

非定常逆ガウス過程に基づいたソフトウェア信頼性モデリング

広島大学大学院工学研究科 金 林柱, 土肥 正
LinZhu Jin and Tadashi Dohi
Graduate School of Engineering
Hiroshima University, Japan

1 はじめに

ソフトウェア開発工程で計測・収集されたフォールトデータを用いて、ソフトウェアの信頼性を定量的に評価することは重要な管理技術の一つである。ソフトウェア信頼性評価では、取り扱うフォールトデータの種類によって、離散状態モデルと連続状態モデルに分けられる。本研究では主に離散状態空間上で定義されるソフトウェア信頼性モデルについて議論を行う。ソフトウェアの累積フォールト検出数を表す計数過程は離散状態モデルに分類され、マルコフ出生過程や非同次ポアソン過程 (NHPP) が代表例として挙げられる [1]。

一般に、あらゆるテスト工程で収集されるフォールトデータに適合する唯一のモデルを同定することは困難であると言われており、自己励起過程 [2] のように、より広いクラスの確率過程によってソフトウェア信頼性モデルを記述することが有用である。反面、実際のテスト工程でモデルを活用するためには、汎用性・適合性・簡便性の観点からソフトウェア信頼性モデルを選択する必要がある。離散状態モデルの代表例である NHPP は、期待値と分散が常に等しいという equivalent dispersion (ED) の性質を有するため、ソフトウェアのフォールト検出事象を記述するのに常に適しているとは限らない。

このような問題に対して、最近、NHPP に基づいたソフトウェア信頼性モデルを包含するより広いクラスのモデルとして、非定常ガンマ過程 (NHGP) モデルが提案された [3]。NHGP は NHPP とガンマ再生過程を特殊な場合として含んでおり、ソフトウェアのフォールト検出過程特有の時間非定常性を有する点過程である。事実、文献 [3] において、信頼度成長現象を表す各種傾向曲線 (NHPP では平均値関数) に対して、NHGP は NHPP よりも適合性に関して優れていることが示されている。これにより、NHPP のクラスを超えた確率過程に基づいて、ソフトウェアのフォールト検出過程を記述する有効性が確認されている。

本研究では、NHGP と異なる非定常点過程として、逆ガウス分布に基づいた非定常逆ガウス過程 (NHIGP) に着目し、ソフトウェアフォールト検出事象の記述を行う。NHIGP モデルは、これまでに数理生物学の分野で応用された例 [4] があるが、ソフトウェアに代表される工業製品の信頼性評価の分野で用いられたことはない。ここでは文献 [3] と同様に、NHIGP に基づいたソフトウェア信頼性モデルを紹介し、その実データへの適合性評価、ソフトウェア信頼度評価、並びに予測評価を行うことを目的とする。

2 従来モデル

2.1 NHPP モデル

代表的なソフトウェア信頼性モデルとして NHPP モデルについて述べる。テスト工程の最終段階であるシステムテストにおいて、時間区間 $(0, t]$ で検出される累積フォールト数を $\{X(t), t \geq 0\}$ によって表現する。もし、確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ が以下の性質を満足するとき、強度関数 $\lambda(t)$ をもつ NHPP と呼ばれる。

$$(A-1) X(0) = 0,$$

$$(A-2) \{X(t), t \geq 0\} \text{ は独立増分をもつ,}$$

$$(A-3) P_r\{X(t+h) - X(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h),$$

$$(A-4) P_r\{X(t+h) - X(t) \geq 2\} = o(h).$$

ここで、 $o(h)$ は微小時間 h の高次項である。仮定 (A-1) ~ (A-4) から、ソフトウェアの累積検出フォールト数の確率関数は

$$P_r\{X(t) = x | X(0) = 0\} = \frac{\Lambda(t)^x e^{-\Lambda(t)}}{x!} \quad (1)$$

となる。ここで、 $\Lambda(t) = E[X(t)] = \int_0^t \lambda(x) dx$ は時刻 t までに発見される総期待累積フォールト数であり、NHPP の平均値関数と呼ばれる。また、関数 $\lambda(t)$ は時刻 t における瞬間フォールト発見率を表し、ソフトウェア強度とも呼ばれる。簡単な計算から $\text{Var}[X(t)] = \Lambda(t)$ が示せるので、このような性質を ED と呼ぶ。

表 1: 代表的な NHPP モデル.

Model	$\Lambda(t)$	$\lambda(t)$
EX	$a(1 - e^{-bt})$, ($a > 0, b > 0$)	abe^{-bt}
DS	$a[1 - (1 + bt)e^{-bt}]$, ($a > 0, b > 0$)	ab^2te^{-bt}
IS	$\frac{a(1 - e^{-bt})}{(1 + ce^{-bt})}$, ($a > 0, b > 0, c > 0$)	$\frac{ab(1 + c)e^{-bt}}{(1 + ce^{-bt})^2}$
LL	$\frac{a(1 - t^{-b})}{(1 + ct^{-b})}$, ($a > 0, b > 0$)	$\frac{ab(1 + c)t^{-1-b}}{(1 + ct^{-b})^2}$
RA	$a(1 - e^{-bt^c})$, ($a > 0, b > 0$)	$2abe^{-bt^c}t$
WE	$a(1 - e^{-bt^c})$, ($a > 0, b > 0, c > 0$)	$abce^{-bt^c}t^{c-1}$
PL	λt^β , ($\lambda > 0, 0 < \beta < 1$)	$\lambda\beta t^{\beta-1}$
LP	$\frac{1}{\theta} \ln[\lambda_0\theta t + 1]$, ($\theta > 0, \lambda_0 > 0$)	$\frac{\lambda_0}{\lambda_0\theta t + 1}$

いま, $i (= 1, 2, \dots, n)$ 番目のソフトウェアフォールト検出時刻 t_i に関する n 組の時間 (テスト実行時間) データが観測されているとする. このとき, n 組のデータ (t_i, i) が観測されたという条件下で, NHPP に基づいたソフトウェア信頼性モデルの尤度関数は

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^n \lambda(\theta; t_k) \exp \left[- \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(\theta; x) dx \right] = \exp[-\Lambda(\theta; t_n)] \prod_{i=1}^n \lambda(\theta; t_i) \quad (2)$$

によって与えられる. ここで, θ はソフトウェア強度に含まれるモデルパラメータ (ベクトル) であり, $\lambda(t) = \lambda(\theta; t)$ 並びに $\Lambda(t) = \Lambda(\theta; t)$ のように表記する. さらに式 (2) から, 対数尤度関数は

$$\ln L(\theta) = \sum_{k=1}^n \ln \lambda(\theta; t_k) - \Lambda(\theta; t_n) \quad (3)$$

となる. これより, 最尤推定に基づいて対数尤度関数を最大にするパラメータ θ を求め, 最もフォールトデータに適合したモデルを選択する.

具体的には, 表 1 に挙げるようなパラメトリックな関数を定め, 最もデータに適合したモデルを選択するという方法がとられる. 表 1 において, EX は指数形モデル [5], DS は遅延 S 字 (2 次アーラン分布) モデル [6], IS は習熟 S 字 (切断ロジスティック分布) モデル [7], LL は対数ロジスティック分布モデル [8], RA はレイリー分布モデル, WE は一般化指数形 (ワイブル分布) モデル [9], PL はべき法則モデル [10], LP は対数ポアソン実行時間モデル [11] と呼ばれるパラメトリックなクラスである.

2.2 NHGP モデル

ここでは文献 [12] で提案され, 文献 [3] で詳細に議論された NHGP モデルについて述べる. 今, ソフトウェアフォールトが検出されるシナリオとして, ある平均値関数 $\Lambda(t)$ をもつ NHPP が存在し, この NHPP の事象が κ 回発生した段階で 1 つのフォールトが検出されるような点過程を定義する. これは NHPP における状態空間上での量み込みとは異なり, 時間空間上での量み込みを意味する. Berman [12] は NHGP の確率密度関数として

$$f_i(t_k | t_{k-1}) = \frac{\kappa \lambda(t_k)}{\Gamma(\kappa)} \left[\kappa \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(u) du \right]^{\kappa-1} \exp \left\{ -\kappa \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(u) du \right\} \quad (4)$$

を定義し, この点過程に対する諸性質について調べている. NHPP の場合と同様に, n 組の時間データ (t_i, i) が観測されているものとすれば, NHGP の尤度関数は

$$L(\theta) = \left[\prod_{i=1}^n \lambda(\theta; t_i) \{ \Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1}) \}^{\kappa-1} \right] \times \exp \{ -\Lambda(\theta; t_n) \} / \{ \Gamma(\kappa) \}^n \quad (5)$$

となる. ここで, $\Gamma(\cdot)$ は標準ガンマ関数であり, $t_0 = 0$ である. 上記の尤度関数の形状からわかるように, $\kappa = 1$ のとき NHGP は NHPP に帰着され, NHPP は NHGP の特殊な場合とみなすことができる. また, $\lambda(t) = \rho$ (定数) ならばガンマ再生過程と等価になる. $\Lambda(t)$ は元の NHPP の平均値関数であるが, NHGP の平均値ではないことに注意する [3, 13]. 一般の点過程に対して, 関数 $\Lambda(t)$ は傾向曲線と呼ばれ, 点過程の非正常性を特徴付けるパラメータとして機能する.

表 2: DS#1 における LLF, AIC, BIC に基づいた適合性評価

Model	DS#1								
	LLF			AIC			BIC		
	NHIG	NHPP	NHGP	NHIG	NHPP	NHGP	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-370.661	-373.150	-373.150	747.322	750.300	750.300	752.389	753.678	753.678
DS	-372.150	-372.592	-372.592	750.314	749.184	749.184	755.381	752.562	752.562
IS	-369.540	-372.857	-372.857	747.090	751.714	751.714	753.846	756.781	756.781
LL	-366.777	-370.911	-370.911	741.554	747.822	747.822	748.310	752.889	752.889
RA	-372.520	-380.982	-380.982	751.040	765.964	765.964	756.107	769.342	769.342
WE	-368.767	-372.214	-372.214	745.534	750.428	750.428	752.291	755.495	755.495
PL	-374.168	-380.141	-380.141	754.336	764.282	764.282	759.403	767.660	767.660
LP	-372.196	-375.387	-375.387	750.392	754.774	754.774	755.459	758.152	758.152

3 NHIGP に基づいた提案モデル

ここでは NHIGP に基づいたソフトウェア信頼性モデルについて述べる。逆ガウス分布もしくは Wald 分布と呼ばれる確率分布を考える。逆ガウス分布は、物理学においてブラウン運動の初到達時間分布として発見されたもので、正規分布と逆分布の関係にある非負の値をもつ実数値確率分布である。Chhikara and Folks [14] にしたがって、逆ガウス確率密度関数は次のように定義される。

$$f_z(z) = \left(\frac{1}{2\pi z^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(z-\psi)^2}{\psi^2 z}\right\}. \quad (6)$$

ここで、 z は定数であり、これを特に位置パラメータ ψ を持つ定常逆ガウス確率密度関数と呼ぶ。もし、 z を形状パラメータとみなし、

$$z = \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

のような時間 t の関数によって記述すれば、次のような非定常逆ガウス確率密度関数が得られる。

$$f_i(t_k|t_{k-1}) = \frac{\lambda(t_k)}{\left[2\pi \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(u) du\right]^{3/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(u) du - \psi\right)^2}{\psi^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(d) du}\right\}. \quad (7)$$

よって、NHIGP の尤度関数は

$$L(\theta) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n -\frac{[\Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1}) - \psi]^2}{2\psi^2(\Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1}))}\right\} \times \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(\theta; t_i)}{\sqrt{2\pi[\Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1})]^3}} \quad (8)$$

となり、式 (8) の両辺の対数を取ることで、対数尤度関数は

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \left\{-\frac{[\Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1}) - \psi]^2}{2\psi^2(\Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1}))}\right\} + \sum_{i=1}^n \log \frac{\lambda(\theta; t_i)}{\sqrt{2\pi[\Lambda(\theta; t_i) - \Lambda(\theta; t_{i-1})]^3}} \quad (9)$$

となる [4]。この対数尤度関数を最大にするようなモデルパラメータ θ を決定することで、NHIGP の最尤推定値を得ることができる。

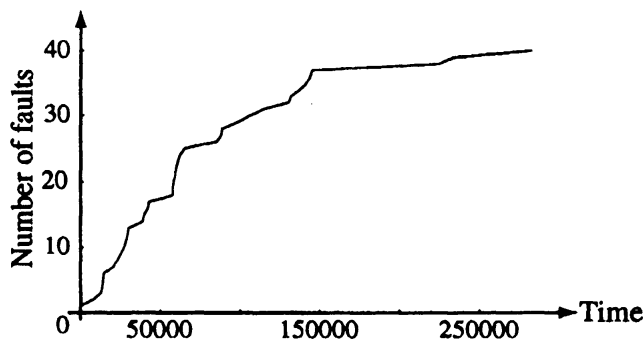
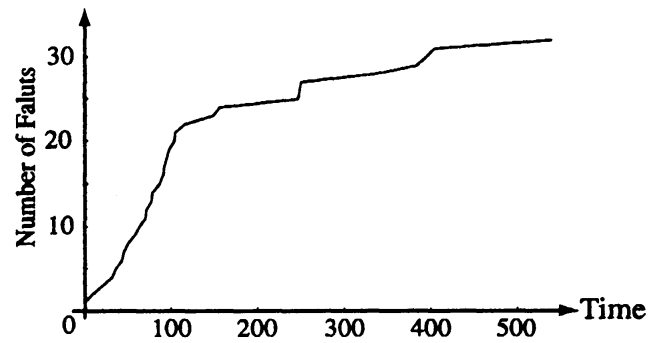
4 実データ解析

4.1 適合性評価基準

従来モデルと本研究で新しく提案した NHIGP を用いて、実データに基づいたソフトウェア信頼性評価を行う。本研究では Musa ら [1] (DS#1, $n = 39$) と Goel and Okumoto [5] (DS#2, $n = 31$) によって報告され、実際の開発プロジェクトで観測されたフォールト検出時間データを用いる (図 1 と図 2 を参照)。NHPP,

表 3: DS#2 における LLF, AIC, BIC に基づいた適合性評価

Model	LLF			AIC			BIC		
	NHIG	NHPP	NHGP	NHIG	NHPP	NHGP	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-108.551	-109.223	-109.223	223.102	222.446	222.446	227.499	225.377	225.377
DS	-106.134	-110.235	-110.235	218.268	224.470	224.470	222.665	227.401	227.401
IS	-107.447	-109.223	-109.223	222.894	224.446	224.446	228.757	228.843	228.843
LL	-105.995	-107.090	-107.090	219.990	220.180	220.180	225.853	224.577	224.577
RA	-108.406	-119.563	-119.563	222.812	243.126	243.126	227.209	246.057	246.057
WE	-106.399	-109.008	-109.008	220.798	224.016	224.016	226.661	228.413	228.413
PL	-109.853	-114.411	-114.411	225.706	232.822	232.822	230.103	235.753	235.753
LP	-108.972	-110.446	-110.446	223.944	224.892	224.892	228.341	227.823	227.823

図 1: DS#1 ($n = 39$).図 2: DS#2 ($n = 31$).

NHGP, NHIGP の 3 つのモデルに対する適合性比較を行うための適合性評価尺度として、最大尤度 (LLF)、赤池情報量基準 (AIC)、ベイズ情報量基準 (BIC) を用いる。AIC と BIC は

$$\text{AIC} = -2 \times \text{LLF} + 2\pi,$$

$$\text{BIC} = -2 \times \text{LLF} + \pi \ln(\phi),$$

によって与えられる。LLF は最大対数尤度、 π は自由パラメータ数、 ϕ は標本の大きさをそれぞれ表している。

表 1 と表 2 は、それぞれ DS#1 と DS#2 における LLF, AIC と BIC に基づいた適合性評価結果である。これらの表から分かるように、NHPP と NHGP モデルの適合性評価の値が全く同じものになっている。これは、ここで仮定した 2 つのデータセットにおいて、NHGP モデルの場合は $\kappa = 1$ 、つまり NHGP の中で NHPP モデルが高い適合性を示していることを意味する。表 1 のすべての場合において、LLF に関して提案した NHIGP モデルが一番高い適合性を示している。モデルの次元 (自由度) を考慮したモデル選択基準である AIC と BIC に関しても、遅延 S 字モデル (DS) 以外では NHIGP が最良モデルになることがわかる。遅延 S 字モデルでは NHIGP における LLF の値は高いが、NHPP や NHGP と比較して自由パラメータ数が 1 つ多いため、情報量基準による評価では過小評価されているものと考えられる。同じく DS#2 でも、表 2 において同じような結果が得られた。

4.2 ソフトウェア信頼度

ここでは、ソフトウェア信頼性評価について考察する。ソフトウェア信頼度の導出は、傾向曲線 $\Lambda(t)$ が有界でない場合と有界である場合とで 2 種類の方法に分類される。まず、傾向曲線 $\Lambda(t)$ が有界でない場合、NHGP と NHIGP は NHPP と同様な方法を用いてソフトウェア信頼度を評価することが可能である。ソフトウェア信頼度は時刻 t_n でテストが終了したという条件の下で、将来の $[t_n, t_n + x]$ で障害が発生しない確率であり、

$$R_1(x | t_n) = 1 - \int_0^x f_n(t_n + u | t_n) du \quad (10)$$

となる。一方、傾向曲線 $\Lambda(t)$ が有界である ($\Lambda(t) < \infty$) 場合、 $R_1(\infty|t_n) > 0$ となり、有限のテスト期間でフォールトフリーである確率が存在する。これは、確率分布関数 $1 - R_1(x|t_n)$ が defective であり、無限遠点において mass part をもつ、すなわちテストを無限時間行っても検出されないフォールトが必ず含まれることを意味している。もしこの値が相対的に大きい場合、有限のテスト期間中にソフトウェア信頼度を過大評価することは明らかである。よって、以下では標準化されたソフトウェア信頼度の定義を

$$R_2(x|t_n) = 1 - \frac{\int_0^x f(t_n + u | t_n) du}{\int_0^{\infty} f(t_n + u | t_n) du} \quad (11)$$

によって与える。

先に述べた AIC と BIC の適合性評価からも分かるように、本研究で用いたデータセットにおいて、NHGP の特殊な場合である $\kappa = 1$ 、すなわち NHPP が最良モデルとなるため、信頼度評価においても NHGP と NHPP は同じ値を示すことは自明である。図 3 ~ 18 は、DS#1 と DS#2 におけるソフトウェア信頼度の振舞いを表している。グラフから分かるように、本研究で提案した 2 種類のソフトウェア信頼度評価の方法において、標準化されたソフトウェア信頼度の方が、他方に比べてより悲観的な見積もりを行う傾向が見られた。また、NHIGP と NHPP の比較から、NHIGP モデルの方がより悲観的な信頼度見積もりを行う傾向にあり、安全側に立脚した信頼性評価が行えていることが読み取れる。

4.3 予測評価

最後に NHIGP の予測評価について検証を行う。予測評価基準として予測対数尤度 (PLL) を用いる。これは、各観測時点において求められた最尤推定パラメータを用いて、事後的に観測されるデータによって対数尤度を求めたものである。PLL の値が大きければ大きいほど、予測精度が高いといえる。本研究では、DS#1 と DS#2 の各々のデータに対して、全体のデータ数の 70%、80%、90% 観測時点で予測を行い、PLL を評価した。表 4 と表 5 は、各データセットにおける PLL の値を表している。これらの表から分かるように、ほとんどの場合において提案した NHIGP モデルの予測精度が高いことが分かった。

5 まとめと今後の課題

本研究では、ソフトウェア信頼性工学分野ではこれまでに適用されたことのない新しい点過程である非定常逆ガウス過程モデルを提案し、実際のテスト工程で観測されたフォールトデータに基づいて適合性評価、信頼度評価、予測評価を行った。結果として、非定常逆ガウス過程モデルは、様々な傾向曲線のパターンを仮定したとしても、従来モデルと比較してかなり有効であることが示された。今後の課題としては、より多くの異なるデータセットを用いて更なる検証を行い、非定常逆ガウス過程モデルの有用性を示す追認実験を行う予定である。

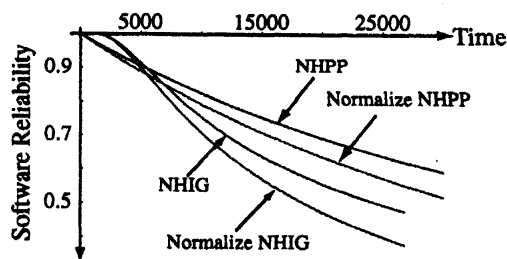


図 3: EX 信頼度 (DS#1)

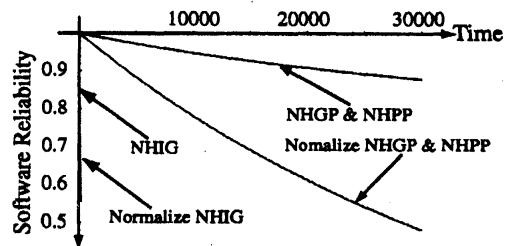


図 4: SS 信頼度 (DS#1)

参考文献

- [1] J.D. Musa, A. Iannino and K. Okumoto, *Software Reliability, Measurement, Prediction, Application*, McGraw-Hill, New York (1987).
- [2] Y. Chen and N. D. Singpurwalla, Unification of software reliability models by self-exciting point processes, *Adv. Appl. Probab.*, **29**, 337-352 (1997).

表 4: DS#1 における予測対数尤度.

DS#1, (n=39)			
PLL(70%)			
Model	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-136.735	-169.519	-169.519
DS	-130.975	-152.398	-152.398
IS	-172.681	-165.466	-165.466
LL	-134.390	-170.936	-170.936
RA	-588.783	-208.751	-208.751
WE	-133.611	-132.355	-132.355
PL	-150.003	-191.467	-191.467
LP	-137.207	-172.446	-172.446
PLL(80%)			
Model	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-85.368	-116.595	-116.595
DS	-85.298	-122.012	-122.012
IS	-83.670	-123.718	-123.718
LL	-86.248	-117.295	-117.295
RA	-97.494	-150.002	-150.002
WE	-85.950	-128.858	-128.858
PL	-90.792	-128.869	-128.869
LP	-88.915	-124.080	-124.080
PLL(90%)			
Model	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-46.904	-86.399	-86.399
DS	-46.768	-82.989	-82.989
IS	-52.009	-85.670	-85.670
LL	-46.101	-88.139	-88.139
RA	-55.991	-92.946	-92.946
WE	-54.947	-82.896	-82.896
PL	-51.342	-98.117	-98.117
LP	-51.262	-89.376	-89.376

表 5: DS#2 における予測対数尤度.

DS#2, (n=31)			
PLL(70%)			
Model	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-75.001	-114.846	-187.220
DS	-67.617	-84.267	-115.518
IS	-93.941	-104.680	-157.217
LL	-88.865	-212.480	-169.961
RA	-141.766	-115.537	-191.493
WE	-99.336	-85.819	-123.351
PL	-184.703	-221.074	-345.523
LP	-79.655	-114.903	-187.660
PLL(80%)			
Model	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-47.083	-59.089	-59.089
DS	-105.565	-72.122	-116.213
IS	-35.568	-92.236	-158.763
LL	-64.022	-64.099	-98.141
RA	-312.829	-125.620	-224.429
WE	-36.854	-98.760	-179.095
PL	-38.648	-62.778	-62.778
LP	-36.255	-57.718	-57.718
PLL(90%)			
Model	NHIG	NHPP	NHGP
EX	-22.144	-47.753	-47.753
DS	-20.267	-53.522	-53.522
IS	-20.329	-53.182	-53.182
LL	-20.482	-49.213	-49.213
RA	-21.885	-69.845	-69.845
WE	-20.450	-53.430	-53.430
PL	-24.393	-49.311	-49.311
LP	-22.831	-47.150	-47.150

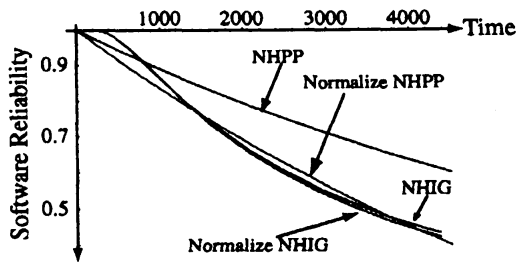


図 5: IS 信頼度 (DS#1)

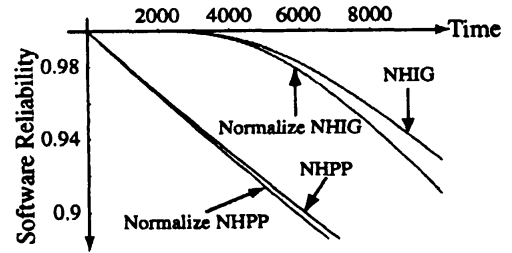


図 6: LL 信頼度 (DS#1)

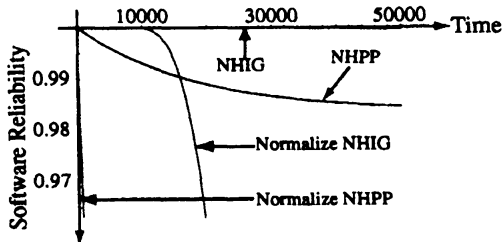


図 7: RA 信頼度 (DS#1)

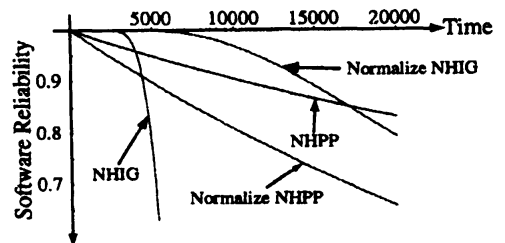


図 8: WE 信頼度 (DS#1)

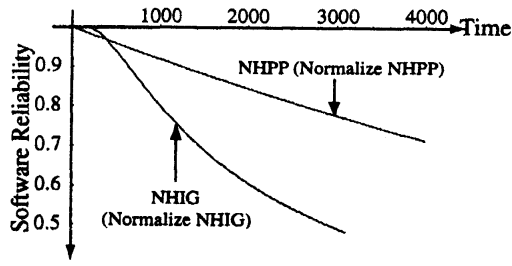


图 9: PL 信頼度 (DS#1)

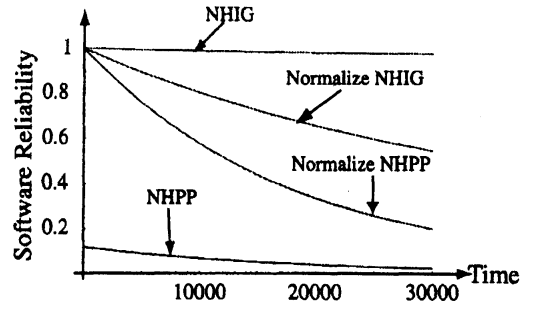


图 10: LP 信頼度 (DS#1)

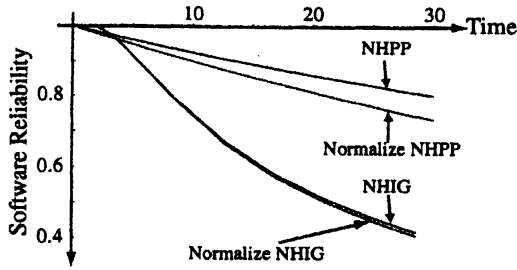


图 11: EX 信頼度 (DS#2)

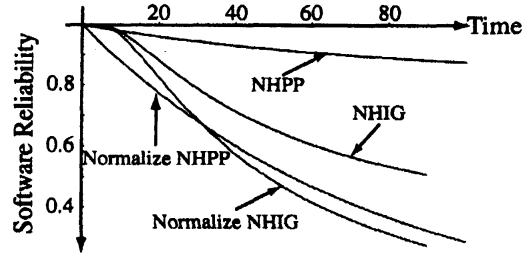


图 12: SS 信頼度 (DS#2)

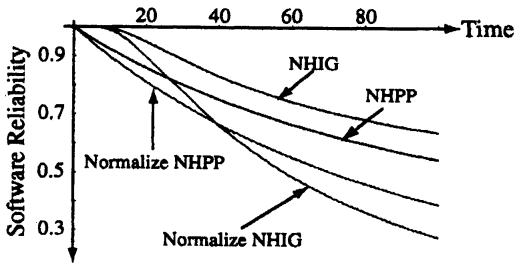


图 13: IS 信頼度 (DS#2)

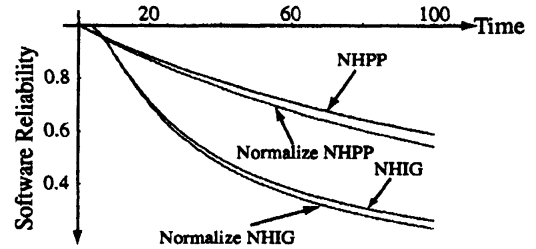


图 14: LL 信頼度 (DS#2)

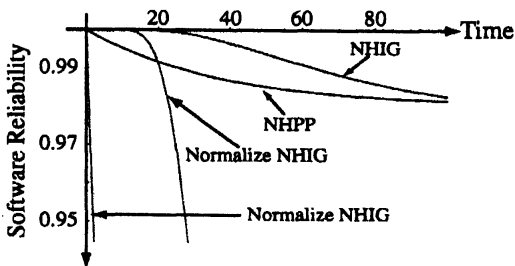


图 15: RA 信頼度 (DS#2)

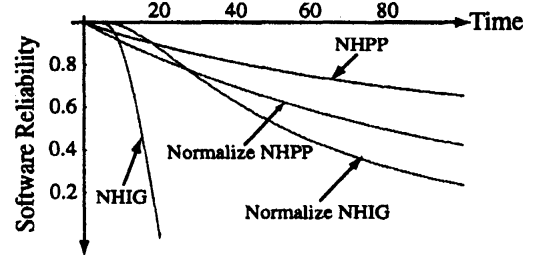


图 16: WE 信頼度 (DS#2)

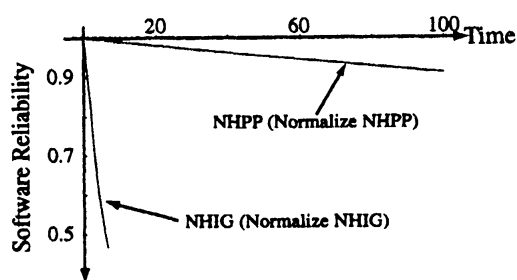


図 17: PL 信頼度 (DS#2)

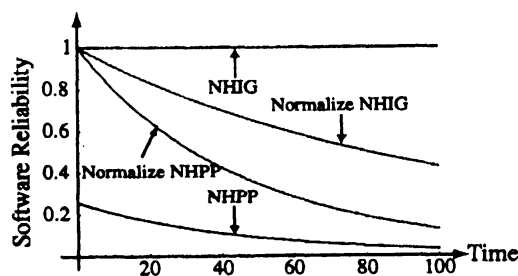


図 18: LP 信頼度 (DS#2)

- [3] T. Ishii and T. Dohi, A new paradigm for software reliability modeling – from NHPP to NHGP –, *Proc. 14th Pacific Rim Int'l Sympo. on Dependable Computing*, 24–231, IEEE CS Press (2008).
- [4] R. Barbieri, M. C. Quirk, L. M. Frank, M. A. Wilson and E. N. Brown, Construction and analysis of non-Poisson stimulus-response models of neural spiking activity, *J. of Neuroscience Methods*, **105**, 25–27 (2001).
- [5] A. L. Goel and K. Okumoto, Time-dependent error-detection rate model for software reliability and other performance measures, *IEEE Trans. on Reliability*, **R-28**, 206–211 (1979).
- [6] S. Yamada, M. Ohba, and S. Osaki, S-shaped reliability growth modeling for software error detection, *IEEE Trans on Reliability*, **R-32**, 475–478 (1983).
- [7] M. Ohba, Software reliability analysis, *IBM J. of Research & Development*, **28**, 428–443 (1984).
- [8] S. S. Gokhale and K. S. Trivedi, Log-logistic software reliability growth model, *Proc. of 3rd IEEE Int'l High-Assurance Systems Engineering Sympo.*, 34–41, IEEE CS Press (1998).
- [9] A. L. Goel, Software reliability models: assumptions, limitations, and applicability, *IEEE Trans. on Software Engineering*, **SE-11**, 1411–1423 (1985).
- [10] E. Cretois and O. Gaudoin, New results on goodness-of-fit tests for the power-law process and application to software reliability, *Int'l J. of Reliab., Qual. Safe. Eng.*, **5**, 249–267 (1998).
- [11] J. D. Musa and K. Okumoto, A logarithmic Poisson execution time model for software reliability measurement, *Proc. 7th Int'l Conf. on Software Engineering*, 230–238, IEEE CS Press (1984).
- [12] M. Berman, Inhomogeneous and modulated gamma processes, *Biometrika*, **68**, 143–152 (1981).
- [13] N. Bandyopadhyay and A. Sen, Non-standard asymptotics in an inhomogeneous gamma process, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **57** (4), 703–732 (2005).
- [14] R.S. Chhikara and J.L. Folks, *The Inverse Gaussian Distribution, Theory, Methodology, and Applications*, Marcel Dekker, New York, (1989).