^{now} を目的関数値を考慮せずにタブーでないムーブにより次の探索点に移す．この操作は期待値がある一定以上になるか，規定回数になるまで行われる．

手順 5: [TS_ADD]（手順 2 と同様）

手順 6: [TS_COMPLEMENT]（手順 3 と同様）

手順 7: [TS_INFEASIBLE_ADD] 目的関数値の改善を目的として，探索点 L^{now} を期待値水準の制約を考慮せずにタブーでないムーブにより次の探索点に移す．この操作は目的関数値がある一定の値以下になるか，規定回数になるまで行われる．

手順 8: [**終了判定**] 終了条件を満たせばアルゴリズムを終了する．探索過程において得られた暫定最良解が (3.6) に対する近似最適解である．そうでなければ手順 1 に戻る．

5 数値実験

本章では，前章までに述べた解法アルゴリズムを提案する競合施設配置問題の 3 つの数値例に適用することでその有効性を示す．各数値例において，需要点の数は $n = 30, 40, 50$ とし，n 個の需要点の位置 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は $[0, 100]^2$ 内でランダムに与える．購買力 $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n$ は 0.5, 0.3, 0.2 の確率で起こりうる 3 つのシナリオをもつ確率変数として表し，各シナリオでの購買力は $[5, 12]$ 内でランダムに与えるものとする．既存施設の数を $k = 15$ とし，これらの位置は $[0, 100]^2$ 内で，また質的評価値は $\{1, \ldots, 5\}$ 内でランダムに与える．意思決定者は 1 つの新規施設を平面 $[0, 100]^2$ 上に配置するものとし，その質的評価値は $q_1 = 3$ とする．また，分散最小化問題 (2.5) について，各数値例において $\lambda = 40, 45, 60$ とする．

次に，提案解法のパラメータを決める．タブー探索法のパラメータについては，Reeves [8] の本が詳しい．タブー期間を $T_1 = n/2 - 10$ とし，提案アルゴリズムにおいて反復させる回数を 10 回とする．手順 4 から抜け出す判定基準は，$E[f(\boldsymbol{x}^{L^{\mathrm{now}}})] \leq \lambda + 15$ をみたすか，10 回を超えるまでとする．また，手順 7 から抜け出す判定基準は，目的関数値が 2 倍以上改善されるか，10 回を超えるまでとする．

さらに，提案解法の有効性を示すために，遺伝的アルゴリズムを用いたときの計算結果を比較対象として用いる．なお，使用した遺伝的アルゴリズムについては，坂和と田中 [9] の本が詳しい．世代間ギャップを 0.9，個体群サイズを 150，終端世代数を 2000 とする．また，交叉，突然変異，及び逆位確率を各々0.9, 0.01, 0.03 とする．

提案解法及び遺伝的アルゴリズムを用いて (2.4) 及び (2.5) を解いた結果を表 1-4 に示す．ここで，以下で示される全ての計算結果は DELL Optiplex GX620 (CPU: Pentium(R) 4 2.33GHz, RAM: 512MB) を用いて 20 回実行することで得られたものである．表 1-4 より，提案解法は遺伝的アルゴリズムよりも高速かつ高精度の解が得られていることから，不確実性を伴う競合施設配置問題に対して提案解法が有効であることが示される．

表 1: タブー探索法で (3.5) を解いた計算結果

n	30	40	50
最良値	64.87	67.79	86.77
平均値	64.87	67.79	86.77
最悪値	64.87	67.79	86.77
平均計算時間（秒）	9.83	20.73	48.28

表 2: 遺伝的アルゴリズムで (3.5) を解いた計算結果

n	30	40	50
最良値	64.87	67.79	86.77
平均値	64.87	66.30	84.78
最悪値	64.87	64.54	70.07
平均計算時間（秒）	47.86	52.93	69.14

表 3: タブー探索法で (3.6) を解いた計算結果

n	30	40	50
最良値	1.330	5.131	1.563
平均値	1.330	5.131	1.563
最悪値	1.330	5.131	1.563
平均計算時間（秒）	69.55	102.0	162.8

表 4: 遺伝的アルゴリズムで (3.6) を解いた計算結果

n	30	40	50
最良値	6.915	5.131	1.818
平均値	6.915	5.131	6.915
最悪値	6.915	5.131	8.743
平均計算時間（秒）	546.7	617.8	637.3

6 おわりに

本研究では，不確実な需要を伴う状況下での平面上での新しい競合施設配置モデルを提案した．競合施設配置問題を獲得購買力最大化を目的とする確率計画問題として定式化し，期待値及び分散に基づく確定問題に変換した．これらの問題を直接解くことが困難なことから，問題の最適解の一つが 0-1 計画問題を解くことで導出できることを示し，戦略的振動に基づくタブー探索法を基にした効率的解法を提案した．問題の数値例に対して提案解法を適用し，他の解法と比較・検証することでその有効性を示した．今後の課題としては，より大規模な競合施設配置問題，特に分散最小化問題に対する提案解法の精度の向上及び高速化が挙げられる．

参考文献

[1] O. Berman,, K. Krass, Facility location with stochastic demands and congestion, Z. Drezner and H.W. Hamacher, Editors, Facility Location: Application and Theory, Springer Berlin (2001).

[2] G. Bruno, G. Improta, Using gravity models for the evaluation of new university site locations: A case study, Computers & Operations Research (35) (2)(2008) 436-444.

[3] Z. Drezner, Competitive location strategies for two facilities. Regional Science and Urban Economics 12 (1982) 485-493.

[4] S. Hanafi, A. Freville, An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem, European Journal of Operational Research 106 (1998) 659-675.

[5] D.L. Huff, Defining and estimating a trading area, Journal of Marketing 28 (1964) 34-38.

[6] S. Koziel, Z. Michalewicz, Evolutionary algorithms, homomorphous mappings, and constrained Parameter Optimization, Evolutionary Computation 7 (1)(1999) 19-44.

[7] J. Nocedal, S. Wright, Numerical optimization, Springer-Verlag (1999).

[8] C.R. Reeves ed., Modern heuristic techniques for combinatorial problems, Blackwell Scientific Press, Oxford (1993).

[9] 坂和 正敏, 田中 雅博, 遺伝的アルゴリズム, 朝倉書店 (1995).

[10] T. Uno, H. Ishii, S. Saito, S. Osumi, Competitive facility location problem: an algorithm for the problem concerning the existence of multi-type customers, Central European Journal of Operations Research 12 (1)(2004) 79-85.

[11] T. Uno, H. Katagiri, K. Kato, A location problem with the A-distance in a competitive environment, Proceedings of International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2008 (2)(2008) 1925-1930.

[12] M.R. Wagnera, J. Bhaduryb, S. Penga, Risk management in uncapacitated facility location models with random demands, Computers & Operations Research 36 (4)(2009) 1002-1011.

[13] L. Zhang, G. Rushton, Optimizing the size and locations of facilities in competitive multi-site service systems, Computers & Operations Research (35) (2)(2008) 327-338.