数理解析研究所講究録
第1636巻 2009年 283-290

セルオートマトンの応用について

ールール168番と40番のリアプノフ指数についてー

大鋳 史男
名古屋工業大学
〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町
E-mail: ohi.fumio@nitech.ac.jp

Abstract

セルオートマトンは，多様な現象の解析に用いられるが，セルオートマトン自体の性質がよく理解された上でのことではない．このため，当該の現象に対して，どのようなセルオートマトンを利用するか，つまりローカルルールの選定は大きな問題である．本稿では，このような応用上の問題を念頭に，セルオートマトン自体の性質を明確にすることをめざし，従来からある Lapunov exponent によってセルオートマトンが生成する時空間パターンの多様性がどの程度捉えられるかを調べる．

ルール番号 40，168 の基本セルオートマトンは Wolfram class I に属し，生成される時空間パターンは死滅するとされていたが [17]，ある特定の configurations 全体の上では左シフトであり従ってカオス性を持ち [12][13][14]，また多様な Lyapunov exponent の値を持つことが示されている [12][13][14]．

Lapunov exponent の定義については，spreading rate を基盤的な発想とするもの [6][15] 以外に，Bagnolli's Lyapunov exxponent[1] がある，

本稿では，上記の基本セルオートマトンについて，Bagnoli's Lyapunov exponent の値を具体的に求め，この Lapunov exponent もまた，必ずしもセルオートマトンが生成する時空間パターンの複雑性を捉えきれないことを示唆する．

1. Introductory Preliminaries

基本セルオートマトン（elementary cellular automaton (ECA)）は，$\{0,1\}$ と $g:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$ との組 $(\{0,1\},g)$ であり，簡単に ECA g と呼ぶ．g は local transition function の呼ばれる．それぞれの ECA g は，次のようにして定義されるルール番号 $R(g)$ を持つ．

$$R(g)=\sum_{(a,b,c)} g(a,b,c)2^{a*4+b*2+c}.$$

local transition function $g:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$ によって，$\mathcal{A}\equiv\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ から $\mathcal{A}$ への写像 $\boldsymbol{g}$ を

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{A},\quad (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))_i=g(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$$

として定義する．この $\boldsymbol{g}$ を global transition function と呼ぶ．

$\mathcal{A}$ 上の距離 d を次のように定義する．

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^{|i|}}.\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{A},$$

これによって位相的な力学系 $(\mathcal{A},\boldsymbol{g})$ が得られる．

$\mathcal{A}$ の要素は configuration と呼ばれ，初期 configuration $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$ の軌道は，以下に定義される系列 $\{\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})\}_{t=1}^{\infty}$ である．

$$\boldsymbol{g}^0(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{g}^{t+1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})),\ t=0,1,2,\cdots.$$

$n_j:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\ (j\in\mathbf{Z})$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{A},\quad (n_j(\boldsymbol{x}))_i=\begin{cases} x_i, & i\neq j,\\ \overline{x_i}, & i=j.\end{cases}$$

n_j は，configuration $x \in \mathcal{A}$ の j 番目の状態を逆転させる．
セルオートマトンにおける Lyapunov exponent は，

$$x,\ g(x),\ g^2(x),\ g^3(x),\ \cdots,$$
$$n_j(x),\ g(n_j(x)),\ g^2(n_j(x)),\ g^3(n_j(x)),\ \cdots,$$

の二つの軌道間の違いの時間発展を特徴づけるものとして定義され，Shereshevsky's Lyapunov exponent, spreading rate, strict spreading rate, Bagnoli's Lyapunov exponent の四つがある．前者三つはそれぞれ以下のように定義されている．
$x, y \in \mathcal{A}$ に対して，

$$DFR(x,y) = \sup\{i | x_i \neq y_i\}, \quad DFL(x,y) = \inf\{i | x_i \neq y_i\}$$

とおく．また，$s \in \mathbf{Z}$ に対して

$$W_s^+(x) \equiv \{y \in \mathcal{A} \mid \forall i \geq s,\ y_i = x_i\}, \quad W_s^-(x) \equiv \{y \in \mathcal{A} \mid \forall i \leq s,\ y_i = x_i\}$$

とする．
それぞれの指数は，更に右側と左側の区別をし，次のように定義される．
Shereshevsky's Lyapunov exponent at a configuration x ;

$$\lambda^+(x) \equiv \lim_{t\to\infty} \max_{j\in\mathbf{Z}} \max_{y \in W_{j+1}^+(x)} \frac{DFR(g^t(x), g^t(y)) - j}{t},$$
$$\lambda^-(x) \equiv \lim_{t\to\infty} \min_{j\in\mathbf{Z}} \min_{y \in W_{j-1}^-(x)} \frac{DFL(g^t(x), g^t(y)) - j}{t}.$$

Spreading rate at a configuration x ;

$$\gamma^+(x) \equiv \lim_{t\to\infty} \max_{j\in\mathbf{Z}} \frac{DFR(g^t(x), g^t(n_j(x)) - j}{t},$$
$$\gamma^-(x) \equiv \lim_{t\to\infty} \min_{j\in\mathbf{Z}} \frac{DFL(g^t(x), g^t(n_j(x)) - j}{t}.$$

Strict Spreading rate at a configuration x ;

$$s\gamma^+(x) \equiv \max_{j\in\mathbf{Z}} \lim_{t\to\infty} \frac{DFR(g^t(x), g^t(n_j(x)) - j}{t},$$
$$s\gamma^-(x) \equiv \min_{j\in\mathbf{Z}} \lim_{t\to\infty} \frac{DFL(g^t(x), g^t(n_j(x)) - j}{t}.$$

Spreading rate と Strict Spreading rate とでは，max と limit を取る順番が異なる．limit を先に取り，次に max を取る順は，Bagnoli's Lyapunov exponent と同様である．
本稿では，ルール番号 40 番と 168 番の基本セルオートマトンについて，Bagnoli's Lyapunov exponent(BLE) の値を厳密に求める．
ルール 40 と 168 はウルフラムクラス I に属し，Bagnoli, et al. は，計算機シミュレーションにより，ランダム与えられた initial configuration の BLE の値は $-\infty$ であり，このことから，これらのルールの BLE は $-\infty$ であるとしている．
この主張は，ある configuration のクラスに対しては正しいが，BLE の値が 0 や $\log 2$ である configuration の存在が，詳細な検討によって明らかになる．このような initial configuration は，coin tossing によっては実現されず，本稿での結論は，計算機シミュレーションでは得られない．

また，ルール 40 がルール 168 の a dyanamical sub-system であり，セルオートマトン間に何らかの内的な力学的関係が存在し得ることが示唆される．

ルール番号 40 と 168 の local transition function g_{40}, g_{168} は次の表によって与えられる．

(a,b,c)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$g_{40}(a,b,c)$	0	0	1	0	1	0	0	0
$g_{168}(a,b,c)$	1	0	1	0	1	0	0	0

違いは，

$$g_{40}(1,1,1)=0, \quad g_{168}(1,1,1)=1$$

のみであるが，結果に目立った差が生じることになる．

特定の型を持った configuration のクラスを次のように定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{0(1),1(\le k)} &= \{(0, \mathbf{1}_{m_i})_{i=-\infty}^{\infty} \mid m_i = 1 \text{ or } 2 \text{ or} \cdots \text{or } k, \quad i \in \boldsymbol{Z}\} \subset \mathcal{A}, \quad k=1,2,3,\cdots, \\
&: \text{0 状態 site は孤立し，1 状態 site のブロック長は高々} k \text{ の configuration 全体} \\
&: 01, \cdots, 0\underbrace{1\cdots1}_{k} \text{ のみからなる configuration 全体} \\
\mathcal{S}_{0(1)} &: \text{0 状態 site が孤立している configuration 全体.}
\end{aligned}$$

注意 $\cup_{k\ge1}\mathcal{S}_{0(1),1(\le k)} \ne \mathcal{S}_{0(1)}$ であることに注意する．$\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_{0(1)}$ の 1 状態 site のブロック長は，有界であるとは限らない．$\mathcal{S}_{0(1)}$ 中には，1 状態 site のブロック長が有界でないものが存在する．例えば，次の configuration を考えればよい．

$$(\cdots,0,1,0,\underbrace{1,1}_{2},0,\underbrace{1,1,1}_{3},\cdots,0,\underbrace{1,\cdots1}_{l},0,\underbrace{1,\cdots,1}_{l+1},\cdots)$$

$(\mathcal{A}, g_{40})$ と $(\mathcal{A}, g_{168})$ の二つの dynamics については，次の結果が得られている [12][13][14]．

Theorem 1.1 (ルール 40)

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{S}_{0(1),1(\le2)}, \quad \lim_{t\to\infty} g_{40}^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \\
&\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_{0(1),1(\le2)}, \quad g_{40}(\boldsymbol{x}) = \sigma_L(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}$$

であり，$(\mathcal{S}_{0(1),1(\le2)}, g_{40})$ は，Devaney chaos である．ここで σ_L は，left-shift transformation である．

Theorem 1.2 (ルール 168) (1) $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_{0(1)}$ に対して；

$$\begin{aligned}
&g_{168}(\boldsymbol{x}) = \sigma_L(\boldsymbol{x}), \\
&\exists i \in \boldsymbol{Z} \text{ such that } \boldsymbol{x}_{i,\to} = \boldsymbol{1}, \text{ and } \forall t \ge 1,\ g_{168}^t(\boldsymbol{x}) \ne \boldsymbol{1},\ \lim_{t\to\infty} g_{168}^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}, \\
&\forall k \in \boldsymbol{N},\ (\mathcal{S}_{0(1),1(\le k)}, g_{168}) \text{ is the Devaney chaos,} \\
&(\mathcal{S}_{0(1)}, g_{168}) \text{ is the Devaney chaos}
\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{S}_{0(1)}$ に対して；

(2-i) もし，

$$\begin{aligned}
&\exists i \in \boldsymbol{Z} \text{ such that } \boldsymbol{x}_{i,\to} = \boldsymbol{1}, \\
&\exists j \in \boldsymbol{Z} \text{ such that } (x_j, x_{j+1}) = (0,0), \text{ which is the right most 00 block in } \boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

であれば

$$\lim_{t\to\infty} g_{168}^t(x) = (\cdots, 0, 0, \overset{j+1}{\overbrace{0}}, 1, 1, 1, \cdots).$$

(2-ii) もし $x = \mathbf{1}$ であれば，$g_{168}(x) = \mathbf{1}$ であるから，

$$\forall t \geq 1,\ g_{168}^t(x) = \mathbf{1}.$$

(2-iii) (2-i), (2-ii) 以外の場合

$$\lim_{t\to\infty} g_{168}^t(x) = \mathbf{0}$$

任意の $k \geq 2$ に対して，$(\mathcal{S}_{0(1),1(\leq 2)}, g_{40})$ は $(\mathcal{S}_{0(1),1(\leq k)}, g_{168})$ の dynamical sub-system である．ルール 40 に比べて，ルール 168 の attractor の types は多様である．また，ルール 40 が chaos になる dynamical system は，ルール 168 の sub-system である．ルール 168 が chaos になる領域は，ルール 40 に比べて広いことがわかる．

しかし，素朴な直観による複雑さの観点からは，ルール 168 の方がより複雑であるとは言えない．いずれも left-shift dynamical system でしかないのであるからである．また，いずれの場合も，attractor への吸引は単純である．

Shereshevsky's Lyapunov exponent, spreading rate, strict spreading rate については，以下の結果が得られている．

Theorem 1.3 (ルール 168)　(1) 任意の γ $(0 \leq \gamma \leq 1)$ に対して，$s\gamma^+(x) = \gamma$ となる configuration $x \in \cup_{k\geq 2}\mathcal{S}_{0(1),1(\leq k)}$ が存在する．

(2) 任意の有理数 γ $(0 \leq \gamma \leq 1)$ に対して，Shereshevskii's Lyapunov exponent と Spreading rate とが一致し，それらの値が γ である configuration $x \in \cup_{k\geq 2}\mathcal{S}_{0(1),1(\leq k)}$ が存在する．

Theorem 1.4 (ルール 40)　(1) 任意の γ $(1/2 \leq \gamma \leq 1)$ に対して，$s\gamma^+(x) = \gamma$ となる configuration $x \in \cup_{k\geq 2}\mathcal{S}_{0(1),1(\leq k)}$ が存在する．

(2) 任意の有理数 γ $(1/2 \leq \gamma \leq 1)$ に対して，Shereshevskii's Lyapunov exponent と Spreading rate とが一致し，それらの値が γ である configuration $x \in \cup_{k\geq 2}\mathcal{S}_{0(1),1(\leq k)}$ が存在する．

ルール 168 がより多様な Lyapunov exponent 及び spreading rate の値を持つ．ルール 168 がカオス的になる領域がルール 40 より広いことから了解できる．しかし，これらの exponent の値は an initial configuration $x \in \cup_{k\geq 2}\mathcal{S}_{0(1),1(\leq k)}$ における $010, 0110, \cdots, 0\underbrace{1\cdots 1}_{k}0$ の相対頻度によって定まる．つまり，ルール 40 及び 168 に関しては，time-space pattern の複雑性を捉えたものであるとは言い難い．これらの exponent は，x と $n_j(x)$ の時間発展における right-most different site number と left-most different site number の平均変化率であり，ルール 168 と 40 の場合は，initial configuration における一定のパターンの相対頻度によって定まる．つまり $g^t(x) \oplus g^t(n_j(x))$ の時空間パターンの複雑さを捉えようとしたものではない．Bagnoli's Lyapunov exponent は，これを試みようとしたものである．本稿では，ルール 168 と 40 に対して，Bagnolli's Lyapunov exponent の値を具体的に求めることを試み，計算における基本的な考え方と，Bagnoli's Lyapunov exponent が見落としていることを明示する．

2. Bagnoli's Lyapunov exponent

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$ に対して，$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (x_i \oplus y_i)_i$ とする．$\oplus$ は排他的論理和を意味し，次のようである．

$$a \oplus b = \begin{cases} 1, & a \neq b, \\ 0, & a = b. \end{cases}$$

ECA g を考える．$\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ に対して，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{g}(n_j(\boldsymbol{x}))$ を転置して縦の上下無限系列にしたもの $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{g}(n_j(\boldsymbol{x})))^T$ を第 j 列にした無限行列を

$$J(\boldsymbol{x}) = \left[\cdots, (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \oplus \overset{j}{\boldsymbol{g}}(n_j(\boldsymbol{x})))^T, \cdots\right]$$

とする．local rule g に依存することから J_g と書くべきであるが，省略する．

$(J(\boldsymbol{x}))_{i,j} = 1$ であれば，$(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{g}(n_j(\boldsymbol{x})))_i = 1$ であり，configuration $\boldsymbol{x}$ と $n_j(\boldsymbol{x})$ に対して，$(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))_i \neq (\boldsymbol{g}(n_j(\boldsymbol{x})))_i$ であることを意味する．つまり，$\boldsymbol{x}$ における j–th cell の状態変化が，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ における i–th cell の状態変化を引き起こすことを意味する．

無限行列 $J(\boldsymbol{x})$ の第 i 行で 1 が立っている列番番号に対応する $\boldsymbol{x}$ 中の cell の状態変化が $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ における i–th cell の状態変化を引き起こす．つまり，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ の i–th cell に影響を及ぼす cell の番号が明示されていることになる．

$\boldsymbol{x}$ を initial configuration とする trajectory を考える．

$$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{t-1}),\ t = 1, 2, 3, \cdots,$$

(1) $J(\boldsymbol{x}^t)$ の (i, j) 成分：configuration $\boldsymbol{x}^t$ の j–th site の状態を変えた場合 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ の i–th site に影響を与えるかどうかを意味する．

(2) $J(\boldsymbol{x}^{t+1}) \cdot J(\boldsymbol{x}^t)$ の (i, j) 成分：configuration $\boldsymbol{x}^t$ の j–th site の状態を変えたとき，$\boldsymbol{x}^{t+2}$ の i–th site への影響の path の個数を意味する．このような path を difference path と呼ぶことにする．

(3) $\prod_{t=0}^{T} J(\boldsymbol{x}^t)$ の (i, j) 成分：configuration $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ で j–th site の状態を変えたとき，$\boldsymbol{x}^{T+1}$ の i–th site への difference path の個数を意味する．

$$\boldsymbol{\xi}_j = (\cdots, 0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0, \cdots)^T$$

として，j–th site の状態を変えることを意味する縦ベクトルであるとすると，

(4) $\prod_{t=0}^{T} J(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{\xi}_j$：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ で j–th site の状態を変えたとき，$\boldsymbol{x}^{T+1}$ のそれぞれの site への difference path の個数を与える．

(5) (4) での difference path の総数を

$$\left|\prod_{t=0}^{T} J(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{\xi}_j\right| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\prod_{t=0}^{T} J(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{\xi}_j\right)_i$$

として，以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \lambda^T(\boldsymbol{x}, j) &= \frac{1}{T} \log \left|\prod_{t=0}^{T} J(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{\xi}_j\right|, \\ \lambda(\boldsymbol{x}, j) &= \lim_{T \to \infty} \lambda^T(\boldsymbol{x}, j), \\ \lambda(\boldsymbol{x}) &= \sup_j \lambda(\boldsymbol{x}, j) \end{aligned}$$

$\lambda(\boldsymbol{x}, j)$ を configuration $\boldsymbol{x}$ の j–th site における Bagnoli's Lyapunov exponent，$\lambda(\boldsymbol{x})$ を configuration $\boldsymbol{x}$ の Bagnoli's Lyapunov exponent と呼ぶ．

3. ルール 168 の Bagnoli's Lyapunov exponent

本稿では，ルール 169 の Bagnoli's Lyapunov exponent については次の定理が成立する．

Theorem 3.1 (Bagnoli's Lyapunoc exponent for rule 168) ルール 168 に対して，Banoli's Lyapunov exponent は，次のようである．

(1) $x \in \mathcal{S}_{0(1)}$ に対して，01 または 011 のみからなる右側無限系列が存在する場合は，$\lambda(x) = \log 2$ であり，それ以外は $\lambda(x,j) = 0$ である．従って，$x \in \mathcal{S}_{0(1),1(\leq 2)}$ に対しては，$\lambda(x) = \log 2$ である．

(2) $x \notin \mathcal{S}_{0(1)}$ に対して，$\lambda(x) = 0$ または $-\infty$ である．

$\lambda(x) = 0$ の時，difference path の個数が，時間推移に関して，常に 1 本しか存在しない場合と，多項式 order で増加していく場合とがある．つまり，Bagnoli's Lyapunov exponent は，difference path の個数が，多項式 order で増加していくような場合においても 0 を与えることになる．

以下に，$x \in \mathcal{S}_{0(1)}$ に対して，指数の値が $\log 2$ になる場合と，difference path の個数が多項式 order で増加しながら 0 になる場合を示す．

$$p^T(x,j) = \left| \prod_{t=0}^{T} J(x^t) \cdot \xi_j \right|$$

と置く．$p^T(x,j)$ は以下のように与えられる．$x \in \mathcal{S}_{0(1)}$ に対して $g_{168}(x) = \sigma_L(x)$ であることに注意する．

(1) $m \geq 3$ として，

$$x = (\cdots, 1, \cdots, \overset{j}{\breve{1}}, \overbrace{011, \cdots, 011}^{n \text{組の } 011}, 0, \mathbf{1}_m, 0, \cdots)$$

の場合，

$$t \geq 2n+2, \quad p^T(x,j) = \sum_{i=0}^{2n+2} \binom{T}{i}.$$

T が十分大であれば，

$$\sum_{i=0}^{2n+2} \binom{T}{i} \leq (2n+2+1)\binom{T}{2n+2} \leq \frac{2n+2+1}{(2n+2)!} T^{2n+2}$$

であるから

$$\lambda(x,j) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log p^T(x,j) = 0.$$

difference path の個数は，多項式 order で増えていくが，指数 order ではないため，$\lambda(x,j) = 0$ となる．

(2) $n_i \geq 1$, $m_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots$ として，

$$x = (\cdots, 1, \cdots, \overset{j}{\breve{1}}, (01)_{m_1}, (011)_{n_1}, (01)_{m_2}, (011)_{n_2}, \cdots)$$

または，

$$x = (\cdots, 1, \cdots, \overset{j}{\breve{1}}, (011)_{n_1}, (01)_{m_1}, (011)_{n_2}, (01)_{m_2}, \cdots)$$

の場合，つまり j–th site の右側が 01 または 011 のブロックのみからなる場合，

$$p^T(x,j) = 2^T$$

であり，

$$\lambda(x,j)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log p^{T}(x,j)=\log 2.$$

$(01)_m$ は，$\underbrace{01\cdots01}_{m\text{組}}$ を意味する．$(011)_n$ も同様である．

ルール 40 については，次の定理が成立する．

Theorem 3.2 (Bagnoli's Lyapunov exponent for rule 40) ルール 40 において，$x\in\mathcal{S}_{0(1),1(\leq 2)}$ に対して，$\lambda(x)=\log 2$ である．

$\mathcal{S}_{0(1),1(\leq 2)}$ に属さない configuration に対するルール 40 の Bagnoli's Lyapunov exponent は，$-\infty$ であると予測される．

Theorem 3.1 で与えられている ルール 168 の方が若干の多様性があるようだが，さほど大きいとは言えない．また，Theorems 1.3 と 1.4 に見られるほどのルール間の差を Bagnoli の指数は，反映しないと言える．更に，Bagnoli の指数は，多項式 order で増加していく difference path の個数を捉えることが出来ないが，これは，ルール 168 と 40 の違いの特徴でもある．difference path の個数が増加していく order そのものがセルオートマトンの特徴を捉えるのかもしれないと考えられる．

また，Bagnoli は，基本的に一つのセルの状態変化が次の時間ステップでの状態に及ぼす影響のみを考えている．つまり，複数個のセルの同時変化の影響を捉えられない．セルオートマトンが，セル間の依存関係を生み出すような場合，Bagnoli の指標では不十分であると推測できる．

4. 結論

セルオートマトンに対して定義された Lyapunov exponent としては，本稿で紹介した四つのものが提案されている．それぞれの値を直接的な計算によって求めるのは，相当に煩雑なものであることが本稿での試みから想像できる．このために，計算機シミュレーションに頼ることになるのだが，このことによって，それぞれの指標についての多くの知見が取りこぼされることになる．

セルオートマトンが生成する時空間パターンの特徴を捉えようとするためには，少なくとも，単純なものにはある一定の特定の値をもたらしてくれるようなものであってほしいのだが，これらの指標は，全ての基本セルオートマトンと initial configuration に対して希望を満たしてくれるものではなさそうである．

References

[1] F.Bagnoli and R.Rechtman, LYAPUNOV EXPONENTS AND SYNCHRONIZATION OF CELLULAR AUTOMATA, in Complex Systems, eds. E. Goles and S.Martínez, Kluwer Academic Publishers(2001), 69-103.

[2] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, Theoretical Computer Science, **145**(1995), 1-26.

[3] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, Theoretical Computer Science, **201**(1998), 171-187.

[4] G. Cattaneo, E.Formenti and L.Margara, Topological Definitions of Deterministic Chao, in Cellular Automata, eds. M Delorme and J. Mazoyer, Kluwer Acadenc Publishers(1999), 213-259.

[5] M.Gardner, Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", Scietific American, **223**(1970), 120-123.

[6] A. Ilachinski, Cellular Automata - A Discrete Universe, World Scientific(2001).

[7] C. G. Langton, STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA, Physica **22D**(1986), 120-149.

[8] C. G. Langton, Life at the Edge of Chaos, ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyne Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.

[9] J. von Neumann, Theory of Self - Reproducing Automata, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, (1966).

[10] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **18**(2001), 59-73.

[11] F. Ohi and K. Mabuchi, Time-Space Pattern and Dynamics Determined by Elementary Cellular Automata, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,**21**(2004), 1-23.

[12] Fumio Ohi, Chaotic Property of Elementary Cellular Automaton of Rule 40 in Wolfram Class I, Complex Systems, **17**(2007),295-308.

[13] 大鋳史男, ルール番号 40 の基本セルオートマトンと確率測度, 数理解析研究所講究録 1559「RIMS 共同研究, 最適化問題における確率モデルの展開と応用」, 2007.6, pp122-130.

[14] Fumio Ohi, Chaotic properties of elementary cellular automaton rule 168 of Wolfram class I, in AUTOMATA-2008, Theory and Applications of Cullular Automata, edt. A. Adamatzky, R. Alsonso-Sanz, A. Lawniczak, G. Juarez Matrinez, K. Morita, T. Worsch, Luniver Press, 2008, 196-206.

[15] M. A. Shereshevsky, Lyapunov exponents for one-dimensional cellular Automata, J.Nonlinear Sci. **2**(1992), 1-8.

[16] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Review of Modern Physics, **55**(1983), 601-644.

[17] S. Wolfram, UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA, Physica **10D**(1984),1-35.

[18] S. Wolfram, A NEW KINDS OF SCIENCE, Wolfram Media, Inc.(2002).